МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1979

УДК 533.6.011.6:538.6:534

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОАКУСТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ГАЗА

К. И. АРТАМОНОВ, А. П. ВОРОБЬЕВ, М. М. ЛОМОНОСОВ

(Москва)

В работе получены условия термоакустической устойчивости высокотемпературного электропроводного газа с внутренним тепловыделением, находящегося в постоянном магнитном поле, которое трансформирует акустические волны в быстрые и медленные магнитоакустические колебания, а также вносит джоулеву диссипацию. Исследование проведено методом энергетического баланса, а также путем прямого решения уравнений для малых возмущений в частном случае длин волн акустических колебаний, малых по сравнению с размерами неоднородностей в зоне тепловыделения. Найдены границы устойчивости по отношению к быстрым и медленным магнитоакустическим колебаниям.

Условия термоакустической устойчивости высокотемпературного плотного газа с объемным тепловыделением были получены энергетическим методом в [1]. Было показано, что стабилизирующим фактором при достаточно малых длинах волн акустических колебаний является диссипация, связанная с лучистой теплопроводностью.

Результаты исследований термоакустической устойчивости плоского слоя тепловыделяющего газа приведены в работе [2], а с учетом его электропроводности и наложенного слабого поперечного магнитного поля в работе [3], из которых следует расширение области устойчивости при наложении магнитного поля. Аналогичное воздействие отмечается и в работе [4].

Ниже исследуется влияние магнитного поля на термоакустическую устойчивость высокотемпературного газа, тепловыделение в котором пропорционально его плотности. Для газа считаются выполненными условия локального термодинамического равновесия и лучистые тепловые потоки описываются в диффузионном приближении. Основное влияние магнитного поля при относительно малой его величине состоит в диссипации акустических колебаний, имеющих составляющую колебательной скорости, направленную поперек магнитного поля.

1. Стационарное состояние исследуемой системы определяется уравнениями

$$\mathbf{V}=0,\ p=\text{const},\ \mathbf{H}=\text{const}$$

$$\rho\varepsilon+\operatorname{div}(\lambda\nabla T)=0,\ \lambda=\lambda(p,\ T)$$

$$\rho=\rho(p,\ S),\ T=T(p,\ S)$$

Здесь ε — постоянное тепловыделение на единицу массы газа, λ — коэффициент лучистой теплопроводности.

Система уравнений магнитной термогазодинамики для колебаний малой амплитуды (соответствующие величины отмечены индексом 1) в линейном приближении имеет вид

$$\rho\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial t}=-\nabla p_1+\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}_1\times\mathbf{H},\qquad \frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}_1=0$$

$$\rho T\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}+\mathbf{V}_1\nabla S\right)=\rho_1\varepsilon-\operatorname{div}\mathbf{q}_1,\qquad \mathbf{q}_1=-\lambda\nabla T_1-\lambda_1\nabla T$$

$$(1.1)\qquad \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{V}_1\times\mathbf{H}]-\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H}_1),\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_1=0$$

$$\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{p_1}{\rho a^2}-\beta T\frac{S_1}{c_p},\qquad \frac{T_1}{T}=(\gamma-1)\frac{p_1}{\rho a^2}+\frac{S_1}{c_p}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}=m\frac{T_1}{T}+n\frac{p_1}{p},\qquad m=\left(\frac{\partial\ln\lambda}{\partial\ln T}\right)_p,\qquad n=\left(\frac{\partial\ln\lambda}{\partial\ln p}\right)_T$$

$$a^2=(\partial p/\partial\rho)_S,\ \ \beta=-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p,\ \ c_p=T^{-1}(\partial S/\partial T)_p$$

Здесь a^2, β, c_p — соответственно квадрат скорости звука, коэффициент теплового расширения и удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\gamma-1=\beta a^2/c_p$.

Влиянием вязкости на акустические колебания пренебрегается, так как вязкая диссипация мала по сравнению с джоулевой и диссипацией лучистой теплопроводностью.

Из уравнения энергии можно оценить соотношение между амплитудами S_1/c_p и $p_1/\rho a^2$. При выполнении условий

$$(1.2)\qquad \frac{\varepsilon}{c_pT}\frac{l}{a}\ll1,\qquad \frac{\varkappa}{al}\ll1\quad\left(\varkappa=\frac{\lambda}{c_p\rho}\right),\qquad \frac{l|\nabla T|}{T}\ll1$$

(l — длина волны акустических колебаний) можно пользоваться квазиадиабатическим приближением, т. е. принимать $S_1/c_p\ll p_1/\rho a^2$.

Первые два условия в (1.2) означают, что теплообмен газа лучистой теплопроводностью и теплоподвод к газу за период акустических колебаний значительно меньше его теплосодержания, а последнее условие — незначительность изменения стационарной температуры среды на длине волны акустических колебаний.

2. Выведем достаточные условия термоакустической устойчивости в магнитном поле энергетическим методом [1]. Уравнение баланса энергии акустических колебаний имеет вид

$$\frac{\partial e}{\partial t}=N+N_H+N_F+N_{FH}$$

$$e=\int\left(\frac{\rho\mathbf{V}_1^2}{2}+\frac{p_1^2}{2\rho a^2}+\frac{\mathbf{H}_1^2}{8\pi}\right)dv,\qquad N=\int p_1\frac{(\rho\varepsilon-\operatorname{div}\mathbf{q})_1}{c_p\rho T}dv$$

$$N_F=-\int p_1\mathbf{V}_1\,d\mathbf{F},\qquad N_{FH}=-\frac{c}{4\pi}\int[\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1]\,d\mathbf{F}$$

$$N_H=-\frac{1}{4\pi}\int\nu_m(\operatorname{rot}\mathbf{H}_1)^2\,dv$$

$$\mathbf{E}_1=(\nu_m\operatorname{rot}\mathbf{H}_1-[\mathbf{V}_1\times\mathbf{H}])/c$$

Здесь E_1 — возмущение электрического поля (c — скорость света), e — энергия акустических колебаний в объеме тепловыделяющего газа, N и N_H — объемные интегралы, определяющие соответственно работу теплового расширения газа и джоулевы потери в нем; N_F и N_{FH} — поверхностные интегралы, первый из которых соответствует механической работе газа, второй — потоку электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем газа.

Физически усиление акустических колебаний в тепловыделяющей среде обусловлено необратимой работой теплового расширения газа, если в момент сжатия элемента газа в акустической волне к газу подводится тепло в силу специфической зависимости скорости тепловыделения и величины лучистого теплового потока от давления и температуры.

Если границы рассматриваемого объема являются «консервативными», т. е. не вносят раскачки или диссипации в систему, то поверхностные интегралы тождественно обращаются в нуль. В этом случае достаточное условие термоакустической устойчивости в магнитном поле записывается в виде

$$\int \frac{p_1(\rho\varepsilon-\operatorname{div}\mathbf{q})_1}{c_p\rho T}\,dv < \frac{1}{4\pi}\int \nu_m(\operatorname{rot}\mathbf{H}_1)^2\,dv \tag{2.1}$$

Для получения конкретных условий устойчивости следует установить соотношение между колебаниями электрического тока и давления. В предположении слабого влияния магнитного поля на форму акустических колебаний, что соответствует условию $H^2/4\pi\rho a^2 \ll 1$, и при достаточно высокой электропроводности среды $(al/\nu_m \gg 1)$ электрические токи, возникающие при колебаниях, определяются индуктивным сопротивлением и имеет место следующая оценка:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 \sim \frac{H}{l}\frac{V_*}{a} \sim \frac{H}{l_*}\frac{p_1}{\rho a^2}$$

Здесь V_* — составляющая колебательной скорости, перпендикулярная направлению магнитного поля, l_* — характерная длина акустической волны в направлении поперек магнитного поля.

При пренебрежении диссипацией акустических колебаний благодаря лучистой теплопроводности и при учете единственного механизма диссипации — джоулевой диссипации в магнитном поле — из (2.1) следует достаточное условие термоакустической устойчивости

$$\frac{H^2}{4\pi\rho a^2} > (1-A)\frac{\varepsilon}{c_pT}\frac{l_*^2}{\nu_m}, \qquad A=(\gamma-1)(m+1)+\gamma n \qquad \left(\frac{al}{\nu_m} \gg 1\right)$$

Магнитное поле стабилизирует акустические колебания, которые являются неустойчивыми при его отсутствии, если $A<1$. Отношение магнитного давления к газовому, при котором акустические колебания затухают, пропорционально скорости тепловыделения ε/c_pT, квадрату длины волны в направлении поперек магнитного поля и электропроводности газа.

3. Исследуем влияние магнитного поля на термоакустическую устойчивость тепловыделяющего электропроводного газа путем решения уравнений для малых колебаний. Ограничимся рассмотрением длин волн акустических колебаний, малых по сравнению с размерами неоднородностей в зоне тепловыделения.

Принимая зависимость колебаний от времени и координат в виде $\sim\exp i(\omega t+k_1x+k_2y+k_3z)$, из системы уравнений (1.1) в случае постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z $(H=H_z=\mathrm{const})$, и при выполнении условий (1.2) получим дисперсионное уравнение

$$\left(\alpha^2-\frac{i\alpha}{\mathrm{Re}_m}-b\right)(\alpha^2-1+i\alpha\Gamma)=b\mu, \qquad \Gamma=(1-A)\frac{\varepsilon}{c_pT}\frac{1}{ka}-(\gamma-1)\frac{\varkappa k}{a} \tag{3.1}$$

$$\alpha=\omega/ka,\ k=\sqrt{k_*^2+k_3^2},\ k_*^2=k_1^2+k_2^2,\ b=H^2/4\pi\rho a^2$$

Здесь b — параметр, характеризующий отношение магнитного давления к газовому, k_*, k_3 — поперечная и продольная компоненты волнового числа по отношению к магнитному полю, $\mathrm{Re}_m=a/k\nu_m$ — магнитное число Рейнольдса, $\mu=k_*^2/k^2$ — параметр, характеризующий неплоскость колебаний по отношению к наложенному магнитному полю.

В данной постановке задачи волновые числа рассматриваются как заданные вещественные параметры, тогда как при решении полной задачи о термоакустической устойчивости ограниченного тепловыделяющего объема они должны определяться из граничных условий.

Отметим, что уравнение (3.1) не содержит энтропийной моды, что является следствием ранее принятого квазиадиабатического приближения.

Для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля ($\mu=0$), уравнение (3.1) распадается на два независимых, одно из которых имеет вид

$$\alpha^2-1+i\alpha\Gamma=0$$

и устанавливает условие термоакустической устойчивости для волн давления, не взаимодействующих с магнитным полем, в виде неравенства

$$\Gamma<0 \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) определяет диапазон волновых чисел акустических колебаний, неустойчивых в тепловыделяющей среде, если принять во внимание диссипацию лучистой теплопроводностью

$$k^2<\frac{1-A}{\gamma-1}\frac{\rho\varepsilon}{\lambda T}$$

Последнее условие при $\lambda=\mathrm{const}$ ($m=n=0$, $A=\gamma-1$) совпадает с приведенным в [2].

Второе уравнение совпадает с дисперсионным уравнением для альфвеновских волн, распространяющихся вдоль магнитного поля с затуханием в среде с конечной электропроводностью

$$\alpha^2-i\alpha/\mathrm{Re}_m-b=0$$

Построим границу устойчивости акустических колебаний при $\mu\neq0$, пренебрегая диссипацией лучистой теплопроводностью, т. е. полагая $\Gamma=(1-A)\varepsilon/c_pTka$.

На границе устойчивости $\mathrm{Im}\,\alpha=0$, поэтому, считая α действительным числом и отделяя действительные и мнимые части в уравнении (3.1), получим систему двух уравнений, из которых определяются частоты нейтральных колебаний и граница устойчивости

$$\alpha^4-\left(1+b-\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}_m}\right)\alpha^2+b(1-\mu)=0 \tag{3.3}$$

$$\alpha^2\left(\Gamma-\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}_m}-b\Gamma=0 \tag{3.4}$$

Будем искать решение этой системы в предположении, что $\Gamma/\mathrm{Re}_m\ll1+b$. Это соотношение выполняется для достаточно хорошо электропроводных высокотемпературных сред независимо от длины волны колебаний и не является сильным ограничением. При этом уравнение (3.3) становится независимым от (3.4) и определяет частоты нейтральных колебаний на границе устойчивости, не зависящие от параметра тепловыделения Γ

$$\alpha_{1,2}^2={}^1/_2(1+b)\pm\sqrt{{}^1/_4(1+b)^2-b(1-\mu)}$$

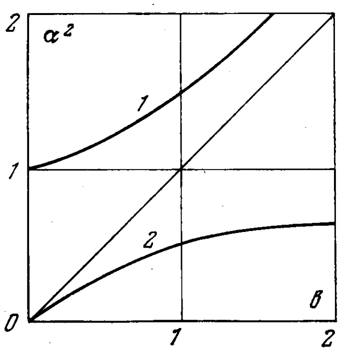
Значения α_1^2 и α_2^2 совпадают с известными выражениями для квадратов безразмерных фазовых скоростей быстрых и медленных магнитоакустических колебаний в среде с бесконечной электропроводностью [5], зависимости которых от параметра b представлены на фиг. 1 для $\mu={}^1/_4$ (кривые *1* и *2* соответственно).

Из (3.4) следует выражение для границы устойчивости

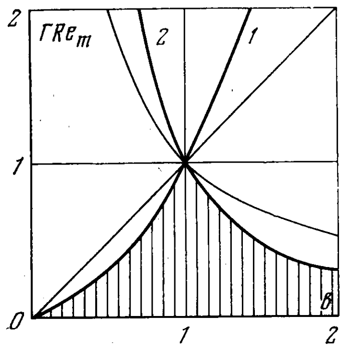
$$\Gamma \mathrm{Re}_m=(\alpha^2-1)/(\alpha^2-b)$$

Подставляя сюда найденные выше значения $\alpha_{1,2}{}^2$, получим границы устойчивости по отношению к быстрым и медленным магнитоакустическим колебаниям, представленные на фиг. 2.

Областью термоакустической устойчивости является область, в которой устойчивы оба типа колебаний (заштрихованная область на фигуре).



Фиг. 1



Фиг. 2

Граница устойчивости для колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля ($\mu=1$), определяется при $0\leqslant b\leqslant 1$ прямой $\Gamma \mathrm{Re}_m=b$, а при $b\geqslant 1$ — гиперболой $\Gamma \mathrm{Re}_m=1/b$.

Асимптотические выражения для границ устойчивости и частот нейтральных колебаний в случаях слабых и сильных магнитных полей для быстрых и медленных магнитоакустических колебаний имеют соответственно вид

$$\Gamma \mathrm{Re}_m\to\begin{cases} b\mu, & b\to 0\\ b/\mu, & b\to\infty\end{cases},\quad \alpha_1{}^2\to\begin{cases} 1+b\mu, & b\to 0\\ b, & b\to\infty\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\Gamma \mathrm{Re}_m\to\begin{cases} 1/b\mu, & b\to 0\\ \mu/b, & b\to\infty\end{cases},\quad \alpha_2{}^2\to\begin{cases} b(1-\mu), & b\to 0\\ 1-\mu, & b\to\infty\end{cases}$$

Заметим, что условие термоакустической устойчивости для быстрых магнитоакустических колебаний при слабом магнитном поле ($b\ll 1$) совпадает с условием (2.2), полученным методом энергетического баланса, если в качестве характерной длины акустической волны в направлении поперек магнитного поля принять $l_*=1/k_*$.

Как следует из рассмотрения области устойчивости, нарастание амплитуды магнитоакустических колебаний, даже распространяющихся поперек магнитного поля и обладающих наибольшей джоулевой диссипацией, невозможно подавить ни при каком значении магнитного поля, если $\Gamma \mathrm{Re}_m>1$. Исходя из этого условия диапазон волновых чисел, на которые магнитное поле не оказывает стабилизирующего воздействия, записывается в виде

$$k^2<(1-A)\varepsilon/c_pT\nu_m$$

Из сопоставления условий устойчивости (3.2) и (3.5) следует, что при наложении слабого магнитного поля ($b \ll 1$) тепловыделяющая среда в случае выполнения условия $b\mu\nu_m > (\gamma-1)\varkappa$ становится более устойчивой по отношению к акустическим колебаниям, что эквивалентно расширению диапазона устойчивых длин волн при заданном уровне тепловыделения.

Из анализа зависимости области устойчивости от параметра μ, характеризующего направление распространения колебаний относительно магнитного поля, следует очевидный вывод о том, что при уменьшении μ область устойчивости уменьшается, т. е. с точки зрения термоакустической устойчивости наиболее опасными являются колебания с наименьшими для системы значениями параметра μ.

Поступила 19 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артамонов К. И.* Термоакустическая устойчивость высокотемпературного тепловыделяющего газа. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3.
2. *McNeil H., Becker M.* Acoustic instabilities in a constant flux gas core nuclear rocket. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 2. (Рус. перев.: Акустическая неустойчивость газового реактора ядерного ракетного двигателя с постоянным нейтронным потоком. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 2).
3. *Bastos-Netto D., Nobre D. N., Sudano J. P.* Acoustic instabilities in nonadiabatic weakly ionized gases with applied magnetic fields. AIAA Journal, 1977, vol. 15, No. 8.
4. *Иевлев В. М.* Некоторые результаты исследований по газофазному полостному ядерному реактору. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1977, № 6.
5. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.