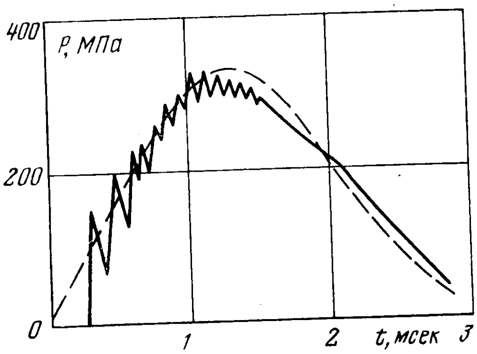
Сопротивление датчика составляло 20±1 *ом*. Он включался в мост, симметричный относительно измерительной диагонали и питаемый стабилизированным источником питания Б5-8, напряжения питания E=3 *в*. Полезный сигнал датчика при давлении 100 *мПа* составляет ~0.8 *мв*, этого недостаточно для регистрации осциллографом С1-18 из-за сильного микрофонного эффекта. Поэтому сигнал предварительно усиливался усилителем постоянного тока, выполненным на микросхеме К1УТ401Б. Входное сопротивление усилителя составляет 4 *ком*, уровень шумов, приведенных ко входу, равен 20 *мкв*, коэффициент усиления в необходимом интервале частот равен 50.



Фиг. 3

Амплитудная погрешность измерения определяется погрешностью аппаратуры (главную роль здесь играет температурная нестабильность), погрешностью образцового датчика, изменением чувствительности датчика в процессе эксплуатации и составляет ~6%. Погрешность определения временных интервалов зависит только от нестабильности развертки осциллографа и равна 3%.

Осциллограмма, полученная при измерении давления в стволе водомета, имеющего значения критериев подобия α=0.67 и β=4.04, и отношение P_{max}/P_y=16, приведена на фиг. 3 сплошной линией. Пунктирной линией здесь дана расчетная зависимость, представляющая собой решение системы (1.1) при условиях (1.2). Рассчитанное максимальное давление выстрела P_{max}=340 *мПа*, измеренное ниже на 14 *мПа*, что составляет ~5% P_{max}. Некоторое отличие процессов в начальной стадии обусловлено особенностью конструктивной схемы водомета. Водомет выполнен таким образом, что поршень разгоняется вместе с подвижным соплом и расположенной между ними водой, так что процесс начинается не с удара поршня по воде, а с остановки сопла, т. е. практически с удара воды по соплу.

Таким образом, экспериментально подтверждена допустимость квазистационарной постановки при расчете параметров выстрела импульсного водомета.

Поступила 7 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанов Г. А.* Расчет параметров выстрела импульсного водомета. В сб. «Гидромеханика», вып. 22. Киев, «Наукова думка», 1972.
2. *Атанов Г. А., Черников Г. А.* Об оптимальном импульсном водомете. Изв. вузов, Энергетика, 1973, № 1.
3. *Атанов Г. А.* Расчет выстрела импульсного водомета с учетом волновых процессов. Изв. вузов, Энергетика, 1975, № 3.
4. *Калер Р., Ройс Е.* Ударные волны в конденсированных средах. В сб. «Физика высоких плотностей энергий». М., «Мир», 1974.
5. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1963.

УДК 532.529

О ВОЛНОВОДНЫХ СВОЙСТВАХ ПОДВОДНОГО ГОРНОГО ХРЕБТА

В. М. БАБИЧ, И. Я. БИЛЫЙ

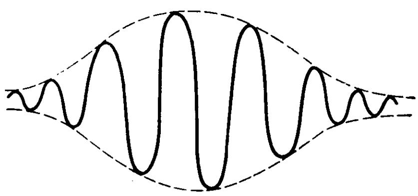
(Ленинград)

В 1957 г. М. А. Лаврентьев высказал предположение, что возвышение дна, которое условно будет далее называться горным хребтом, может служить волноводом для волн на поверхности воды. Это предположение было подтверждено экспериментально и теоретически обосновано в [1–3]. Здесь предлагается более простой вариант теории этого явления, основанный, с одной стороны, на работе [3], с другой – на теории слабонеоднородных волноводов [4–6]. Такое упрощение дает возможность продвинуться дальше в описании самого явления и провести, если потребуется, соответствующие расчеты, ибо все сводится к решению одномерных, легкодоступных современной вычислительной технике задач.

Будем исходить из известного уравнения для волн на мелкой воде

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right\} = 0 \tag{1}$$

Здесь $h=h(x, y)$ – глубина, $\eta(x, y, t)$ – возвышение свободной поверхности воды над равновесным уровнем, g – ускорение свободного падения. Скорость распространения волн, описываемых уравнением (1), равна $\sqrt{gh}$; таким образом, подводный горный хребет – это полоса с пониженной скоростью. Волноводные свойства таких полос хорошо известны, и для волн, бегущих вдоль подводного хребта, удается описать волновые пакеты. Здесь имеется в виду следующее. Распространение волны вдоль подводного хребта – нестационарный процесс. Чаще всего в результате того или иного воздействия возникает ограниченная группа волн (см. фигуру) с медленно меняющейся частотой и амплитудой (волны, модулированные по частоте и амплитуде) и весь этот волновой пакет с некоторой групповой скоростью распространяется по волноводу. Рассмотрение таких волновых пакетов естественнее с физической точки зрения, чем более традиционное рассмотрение установившихся волновых процессов, зависимость которых от времени описывается множителем $\exp(-i\omega t)$. Математическое описание процесса распространения волновых пакетов составляет предмет пространственно-временной геометрической оптики [7, 8]. Данную работу можно рассматривать как пример приложения этой теории.



Считаем, что горный хребет расположен вдоль оси x и глубина $h=h(\varepsilon x, y)$ вдоль этой оси медленно меняется; ε – малый параметр, характеризующий медленность изменения формы хребта. Предполагаем, что $h(\xi, -\infty)=h(\xi, +\infty)$, $h(\xi, y)>0$ при любом y и при $y\to\pm\infty$ глубина достаточно быстро стремится к своему предельному значению. Так что горный хребет может иметь довольно произвольную форму.

Процесс возбуждения волны здесь не рассматривается. Пусть волна, бегущая над хребтом, сформировалась, и $\eta(x, y, t)$ имеет вид

$$\eta \sim \operatorname{Re}\left\{\exp\left(i\frac{\psi(\xi,\tau)}{\varepsilon}\right)\sum_{j=0}^{\infty} u_j(\xi, y, \tau)(i\varepsilon)^j\right\}, \qquad \xi=\varepsilon x, \qquad \tau=\varepsilon t \tag{2}$$

Вид решения (2) аналогичен пространственно-временным разложениям [6–9], где ξ и τ медленные переменные.

Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε, получаем уравнения для u_j. В частности, для старшего члена разложения имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h(\xi, y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - k^2h(\xi, y)u_0 = -\frac{\omega^2}{g}u_0 \tag{3}$$

$$k = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad \omega = \frac{\partial\psi}{\partial\tau}$$

Так как рассматривается волна, сосредоточенная в окрестности хребта, то ограничиваемся такими $u_0(\xi, y, \tau)$, для которых выполняется

$$u_0|_{y=\pm\infty}=0 \tag{4}$$

Сформулированная задача (3), (4) является задачей на собственные функции. Будем считать, что мгновенная частота ω играет роль собственного числа. Таким образом, по заданному k находим $\omega=\omega(k, \xi)$, которое всегда существует. Может оказаться, что одному k соответствует несколько $\omega(k, \xi)$. Тогда рассмотрим одну $\omega(k, \xi)$ из этого набора. Соответствующую собственную функцию запишем в виде

$$u_0(\xi, y, \tau)=c_0(\xi, \tau)V(\xi, k, y) \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^2(\xi, k, y)\,dy = 1 \tag{6}$$

Существование для любого $k>0$ гладко зависящей от ξ и k мгновенной частоты $\omega(k, \xi)$ и сходимость интеграла (6) при выполнении (4) требуют обоснования. Это обоснование можно провести, используя асимптотику на бесконечности решения уравнения (3) и вариационные соображения, аналогичные тем, которые приведены в [3].

Для нахождения функции ψ имеем следующее дисперсионное уравнение

$$\omega=\omega(k, \xi), \qquad \partial\psi/\partial\tau=\omega(-\partial\psi/\partial\xi, \xi) \tag{7}$$

с начальным условием

$$\psi|_{\tau=0}=\psi_0(\xi) \tag{8}$$

Задача Коши (7), (8) решается методом характеристик, уравнения которых имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\partial\omega(\xi, k)}{\partial k}, \qquad \frac{d\psi}{d\tau}=\omega-k\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, \qquad \frac{dk}{d\tau}=\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, \qquad \frac{d\omega}{d\tau}=0 \tag{9}$$

В соответствии с установившейся терминологией, (см. [7–9]) характеристики уравнения (7) называем пространственно-временными лучами. Начальные условия для уравнений (9) определяются из (8). Производная $d\xi/d\tau=\partial\omega/\partial k$ будет групповой скоростью рассматриваемого волнового процесса. Найдем ее выражение из уравнения (3). Сначала умножим (3) на $-\partial V/\partial k$ и проинтегрируем обе части равенства от $-\infty$ до $+\infty$. Потом продифференцируем (3) по k, умножим на V и проинтегрируем обе части равенства от $-\infty$ до $+\infty$. Вычтем из первого равенства второе и получим

$$v=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{gk}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, k)V^2\,dy \tag{10}$$

Определение следующего члена разложения в (2) приводит к задаче

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)-k^2hu_1+\frac{\omega^2}{g}u_1= \tag{11}$$

$$=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\tau}u_0+2\omega\frac{\partial u_0}{\partial\tau}\right)+2hk\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+u_0\frac{\partial}{\partial\xi}(hk)$$

$$u_1(-\infty)=u_1(+\infty)=0$$

Это задача типа Штурма – Лиувилля на промежутке $(-\infty, +\infty)$ для функции u_1, причем соответствующая однородная задача (3), (4) имеет нетривиальное решение V. Такая задача, вообще говоря, неразрешима. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы правая часть (11) была ортогональна V. Чтобы доказать необходимость, достаточно умножить обе части (11) на V и проинтегрировать от $-\infty$ до $+\infty$ по y. Поскольку интеграл слева обращается в нуль, получено уравнение для определения неизвестной функции c_0, которое естественно назвать уравнением переноса

$$\frac{\omega}{g}\frac{\partial c_0^2}{\partial\tau}+k\int_{-\infty}^{+\infty}V^2h\,dy\frac{\partial c_0^2}{\partial\xi}+c_0^2\left[\frac{1}{g}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(k\int_{-\infty}^{+\infty}hV^2\,dy\right)\right]=0 \tag{12}$$

Соотношение (12) является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль пространственно-временного луча (см. уравнения (9)) и легко интегрируется. Объединяя первый и второй члены уравнения (12) и преобразуя третий, получим

$$\frac{\omega}{g}\frac{dc_0^2}{d\tau}+\frac{1}{J}\frac{\omega}{g}c_0^2\frac{dJ}{d\tau}=0, \qquad J=\frac{\partial\xi}{\partial\xi_0}, \qquad \xi_0=\xi|_{\tau=0} \tag{13}$$

Из (13) получаем, что вдоль пространственно-временного луча

(14) $c_0 = A(\xi_0) J^{-1/2}$

Здесь $A(\xi_0)$ зависит от точки выхода луча и определяется начальным возмущением

$$c_0(\xi, \tau)|_{\tau=0} = A(\xi)$$

Аналогично строятся и дальнейшие приближения. В заключение заметим, что и дисперсионное уравнение (3), и уравнение переноса (12) с меньшим количеством выкладок можно было бы получить с помощью усредненного вариационного принципа Уизема (см. [7, 8]).

Действительно, уравнение (1) можно записать в виде

$$\delta \int L\, dx\, dy\, dt = 0 \tag{15}$$

$$L = \frac{1}{2}\left[gh\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + gh\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\right]$$

Подставим в L главный член разложения (2), который имеет вид $u_0(\xi, \tau, y)\cos\theta$, где $\theta = \psi(\xi, \tau)\varepsilon^{-1}$, и найдем главную часть L_0

$$L_0 = \frac{1}{2}\left[ghu_0^2k^2\sin^2\theta + gh\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta - u_0^2\omega^2\sin^2\theta\right]$$

$$\langle L_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_0\, d\theta = \frac{1}{4}\left[ghu_0^2k^2 + gh\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 - u_0^2\omega^2\right]$$

Усредненный вариационный принцип состоит в том, что должна обращаться в нуль вариация

$$\delta \int \langle L_0\rangle dx\, dy\, dt$$

Варьирование по u_0 и ψ приводит соответственно к дисперсионному соотношению $\omega = \omega(k, \xi)$ (см. (7)) и к энергетическому соотношению, эквивалентному равенствам (12) и (14).

Поступила 18 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
2. *Сунь Цао.* О волноводе поверхностных волн тяжелой жидкости. Изв. СО АН СССР, 1959, № 5.
3. *Гарипов Р. М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 3.
4. *Покровский В. Л., Улинич Ф. Р., Саввиных С. К.* К теории волноводов переменного сечения. Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, № 2.
5. *Бабич В. М., Чихачев Б. А.* Распространение волн Лява и Рэлея в слабонеоднородной слоистой среде. Вестн. ЛГУ, 1975, № 1, Матем., механ., астрон., вып. 1.
6. *Woodhouse J. H.* Surface waves in a laterally varying layered structure. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, vol. 37, No. 3.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
8. *Островский Л. А.* Приближенные методы в теории нелинейных волн. Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
9. *Волосов В. М.* Нелинейные волны в неоднородных средах. В сб.: «Колебания нелинейных систем», Киев, 1976.