

## МОДЕЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ПЛОСКОЙ СТРУЕ

О. А. ЛИХАЧЕВ, М. Х. ПРАВДИНА

(Новосибирск)

Экспериментальные исследования устойчивости плоской струи [1, 2] показывают, что после потери устойчивости стационарным течением возникает устойчивый автоколебательный режим.

В настоящей работе автоколебательное течение в струе изучается теоретически на основе плоскопараллельного потока в достаточно широком канале в присутствии поля внешних сил. Внешние силы таковы, что при нулевой амплитуде автоколебаний они формируют профиль скорости Бикли — Шлихтинга. Характер возбуждения вторичных режимов изучен методами теории ветвления [3].

Для описания автоколебаний конечной амплитуды привлекается моногармоническое приближение, введенное в [4, 5] для построения замкнутой теории осредненных характеристик турбулентности. В этом приближении уравнения для пульсаций скорости решаются совместно с уравнениями Рейнольдса для осредненной скорости и предполагается моногармоническая зависимость пульсационных величин от однородных координат и времени. Это предположение позволяет вычислить напряжения Рейнольдса, в результате чего система гидродинамических уравнений замыкается.

Моногармоническое приближение с успехом было использовано для описания вязкой пристенной зоны [5], где в уравнениях для пульсаций квадратом пульсационной скорости можно пренебречь по сравнению с линейными членами. Существенно, что рассматривалась зона генерации турбулентной энергии и автоколебания аппроксимировались синусоидальными в той области, где они зарождались. Струя также является примером генерационной области, но в данном случае механизм возбуждения невязкий — неустойчивость связана с точками перегиба на профиле скорости. Кроме того, автоколебания, которые появляются после потери устойчивости, сами оказываются устойчивыми. Поэтому можно ожидать, что моногармоническое приближение в применении к струе даст описание смены режима течения, а также определенную информацию о вторичном режиме.

В большинстве исследований, посвященных расчету устойчивости струи, задача ставится в плоскопараллельном приближении, т. е. поперечная скорость полагается равной нулю. Несмотря на то что критическое число Рейнольдса для струи невелико и поэтому пренебрежение поперечной скоростью не является строго обоснованным, это приближение позволило правильно предсказать критическое число Рейнольдса и найти две кривые нейтральной устойчивости, хорошо согласующиеся с данными экспериментов [6, 7]. Кроме того, плоскопараллельное приближение необходимо как первый шаг для последующего учета непараллельности.

1. Рассматриваются автоколебания, возбуждающиеся в плоскопараллельном потоке, имеющем профиль скорости Бикли — Шлихтинга, который формируется полем внешних сил.

Покажем, как решение такой задачи может быть сопоставлено с реальным течением в струе.

Автомодельное решение для плоской струи получено в [8]. Продольная скорость дается выражением

$$u_* = 0.4543 (K^2 / \nu x_*)^{1/2} (1 - \text{th}^2 y), \quad y = 0.2752 (K / \nu^2)^{1/2} y_* / x_*^{3/2}$$

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} u_*^2 dy_* = \text{idem}$$

Здесь  $y$  — автомодельная координата,  $K$  — кинематический импульс струи,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $x_*$ ,  $y_*$  — размерные координаты. Поперечная скорость  $u_*$  имеет порядок  $u_*/R_1$ , где  $R_1$  — число Рейнольдса

$$(1.1) \quad R_1 = \frac{U_0 L_0}{\nu}, \quad L_0 = \frac{x_*^2}{0.2752} \left( \frac{K}{\nu^2} \right)^{-1/4}, \quad U_0 = 0.4543 \left( \frac{K^2}{\nu x_*} \right)^{1/4}$$

Рассматривая продольную координату в масштабах (1.1) как параметр и пренебрегая поперечной скоростью, из уравнений движения получим уравнения для возмущений скорости. В моногармоническом приближении задача приводится к уравнению Орра — Зоммерфельда для комплексной амплитуды функции тока  $\varphi$

$$(1.2) \quad (U-c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -i(\alpha R_1)^{-1}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

Здесь все величины безразмерные,  $c$  — фазовая скорость,  $\alpha$  — волновое число возмущений. Число Рейнольдса

$$(1.3) \quad R_1 = L_0 U_0 / \nu = (4.5 K x_* / \nu^2)^{1/4}$$

сохраняет «память» о реальном потоке.

Зная импульс струи  $K$  и определяя из уравнения (1.2) критическое число Рейнольдса, тем самым определяют в первом приближении расстояние  $x_*$  от источника струи, на котором малые возмущения начинают нарастать.

Условное плоскопараллельное течение, которое исследуется на устойчивость, могло бы реализоваться при наличии внешних сил, определенных соотношением

$$(1.4) \quad \nu d^2 u_* / dy_*^2 = -f_*$$

Здесь  $f_*$  — отнесенная к плотности продольная составляющая объемной силы.

Учитывая, что  $u_* = U_0 [1 - \text{th}^2 (y_*/L_0)]$ , получим

$$(1.5) \quad f_* = -\frac{2\nu U_0}{L_0^2} \left( 3 \text{th}^2 \frac{y_*}{L_0} - 1 \right) \left( 1 - \text{th}^2 \frac{y_*}{L_0} \right)$$

Если зафиксировать поле сил (1.5), а не профиль скорости, то необходимо ввести новый набор характерных масштабов, например

$$(1.6) \quad L_0, f_0 = 0.5 f_*(0), \quad R = L_0^3 f_0 \nu^{-2}$$

Безразмерный параметр  $R$  будем называть числом Рейнольдса. При этом в определение масштабов (1.6) вместо импульса следует ввести величину

$$K' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{y'} \int_{-\infty}^{y''} f_*(y) dy dy'' \right]^2 dy' = \text{idem}$$

Если  $f_0 = 0.03441 [K' / (x_*^5 \nu^2)]^{1/4}$  и  $K = K'$ , то  $R = R_1$ .

При описании бесконечно малых возмущений  $K = K'$  в силу (1.4) и (1.5) безразлично, что фиксировать: профиль скорости или внешние силы. Если же возмущения становятся конечными, то следует учитывать рейнольдсовы напряжения возмущений, которые будут деформировать профиль скорости. В этом случае нельзя строить характерный масштаб по профилю скорости и основными станут масштабы (1.6), определенные по сохраняющейся величине  $K'$ .

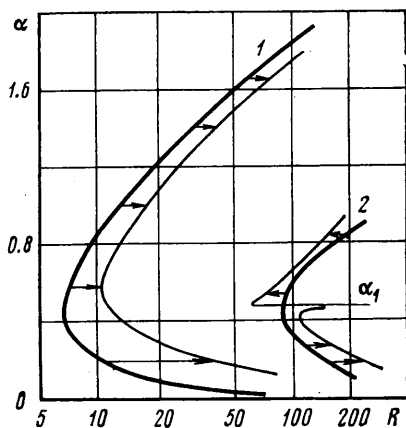
Исследование линейной устойчивости струи проведено в ряде работ, в том числе в [6, 7, 9, 10]. В конкретных расчетах на некотором расстоянии  $a$  от середины струи ставятся граничные условия. В данной работе это расстояние принято  $a=6$ , а граничные условия соответствуют прилипанию. Профиль скорости формируется полем сил

$$f(y) = y_* f_*(L_0 f_0)^{-1}$$

Результаты расчетов устойчивости, выполненных в [6, 7, 9, 10], в силу  $R=R_1$  без изменений переносятся на исследуемое течение.

2. Периодические автоколебания существуют как точные решения уравнений Навье — Стокса и впервые появляются в точках нейтральной кривой линейной теории устойчивости [3]. Анализ ветвления автоколебательных режимов для течения Пуазейля и течений в пограничных слоях проведен в [11, 12]. Ниже аналогичный анализ проведен для течения в плоской струе в рамках плоскопараллельного приближения. Уравнение для функции тока возмущенного движения  $\psi$  имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi = \\ = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}$$



Фиг. 1

Выберем на нейтральной кривой произвольную точку и дадим соответствующему числу Рейнольдса  $R_0$  малое приращение

$$R - R_0 = f \epsilon^2, \quad f = \pm 1$$

Будем искать решение (2.1) в виде ряда по малому параметру  $\epsilon$

$$\psi = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \psi_k(x-ct, y), \quad Rc = R_0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \epsilon^k$$

Тогда

$$\psi_1(x-ct, y) = \beta [\varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\varphi}(y) e^{-i\alpha(x-ct)}].$$

Здесь комплексная амплитуда  $\varphi(y)$  является решением уравнения Ора — Зоммерфельда (1.2). Если  $E$  — энергия автоколебаний, то производная  $\partial E / \partial R$  на нейтральной кривой имеет вид [11]

$$\left. \frac{\partial E}{\partial R} \right|_{R=R_0} = f \beta^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy$$

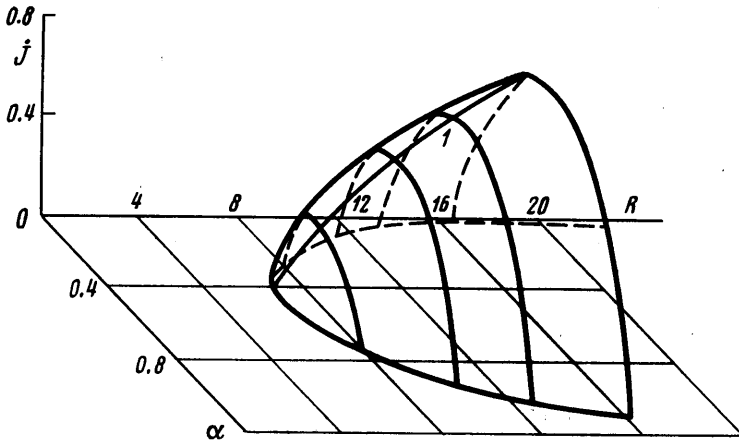
Знак этой производной показывает характер возбуждения вторичного режима. При  $\partial E / \partial R > 0$  вторичный режим называется сверхкритическим и является устойчивым. Обратный знак производной соответствует докритическому режиму, который неустойчив [11].

На фиг. 1 нанесены нейтральные кривые для возмущений с симметричной (1) и антисимметричной (2) функциями тока. Стрелки качественно характеризуют автоколебательные режимы. Длина стрелок дает представление о величине  $\partial E / \partial R$ , а их направление соответствует ее знаку. Сим-

метричные автоколебания существуют при числах Рейнольдса, больших критического и поэтому устойчивы. Антисимметричные автоколебания могут быть устойчивы при  $\alpha < \alpha_1$  (значение  $\alpha_1$  больше критического волнового числа) и неустойчивы при  $\alpha > \alpha_1$ .

3. Периодические автоколебания конечной амплитуды исследуем в моногармоническом приближении. Для этого рассмотрим систему, состоящую из линеаризованных уравнений для возмущений скорости  $v_i$  и давления  $p$  и уравнений для осредненной скорости  $U_i$

$$(3.1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$



Фиг. 2

$$(3.2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} = -f_i + \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$U_y = f_y = 0, \quad U_x = U(y), \quad f_x = f(y)$$

Здесь  $f_i$  — внешняя сила. Уравнение (3.2) отличается от (1.4) наличием нелинейных членов. Решение (3.1) представляется в виде

$$(3.3) \quad v_x = I\sqrt{2} \operatorname{Re} [u(y) e^{i\alpha(x-ct)}], \quad v_y = I\sqrt{2} \operatorname{Re} [v(y) e^{i\alpha(x-ct)}]$$

Тогда  $\langle v_x v_y \rangle = I^2 (u_r v_r + u_e v_e)$ . Индексы  $r, e$  обозначают действительную и мнимую части. Множитель  $I$  рассматривается как параметр, а функции  $u(y), v(y)$  определенным образом нормируются.

С учетом (3.3) уравнения (3.1), (3.2) примут вид

$$(3.4) \quad v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha R [(U-c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v]$$

$$(3.5) \quad i\alpha u + v' = 0, \quad R^{-1} U'' = -f + I^2 R (u_r v_r + u_e v_e)'$$

Последнее уравнение 1 раз интегрируется с учетом симметрии профиля скорости

$$(3.6) \quad U' = I^2 R (u_r v_r + u_e v_e) - 2 \operatorname{th} y (1 - \operatorname{th}^2 y)$$

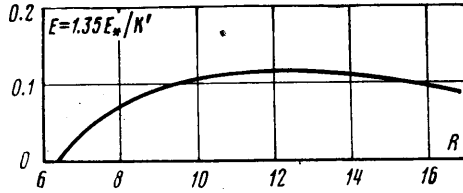
При  $I=0$  еще одно интегрирование (3.6) дает профиль скорости Бикли — Шлихтинга. При  $y = -\delta$  ставятся граничные условия прилипания

и рассматриваются только симметричные возмущения как наиболее опасные

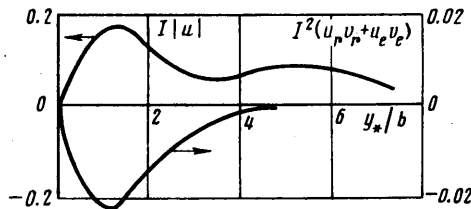
$$U=u=v=0 \quad (y=-6) \quad (3.7)$$

$$u=v'''=0 \quad (y=0)$$

Автоколебания конечной амплитуды разыскиваются как нейтрально-устойчивые решения системы (3.4)–(3.7). Сформулированная задача является задачей на собственные значения, причем любые два из параметров ( $I$ ,  $\alpha$ ,  $R$ ,  $c$ ) могут рассматриваться как собственные значения. Задача



Фиг. 3



Фиг. 4

решалась интегрированием методом Рунге – Кутты – Мерсена [13] от  $y=-6$  до  $y=0$ . Условия симметрии при  $y=0$  удовлетворялись пристрелкой и подбором собственных значений, для чего использовался четырехмерный вариант метода секущих.

На фиг. 2 представлены результаты расчетов нейтральной поверхности. По осям координат отложены величины  $j$ ,  $\alpha$ ,  $R$ , где  $j$  – относительная интенсивность пульсаций

$$j = I \left[ \frac{1}{\delta U^2} \int_{\max}^a (|u|^2 + |v|^2) dy \right]^{1/2}, \quad \delta = \int_{-a}^a \frac{U}{U_{\max}} dy$$

Здесь  $\delta$  – характерный поперечный размер, который введен в связи с тем, что ширина канала  $a$  не характеризует течение.

Из фиг. 2 видно, что модельные автоколебания существуют в закритической области – возбуждение мягкое, что согласуется с точным анализом, проведенным в п. 2, и с экспериментом [2].

Необходимо определить способ выбора на полученной поверхности параметров наиболее представительных автоколебаний. Если все точки нейтральной поверхности отвечают устойчивым по амплитуде автоколебаниям, то уже устойчивость к возмущению с другой длиной волны выделяет при каждом числе Рейнольдса единственный устойчивый (нейтрально) режим. Следуя [4], его параметры выберем как представительные. Чтобы найти эти параметры, зафиксируем профиль скорости, соответствующий

некоторой точке нейтральной поверхности, и построим его нейтральную кривую. Если зафиксированные параметры принадлежат носику полученной кривой, то они искомые. Их можно найти, перемещаясь при фиксированном числе Рейнольдса по поверхности от нижней ветви нейтральной кривой при  $I=0$  к верхней.

Линия 1 на фиг. 2 проведена через точки, определенные описанным способом. Ниже представлены данные об автоколебаниях, рассчитанные по точкам линии 1.

На фиг. 3 показана зависимость безразмерной энергии автоколебаний

$$E = I^2 \int_{-a}^a (|u|^2 + |v|^2) dy$$

от числа Рейнольдса. Учитывая, что  $R = (4.5K'x_*/v^2)^{1/2}$ , а размерная величина энергии  $E_* = EL_0^5 f_0^2 / v^2 = 0.74K'E$  не содержит явной зависимости от  $x_*$ , график фиг. 3 можно рассматривать как зависимость энергии автоколебаний от  $x_*^{1/2}$ . Эта зависимость в согласии с экспериментальными данными [2] отражает наличие трех этапов в развитии автоколебаний: нарастания, медленного изменения амплитуды, убывания. При больших числах Рейнольдса в эксперименте развивалась другая, более высокочастотная форма автоколебаний, эволюция которой приводила к турбулентности.

Фигура 4 иллюстрирует продольную компоненту возмущения скорости и напряжения Рейнольдса, созданную возмущением при  $R=13$ . По оси

абсцисс отложена величина  $y_*/b$ , где  $b$  определяется как полуширина струи:  $u_*(b) = 0.5u_*(0)$ . Профиль возмущения согласуется с данными [2]. На фиг. 5 показана эволюция профиля осредненной скорости при изменении числа Рейнольдса. Кривые 1-4 соответствуют числам Рейнольдса 6.23 (критическое значение), 8, 10, 13. Координаты на этом графике выбраны так, что скорость и расстояние от середины струи измеряются при всех числах Рейнольдса в тех же масштабах, что и при критическом значении  $R_c$ .

$$U_* = UR_c/R = 8.6v/K'u_*$$

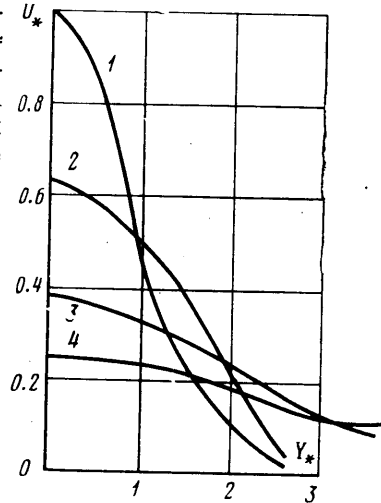
$$Y_* = yR_c^2/R^2 = 0.019K'/v^2 y_*$$

Поэтому набор кривых 1-4, построенных при разных числах Рейнольдса, отражает эволюцию профиля скорости вниз по потоку, которая качественно согласуется с экспериментом.

Проведенный анализ показывает, что моногармоническое приближение может быть использовано для аппроксимации вторичного режима.

Использование плоскопараллельного приближения при малых числах Рейнольдса  $6.23 < R < 25$  оправдано согласием с экспериментом [2], где автоколебания наблюдались в диапазоне  $10 < R < 60$ . При больших числах Рейнольдса, когда пренебрежение поперечной скоростью не вызывает сомнений, следует учитывать потерю устойчивости антисимметричной модой.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика и В. Н. Штерна за обсуждение постановки задачи и результатов.



Фиг. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hiroshi Sato*. The stability and transition of a two-dimensional jet. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 7, pt 1.
2. *Hiroshi Sato, Fujihiko Sakao*. An experimental investigation of the instability of a two-dimensional jet at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 20, pt 2.
3. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Модельные автоколебания и турбулентность. В сб. «Проблемы теплофизики и физической гидродинамики». Новосибирск, «Наука», 1974.
4. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Приближенная теория пристенной турбулентности. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
5. *Tatsumi T., Kakutani T.* The stability of a two-dimensional jet. *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, pt 2.
6. *Сопруненко И. П.* Устойчивость струйных течений. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
8. *Терехова Н. М.* Гидродинамическая устойчивость плоскопараллельной струи. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, № 3, вып. 1.
9. *Штерн В. Н.* Генерация турбулентности в плоских затопленных струях. 2-е межотраслевое совещание по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Таллин, 1976. Тез. докл. Таллин, 1976.
10. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
11. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
12. *Лихачев О. А., Штерн В. Н.* Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
13. *Ланс Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Изд-во иностр. лит., 1962.