

ПРОБЛЕМА «СРАЩИВАНИЯ» В ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю. В. ЛАПИН, А. Л. ЯРИН

(Ленинград)

На основе анализа имеющихся данных по сильно неравновесным турбулентным пристенным течениям указывается на трудности, возникающие при их расчете. Одна из причин, обусловивших эти трудности, заключается в «локальной» природе полуэмпирических теорий турбулентности. Вторая — связана со способом «сращивания» решений во внутренней и внешней областях.

Показано, что традиционный способ сращивания решений по локальным значениям коэффициентов турбулентной вязкости во внутренней (область «закона стенки») и внешней (область «закона следа») областях приводит к неверному определению масштаба внутренней области и, следовательно, не корректен.

Рассматривается интегральное сращивание по турбулентным касательным напряжениям. Путем конкретных расчетов в рамках двухпараметрического интегрального метода показано, что интегральное сращивание приводит к качественно правильному описанию динамики взаимодействия внутренней и внешней областей. Результаты расчетов интегральных характеристик турбулентного пограничного слоя сравниваются с экспериментальными данными.

1. Некорректность сращивания по локальным значениям турбулентной вязкости. В последнее время широкое распространение при исследовании неравновесных (в смысле Клаузера) пристенных турбулентных течений получили численные методы интегрирования уравнений пограничного слоя (или уравнений Рейнольдса) с использованием двухслойных моделей для турбулентной вязкости. Согласно двухслойной модели вся область течения разбивается на две: внутреннюю и внешнюю; в каждой из областей принимается тот или иной закон изменения турбулентной вязкости.

Как известно, большинство современных полуэмпирических теорий турбулентности в большой степени основывается на «гипотезе локальности» [1], согласно которой турбулентный перенос количества движения (тепла, вещества) определяется свойствами жидкости и локальными значениями производных от осредненных (в смысле Рейнольдса) скоростей (температур, концентраций) по поперечной к направлению потока координате. Влияние процессов, происходящих вдали от рассматриваемой точки турбулентного потока, гипотезой локальности не учитывается. Основываясь на гипотезе локальности и на соображениях размерности, нетрудно получить классические формулы полуэмпирических теорий Прандтля и Кармана [2].

Наиболее часто для описания вязкости во внутренней (пристенной) области пограничного слоя (ϵ_i) применяется формула Прандтля с демпфирующим множителем Ван-Дрифта [3], а при решении уравнений Рейнольдса — ее обобщение [4]

$$(1.1) \quad \epsilon_i = \rho (\kappa y D)^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = 1 - \exp \left(- \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho_w}}{A v_w} \right)$$

$$(1.2) \quad \varepsilon_i = \rho (\kappa y D)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

Здесь κ — эмпирическая постоянная турбулентности ($\kappa=0.4$); y — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности; u — проекция скорости на ось x ; x — координата, отсчитываемая вдоль поверхности тела; v — проекция скорости на ось y ; ρ — плотность; ν — коэффициент кинематической вязкости; τ_w — напряжение трения на поверхности; A — эмпирическая постоянная турбулентности ($A=26$); D — демпфирующий множитель Ван-Дриста; индекс w обозначает параметры на стенке.

Нередко применяют и различные модификации формулы (1.1) (см., например, [5]).

Во внешней области чаще других используется модифицированный закон дефекта скорости Клаузера

$$(1.3) \quad \varepsilon_0 = \rho k u_e \delta^* \beta, \quad \delta^* = \int_{y_0}^{\delta, \infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad \beta = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right]^{-1}$$

Здесь u_e — скорость на внешней границе пограничного слоя, δ — толщина пограничного слоя, δ^* — толщина вытеснения, k — эмпирическая постоянная турбулентности ($k=0.0168$), β — коэффициент, учитывающий перемещаемость на внешней границе пограничного слоя.

Использование соотношений (1.1)–(1.3) и их модификаций при расчетах «равновесных» течений привело в целом к удовлетворительным результатам [6].

Однако попытки рассчитать «сильно неравновесные» течения с использованием тех же гипотез турбулентности во многих случаях оказались неудачными. Об этом свидетельствуют, в частности, работы [7–9].

В работе [7] были проведены расчеты величин $\varepsilon_0/\rho u_e \delta^*$ и l/y (l — турбулентный путь перемешивания) с использованием опытных данных по профилям скорости и температуры при положительных перепадах давления во внешнем потоке и числе Маха $M_\infty=3.5$. Основные результаты исследования заключаются в том, что отношение l/y в пристеночной области оказалось близким к значению 0.65 вместо общепринятого 0.4; максимальные значения величины $\varepsilon_0/\rho u_e \delta^*$ во внешней области в зависимости от продольного перепада давления возрастали от 0.025 до 0.06 вместо обычного значения 0.0168.

Подобные же «несогласования» некоторых из указанных параметров с опытными данными отмечены в [8, 9].

Тщательные измерения характеристик турбулентного пограничного слоя в окрестности локального отрыва, обусловленного взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем ($M_\infty=7.2$), а также численные расчеты на основе интегрирования уравнений Рейнольдса в рамках двухслойной модели турбулентной вязкости проведены в [10]. Отметим, что при проведении расчетов границы между внешней и внутренней областями определялись из условия $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Согласование расчетных и экспериментальных данных по давлению $p(x)$ и интегральным характеристикам (трение, тепловой поток), оказалось более или менее удовлетворительным, но по профилям скорости в зоне отрыва согласование отсутствовало.

Подобный же подход к решению этой же задачи, использованный ранее в работе [11], не привел к удовлетворительным результатам вблизи отрыва по профилям скорости и распределению трения.

Приведенный краткий обзор лишь некоторых из исследований последнего времени достаточно определенно свидетельствует о наличии труд-

ностей, возникающих при применении существующих полуэмпирических теорий турбулентности к расчету неравновесных турбулентных течений.

Одна из причин указанных трудностей, по-видимому, достаточно очевидна и заключается в «локальной» (или «дифференциальной») природе полуэмпирических теорий турбулентности, не учитывающих в необходимой степени предысторию течения. Классические опыты Клаузера [12] по исследованию затухания возмущения, возникшего на различных расстояниях от стенки в турбулентном пограничном слое, легли в основу современных представлений о релаксационных свойствах пограничного слоя. Согласно этим представлениям [13] внутренняя (пристеночная) область с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, обладает «короткой памятью», т. е. затухание возмущений происходит на «коротких» расстояниях (порядка нескольких толщин пограничного слоя) от места возмущения. Внешняя область с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает «долгой памятью», т. е. для полного восстановления от возмущения требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности.

К сожалению, указанные представления не учитываются в некоторых новейших релаксационных моделях турбулентности. В [14] предложена двухслойная релаксационная модель турбулентной вязкости: во внешней области используется модифицированная формула Прандтля для струйных течений («модель Эскудье»), а эффекты релаксации («запаздывания») «вводятся» в выражение для вязкости во внутренней области (модификация формулы Прандтля — Ван-Дриста). Не обсуждая способа учета «запаздывания», по-видимому, следует признать, что подобный подход не соответствует приведенным выше представлениям. Учет «эффектов памяти» необходим в соответствии с представлением о «долгой памяти», прежде всего, во внешней области.

Вторая из причин, обусловивших трудности применения полуэмпирических теорий к расчету неравновесных турбулентных течений, по-видимому, менее очевидна, чем первая, и связана она со способом «сращивания» («стыковки») решений во внутренней и внешней областях.

Собственно, проблема сращивания заключается в отыскании рационального способа расчета границы между внутренней и внешней областями. В ранних исследованиях стыковка осуществлялась на фиксированных расстояниях от стенки, например при $y/\delta \approx 0.2$ [15, 16] и др. (δ — толщина пограничного слоя). В большинстве последующих работ, вплоть до последних, включая исследования по новейшим релаксационным моделям [4, 14], граница стыковки областей находилась из условия равенства локальных значений турбулентной вязкости

$$(1.4) \quad \varepsilon_t = \varepsilon_0 \quad (y = y_m)$$

Здесь и далее индексом m обозначены параметры на линии сращивания.

Авторы работы [17] в рамках двухпараметрического метода, в котором также использовалось условие (1.4), пытались при его выполнении оценить тенденции в характере изменения толщины внутренней пристеночной области под действием положительного и отрицательного перепада давления, однако эта попытка успеха не имела, хотя результаты сопоставления опытных и расчетных данных по интегральным характеристикам свидетельствовали в целом о достаточно высокой надежности и точности метода [17].

Четко выраженной тенденции убывания относительной толщины внутренней области под действием положительного перепада давления по мере приближения к точке отрыва и исчезновения этой области в точке отрыва не наблюдалось при использовании условия (1.4) и в более поздних работах других авторов [4].

Правильность использования условия (1.4) при расчетах неравновесных течений была, по-видимому, впервые подвергнута серьезному сомнению в работе [18].

Между тем нетрудно показать, что условие (1.4) некорректно, поскольку оно не приводит к правильному описанию масштаба внутренней области при наличии продольного перепада давления вообще и в точке отрыва в частности. Действительно, приравняем значения турбулентной вязкости во внутренней и внешней областях из выражений (1.1) и (1.3); для простоты положим демпфирующий множитель D и коэффициент β , учитывающий перемежаемость, равными единице. Такое упрощение естественно, поскольку D играет существенную роль лишь в буферной зоне, а β — на внешней границе пограничного слоя. В результате будем иметь

$$(1.5) \quad \kappa^2 y_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_m = k u_c \delta^*$$

Вводя в рассмотрение толщину пограничного слоя δ , преобразуем соотношение (1.5) к виду

$$(1.6) \quad \kappa^2 Y_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_m = k \delta_1^*, \quad Y = \frac{y}{\delta}, \quad \delta_1^* = \frac{\delta^*}{\delta}, \quad U = \frac{u}{u_c}$$

Для оценки входящих в (1.6) величин δ_1^* и $(\partial U / \partial Y)_m$ воспользуемся соотношениями Претша [19], хорошо согласующимися с опытными данными Никурадзе, Грушвитца и др. в широком диапазоне изменения продольных перепадов давления

$$(1.7) \quad U = Y^{(H-1)/2}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{H-1}{2} Y^{(H-3)/2}, \quad \delta_1^* = \frac{H-1}{H+1}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

Здесь δ^{**} — толщина потери импульса, H — форм-параметр пограничного слоя.

Подставляя второе и третье из соотношений (1.7) в равенство (1.6), после простых преобразований с учетом значений констант ($k=0.0168$, $\kappa=0.4$) найдем

$$(1.8) \quad Y_m = \left(\frac{0.21}{H+1} \right)^{2/(H+1)}$$

Вычисляя производную от Y_m по H , получим

$$(1.9) \quad \frac{dY_m}{dH} = \left(\frac{0.21}{H+1} \right)^{2/(H+1)} \frac{2}{(H+1)^2} [\ln(H+1) + 0.56] > 0$$

Условие (1.9) показывает, что сращивание по локальным значениям турбулентной вязкости приводит к увеличению относительной толщины внутренней (пристеночной) области по мере приближения к точке отрыва (с ростом форм-параметра H), что противоречит действительным тенденциям. Таким образом, условие (1.4) следует признать некорректным.

2. Интегральное сращивание по турбулентным касательным напряжениям (несжимаемая жидкость). Проблема «сращивания» является составной частью более общей проблемы асимптотической теории турбулентного пограничного слоя. Попытки формального применения метода срачиваемых асимптотических разложений к описанию турбулентных течений уже предпринимались, однако существенных результатов в этом направлении пока не получено. В связи с этим выбор условия срачивания в большой степени продолжает оставаться скорее интуитивным, чем рациональным.

Поскольку турбулентные напряжения во внешней области неравно-весных пограничных слоев зависят не только от локальных характери-стик, но и от предыстории потока, очевидно, что для определения мас-штаба внутренней области (Y_m) необходимо использовать условие сращи-вания по какой-либо интегральной величине, учитывающей предысторию течения. Требование «интегральности» сращиваемой величины допускает известный произвол в ее выборе. В уже упоминавшейся работе [18] сращивание проводилось по интегральным значениям турбулентного напря-жения трения на границе внутренней и внешней областей. Сущность это-го условия сводится к равенству касательных напряжений, полученных из уравнения движения путем его интегрирования поперек пограничного слоя от стенки и внешней границы пограничного слоя до границы сты-ковки соответственно. В работе [18], к сожалению, не приводится факти-ческих данных о динамике изменения масштаба внутренней области, нет в ней и детализации интегрального сращивания на основе применения «закона стенки» к описанию течения во внутренней области. В настоя-щей работе этим аспектам уделено основное внимание.

Проиллюстрируем сущность обсуждаемого подхода на примере тече-ния несжимаемой жидкости в условиях отсутствия теплообмена между стенкой и жидкостью.

Запишем уравнения неразрывности и движения в переменных $\xi=x$, $\eta=yv_*(x)/\nu$

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\eta}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{v_*}{\nu} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

$$(2.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho \left(u \frac{\eta}{v_*} \frac{dv_*}{dx} + v \frac{v_*}{\nu} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{dp}{dx} + \frac{v_*}{\nu} \frac{\partial \tau}{\partial \eta}$$

Здесь $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$.

Применяя к уравнению неразрывности (2.1) «закон стенки» $u/v_* = \varphi(\eta)$, преобразуем это уравнение к виду

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \frac{\nu}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \frac{d}{d\eta} (\varphi\eta)$$

Интегрируя уравнение (2.3) по η от 0 до η и используя граничные ус-ловия $\varphi=0$, $v=v_w$ при $\eta=0$, получим

$$(2.4) \quad v = v_w - \frac{\nu}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \varphi\eta$$

Применение «закона стенки» к уравнению движения (2.2) с учетом соотношения (2.4) приводит к следующему результату:

$$(2.5) \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \rho v_* v_w \frac{d\varphi}{d\eta} + \mu \varphi^2 \frac{dv_*}{dx} + \frac{\mu}{\rho v_*} \frac{dp}{dx}$$

Интегрируя уравнение (2.5) в пределах от 0 до η с использованием граничных условий $\tau=\tau_w$, $\varphi=0$ при $\eta=0$, получим распределение касат-ельного напряжения в области действия «закона стенки»

$$(2.6) \quad \tau = \tau_w + \rho v_w v_* \varphi + \frac{\nu \eta}{v_*} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{dv_*}{dx} \int_0^\eta \varphi^2 d\eta$$

Напряжение трения на линии сращивания внутренней и внешней об-

ластей определяется из условия $\tau = \tau_m$ при $\eta = \eta_m$, т. е.

$$(2.7) \quad \tau_m = \tau(\eta_m - 0) = \tau_w + \rho v_w v_* \varphi_m + \frac{v \eta_m}{v_*} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{dv_*}{dx} \int_0^{\eta_m} \varphi^2 d\eta$$

Для получения распределения τ во внешней области запишем уравнение движения в переменных x и y в дивергентной форме, используя при этом уравнения Бернулли и неразрывности; в результате получим

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} [u(u_e - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(u_e - u)] + \frac{du_e}{dx} (u_e - u) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Интегрируя (2.8) от y до ∞ и принимая во внимание граничное условие $\tau \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, найдем распределение напряжений трения во внешней области

$$(2.9) \quad \tau = \rho \left[-v(u_e - u) + \int_y^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(u_e - u)] dy + \frac{du_e}{dx} \int_y^{\infty} (u_e - u) dy \right]$$

Используя условие $\tau = \tau_m$ при $y = y_m$, получим из (2.9) значение напряжений трения на линии срачивания

$$(2.10) \quad \tau_m = \tau(y_m + 0) = \rho \left[(u_e - u_m) \left(u_m \frac{dy_m}{dx} - v_m \right) + \right. \\ \left. + \frac{du_e}{dx} \int_{y_m}^{\infty} (u_e - u) dy + \frac{d}{dx} \int_{y_m}^{\infty} u(u_e - u) dy \right]$$

Приравняв значения τ_m из равенств (2.7) и (2.10), получим соотношение, которое можно рассматривать как интегрируемое дифференциальное уравнение для определения y_m . Это уравнение, разрешенное относительно производной dy_m/dx , имеет вид

$$(2.11) \quad \frac{dy_m}{dx} = \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{u_m(u_e - u_m)} \left[v_*^2 + v_w u_e - \right. \\ \left. - y_m(u_e - u_m) \frac{u_m}{v_*} \frac{dv_*}{dx} - y_m u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{dv_*}{dx} \int_0^{\eta_m} \varphi^2 d\eta - \right. \\ \left. - \frac{d}{dx} \int_{y_m}^{\infty} u(u_e - u) dy - \frac{du_e}{dx} \int_{y_m}^{\infty} (u_e - u) dy \right]$$

Интегрируя уравнение (2.11), получим

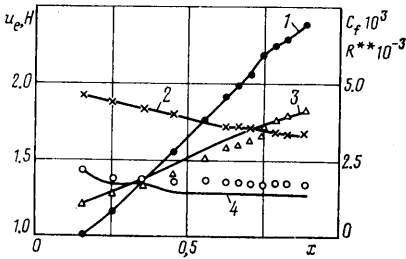
$$(2.12) \quad y_m(x) = y_m(x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x) dx$$

Здесь x_0 — начальное сечение.

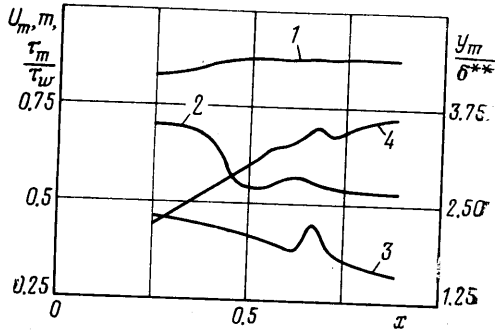
Соотношение (2.12) является основой для определения толщины (масштаба) внутренней области y_m , если известны распределения $u_e(x)$, $v_w(x)$, $v_*(x)$ и профили скоростей во внутренней и внешней областях.

Профили скоростей в каждой из двух областей могут быть либо получены путем интегрирования исходных дифференциальных уравнений, замкнутых с помощью тех или иных полуэмпирических гипотез турбулент-

ности, либо заданы в виде одно- или многопараметрических семейств, подобно тому как это обычно делается в интегральных методах расчета. Важно подчеркнуть, что рассмотренный способ сращивания решений для двух областей совершенно не связан с конкретным выбором гипотез турбулентности, которые могут быть использованы при определении профилей скорости. Даже в том случае, когда используется такое естественное на первый взгляд дополнительное условие сращивания, как равенство производных от скорости по поперечной координате в точке сращивания $((\partial u/\partial y)_{y_m-0} = (\partial u/\partial y)_{y_m+0})$, сращивание по интегральным значениям турбулентного напряжения трения в рамках интегрального метода не эквива-



Фиг. 1



Фиг. 2

лентно традиционному сращиванию ($\epsilon_i = \epsilon_0$), поскольку из равенства

$$\frac{\tau(y_m-0)}{(\partial u/\partial y)_{y_m-0}} = \frac{\tau(y_m+0)}{(\partial u/\partial y)_{y_m+0}}$$

очевидно, совсем не следует равенство локальных значений турбулентной вязкости в точке сращивания.

3. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе сращивания по интегральным значениям напряжений трения. Рассмотренный выше способ сращивания был использован в рамках интегрального метода для расчета характеристик неравновесных турбулентных пограничных слоев в несжимаемой жидкости при различных продольных перепадах давления.

Во внутренней (пристеночной) области использовался обычный профиль скоростей [17]

$$(3.1) \quad \eta = \int_0^\varphi \frac{2\kappa^2 \eta^2 (1 - \exp(-\eta/A_*))^2 d\varphi}{[1 + 4\kappa^2 \eta^2 (1 - \exp(-\eta/A_*))^2 \tau/\tau_w]^{1/2} - 1}$$

$$A_* = \frac{26}{\sqrt{1 - p_* \eta_i}}, \quad p_* = \frac{u_e \mu}{\rho v_*^2} \frac{du_e}{dx}$$

Здесь A_* — модифицированный Себеси демпфирующий множитель Ван-Дриста [20], η_i — координата границы вязкого подслоя. Распределение напряжений трения τ определяется соотношением (2.6).

Во внешней области был принят для простоты однопараметрический профиль, выражающийся через «функцию ошибок»

$$(3.2) \quad \frac{u}{u_e} = 1 + \frac{m-1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\xi}} \right) \right], \quad \xi = k \int_{\infty}^x \delta^* dx$$

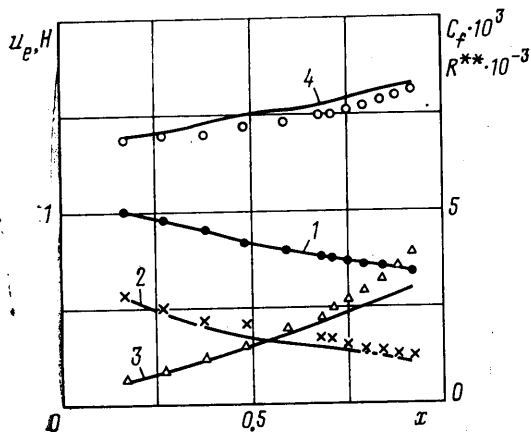
$$0 \leq m \leq 1$$

Профиль скоростей (3.2) получается при решении задачи о смешении двух полубесконечных потоков ($m = u_s/u_e$ — параметр спутности) в приближении Озеена и при-

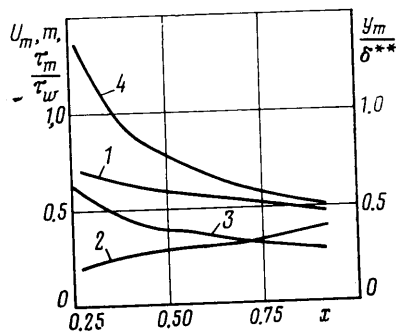
нятия для турбулентной вязкости гипотезы Клаузера (1.3) (постановка задачи подробно рассмотрена в [17]).

В точке срачивания использовались условия: непрерывности скорости ($u(y_m-0)=u(y_m+0)$) и ее производных ($(\partial u/\partial y)_{y_m-0}=(\partial u/\partial y)_{y_m+0}$), а также (2.12). В отличие от [17] в настоящей работе кроме иного условия срачивания (условие (2.12) вместо (1.4)) применялось, что не принципиально, другое семейство профилей скорости во внешней области. Определение трения на поверхности, как обычно, проводилось с помощью интегрального соотношения импульсов для слоя в целом.

Обратимся к результатам расчетов течений с продольным перепадом давления. Номера опытов, с которыми проводится сравнение, соответствуют их значениям, принятым в материалах стэнфордской конференции ([8], т. 2).



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1 приводятся распределения скорости во внешнем потоке u_e (кривая 1), коэффициента трения c_f (кривая 2), числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса R^{**} (кривая 3), форм-параметра H (кривая 4) на поверхности с сильным отрицательным перепадом давления (опыт 1300); u_e и x безразмерные. Фиг. 2 иллюстрирует зависимость безразмерных скорости U_m (кривая 1) и трения τ_m/τ_w (кривая 2) от продольной координаты. Там же представлены зависимости для параметра внешнего семейства профилей скорости m (кривая 3) и относительной толщины пристеночного слоя y_m/δ^{**} (кривая 4). Из фиг. 2 видно, что пристеночная область пограничного слоя становится толще при ускорении внешнего потока. При этом величина y_m/δ^{**} достигает значения, близкого к 3.5. Для сравнения отметим, что при $10^6 \leq R_x \leq 10^7$ на плоской пластине $y_m/\delta^{**} \approx 1.65 \div 1.9$, что соответствует значению $y_m/\delta \approx 0.2$.

На фиг. 3 и 4 приводятся аналогичные кривые для течения с умеренным положительным перепадом давления (опыт 1100). Как видно из фиг. 4, относительная толщина пристеночной области y_m/δ^{**} уменьшается до значения, равного 0.5, и составляет ~30% той же величины на пластине.

Отметим, что расчеты течения на пластине (опыт 1400, результаты здесь не приводятся) показали, что относительная толщина внутренней области в отсутствие продольного перепада давления постоянна ($y_m/\delta^{**} \approx 1.5$).

Приведенные данные о динамике взаимодействия внутренней и внешней областей находятся в соответствии с современными представлениями о структуре турбулентного пограничного слоя [18], однако в [18] подобные данные не приводятся.

Проведенный анализ и результаты расчетов убедительно свидетельствуют о том, что апробированный в настоящей работе интегральный метод срачивания решений является более предпочтительным, чем метод срачивания по локальным значениям турбулентной вязкости. Сочетание этого метода с достаточно обоснованными релаксационными моделями турбулентности оставляет надежду на дальнейшее продвижение вперед в решении сложной проблемы расчета неравновесных турбулентных пограничных слоев.

Поступила 15 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости. ПИММ, 1958, т. 22, № 5.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
3. Driest E. R. On turbulent flow near a wall. J. Aero. Sci., 1956, vol. 23, No. 11.
4. Ханг, Маккормак. Численный расчет сверх- и гиперзвуковых течений сжатия около тупого (внутреннего) угла. Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 3.
5. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.
6. Computation of turbulent boundary layer - 1968. Proc. AFOSR - IFR - Stanford Conf, vol, 1-2, 1969.
7. Стурек. Распределение напряжения трения в турбулентном пограничном слое для сжимаемого течения с положительным градиентом давления. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 3.
8. Ли, Смит. Определение характеристик турбулентного переноса на стенке сопла с $M=5$. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 2.
9. Хорстмен, Оуэн. Характеристики турбулентного сжимаемого пограничного слоя. Ракетная техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 11.
10. Horstman C. C., Kussoy M. I., Coakley T. J., Rubesin M. W., Marvin J. G. Shock - wave - induced turbulent boundary - layer separation at hypersonic speeds. AIAA paper, 1975, No. 4.
11. Baldwin B. S., MacCormack R. W. Numerical solution of the interaction of a strong shock wave with a hypersonic turbulent boundary layer. AIAA paper, 1974, No. 558.
12. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В сб. «Проблемы механики», вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
13. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
14. Хорстмен. Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления. Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 2.
15. Сполдинг Д. Б. Некоторые приложения нового метода расчета турбулентного пограничного слоя. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1. М., «Энергия», 1968.
16. Patankar S. V., Spalding D. B. Heat and mass transfer in boundary layers. L., Intertext, 1970.
17. Лапин Ю. В., Шаров В. Г. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости при больших продольных перепадах давления и вдуве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
18. Ривв. Двухслойная модель турбулентного пограничного слоя. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 7.
19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
20. Себеси. Турбулентное течение у пористой стенки при наличии градиента давления. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 12.