

## ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

Н. Ф. ВЕЛЬТИЦЕВ, А. А. ЖЕЛНИН

(Москва)

Излагаются результаты численного моделирования конвективных течений в потоках Куэтта и Пуазейля при стационарной ( $\partial T^*/\partial t = 0$ ) и при равномерно возрастающей со временем ( $\partial T^*/\partial t = \eta = \text{const}$ ) средней температурах конвективного слоя. Численные эксперименты проведены для воздуха (число Прандтля  $Pr = 0.7$ ) в интервале чисел Рэлея  $2000 \leq Ra \leq 44\,000$ . Полученные данные подтвердили вывод предшествующих работ о том, что при слегка сверхкритических значениях  $Ra$  доминирующей формой конвекции являются валики с геликальной системой циркуляции. Валики ориентируются по направлению потока и являются стационарными образованиями.

При достижении некоторого значения  $Ra$ , зависящего от характера вертикального распределения температуры и скорости, валиковая структура течений деформируется поперечными возмущениями. Все рассмотренные виды потоков оказывают стабилизирующее влияние на поперечные моды: они возникают при больших числах Рэлея, чем это имеет место при конвекции в покоящейся жидкости. Возмущения перемещаются с фазовой скоростью, близкой к средней скорости невозмущенного потока. В рассмотренном диапазоне чисел Рэлея поток со сдвигом не оказывает существенного влияния на перенос тепла, хотя заметна некоторая тенденция к увеличению числа Нуссельта под действием потока со сдвигом.

Конвекция в потоке со сдвигом изучалась не столь интенсивно, как конвекция в слое покоящейся жидкости, но тем не менее к настоящему времени выполнено много как экспериментальных, так и теоретических работ, позволивших понять основные закономерности взаимодействия конвективных пульсаций с крупномасштабным потоком. Наиболее подробно изучена конвекция в плоскопараллельных потоках при небольших сверхкритических числах Рэлея.

В рамках линейной теории [1-4] было показано, что при небольших сверхкритических числах Рэлея валики, ориентирующиеся по направлению потока, являются единственно устойчивой формой конвекции, что подтверждается многочисленными лабораторными экспериментами. Линейной теорией предсказывается также, что при достижении некоторых значений  $Ra$  и  $Re$  могут появиться также периодические возмущения в плоскости потока. Кривые краевой неустойчивости для таких возмущений в потоке Куэтта были получены, в частности, в работах [2, 3].

Конвективные течения в потоке Пуазейля исследовались в рамках линейной теории в [5, 6]. В первой из цитируемых работ отмечалось, что в потоке Пуазейля может реализоваться неустойчивость Толмина - Шлихтинга. Авторами были получены кривые нейтральной неустойчивости волн Толмина - Шлихтинга, как функции  $Ra$  и  $Re$ . В работе [6] рассматривалась неустойчивость поперечных мод с различной длиной волны и были получены данные о зависимости фазовой скорости возмущений от их горизонтальных размеров.

Эксперименты по численному моделированию двумерных конвективных течений в потоке Куэтта [7] подтвердили стабилизирующую роль потока со сдвигом на конвективные течения. Автором были получены результаты, свидетельствующие о том, что под действием потока со сдвигом убывают потоки тепла через конвективный слой.

Первые результаты по моделированию трехмерных конвективных течений в потоке со сдвигом при слегка сверхкритических числах Рэлея были получены в [8]. В данной работе обсуждаются результаты численного моделирования конвективных движений в потоках Куэтта и Пуазейля в интервале чисел Рэлея  $2000 \leq Ra \leq 44\,000$  и проведены сравнения результатов расчетов с данными, полученными при моделировании трехмерных конвективных течений в покоящемся слое жидкости.

**1. Исходная система уравнений и метод решения.** Предполагается, что жидкость (без учета силы плавучести) характеризуется средней плотностью  $\rho^*$ . Коэффициенты температурного расширения  $\alpha$ , вязкости  $\nu$  и теплопроводности  $\kappa$  считаются постоянными. Рассматривается бесконечный по горизонтали слой жидкости, ограниченный сверху и снизу идеально проводящими тепло горизонтальными границами. В слое поддерживается постоянная разница температур  $\Delta T$ . В кондуктивном состоянии температурный профиль задается в виде

$$(1.1) \quad T_s - T_r = -\Delta T h^{-1} z + 1/2 \eta \kappa^{-1} (z^2 - 1/4 h^2)$$

где  $T_s$  — статическая температура,  $z$  — вертикальная координата,  $t$  — время,  $h$  — толщина конвективного слоя,  $T_r = \eta t$ ,  $\eta = \partial T^* / \partial t = \text{const}$ .

Такое задание температуры предполагает, что в каждой точке жидкости температура изменяется с той же скоростью, что и на границах, и температурный профиль остается постоянным.

Предполагается, что основной поток зависит только от высоты и имеет вид

$$(1.2) \quad u^* = 1/2 (\nu \rho)^{-1} (\partial p^* / \partial x) z^2 + Az + B$$

где  $u^*$  — компонент основного потока вдоль оси  $x$ , градиент давления  $\partial p^* / \partial x = \text{const}$ ,  $A$ ,  $B$  — постоянные интегрирования. Формула (1.2) дает общую форму записи потока Пуазейля. Выбор конкретного профиля основного потока осуществляется варьированием констант. В частном случае  $\partial p^* / \partial x = 0$  профиль скорости линейный (поток Куэтта).

К исходной системе уравнений применяются упрощения Буссинеска, после чего она записывается в безразмерном виде с использованием масштабов: длины  $h$ , скорости  $\nu h^{-1}$ , температуры  $\Delta T$ , времени  $h^2 \nu^{-1}$  и давления  $\rho^* \nu^2 h^{-2}$ . Такой подход к масштабированию является менее традиционным при моделировании конвекции в потоке со сдвигом, однако он обладает тем преимуществом, что позволяет моделировать процессы конвекции как в потоке со сдвигом, так и в состоянии покоя с помощью одной и той же системы безразмерных уравнений путем включения или исключения соответствующих членов.

С учетом формы задания основного потока (1.1), (1.2) безразмерная система уравнений приобретает следующий вид:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u - R_1 \frac{\partial u}{\partial x} - R_2 w \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2 v - R_1 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 w - R_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \text{Ra Pr}^{-1} T \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{dT}{dt} = w - Nzw + \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T - R_1 \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\text{Ra} = g \alpha \Delta T h^3 \kappa^{-1} \nu^{-1}, \quad R_1 = u^* h \nu^{-1}, \quad R_2 = h^2 \nu^{-1} \frac{\partial u^*}{\partial z},$$

$$N = \eta h^2 \kappa^{-1} \Delta T^{-1}$$

Здесь все переменные — возмущения в крупномасштабном потоке,  $\text{Ra}$  — число Рэлея,  $\text{Pr} = \nu \kappa^{-1}$  — число Прандтля,  $R_1$  и  $R_2$  — числа Рейнольдса,  $N$  — безразмерный параметр, характеризующий нестационарность среднего поля температуры.

Система (1.3) решается при следующих граничных условиях:

$$(1.4) \quad z = \pm 1/2, \quad u = v = w = T = 0$$

На боковых границах используются условия периодичности всех функций. В начальный момент конвективные движения отсутствуют, а для их возбуждения задается произвольное температурное возмущение  $T = T(x, y)$ . Горизонтальный размер области вдоль оси  $X$   $L_x = 2.34 h$ , а вдоль оси  $Y$   $L_y = 4.032 h$ . Для численного решения системы (1.3), (1.4) использовался метод, близкий к методу Чорина [9]. Расчеты проводились в основном на сетке  $25 \times 25 \times 9$  узлов по осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно.

Таблица 1

	$Ra \cdot 10^{-3}$	$R_1$	$R_2$	$N$		$Ra \cdot 10^{-3}$	$R_1$	$R_2$	$N$
$C_1$	2÷44	0÷60	60	0	$P_2$	4÷42	0÷75	-60÷180	0
$C_2$	2÷34	0÷100	100	0	$P_3$	2÷42	0÷60	30÷90	0
$C_3$	4÷20	0÷200	200	0	$C_4$	2÷10	0÷60	60	10÷15
$P_1$	2÷38	0÷40	-120÷+120	0	$P_4$	2÷6	0÷40	-120÷120	10÷13

Детали численного метода описаны в работах [8, 10]. В каждом численном эксперименте фиксировались значения всех безразмерных параметров, кроме  $Ra$ . Интегрирование начиналось с начальных условий при заданном  $Ra_0$  и продолжалось до тех пор, пока не достигалось состояния установления. Течение при  $Ra_0$  использовалось в качестве начального условия для расчетов при  $Ra_1 = Ra_0 + \Delta Ra$ . Значения  $\Delta Ra$  составляли в большинстве экспериментов 2000. Расчеты проводились только до  $Ra \leq 46\,000$ , так как при больших значениях  $Ra$  толщина температурных пограничных слоев становится мало надежными с шагом сетки и результаты расчетов становятся мало надежными с точки зрения правильного количественного описания движений.

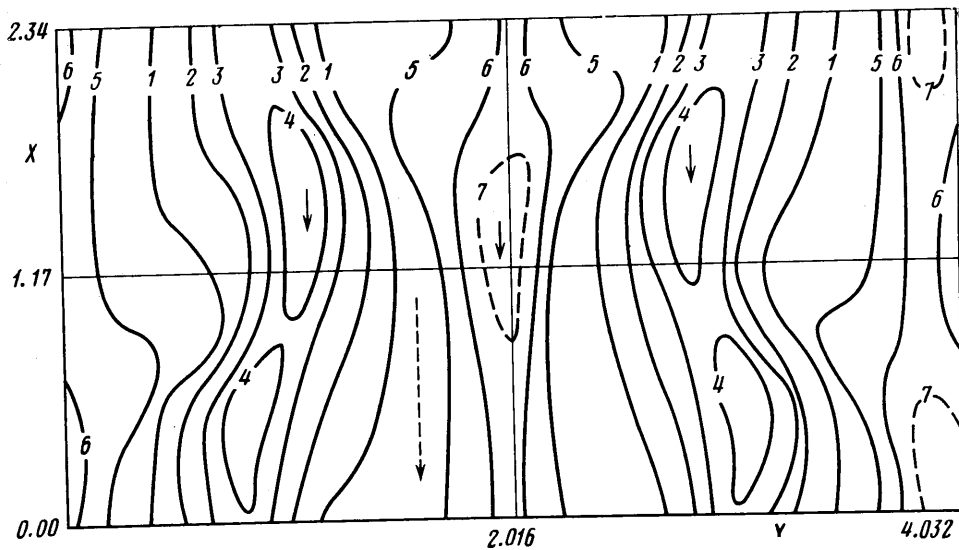
**2. Результаты расчетов.** Перечень проведенных численных экспериментов дается в табл. 1. В первых шести экспериментах предполагалось оценить влияние на конвективные движения различных форм плоскопараллельного потока при линейном профиле температуры, в седьмом и восьмом экспериментах — эффекты нелинейного температурного профиля. В дальнейшем для простоты изложения будут делаться ссылки на сокращенное название численного эксперимента в табл. 1.

В экспериментах ( $C_1$ — $C_4$ ) исследовалось взаимодействие конвективных течений с потоком Куэтта, в экспериментах ( $P_1$ — $P_4$ ) — с потоком Пуазейля.

**Линейный профиль температуры ( $N=0$ ).** При слегка сверхкритическом  $Ra$  ( $Ra=2000$ ) во всех экспериментах, за исключением  $C_4$  и  $P_4$ , независимо от профиля основного потока конвективные течения приобретали форму валиков с геликальной системой циркуляции. Валики имели горизонтальный размер  $L_y = 2.016 h$  и ориентировались по направлению набегающего потока. В потоке Куэтта  $C_1$  и потоке Пуазейля  $P_3$  эта структура течений сохранилась до  $Ra=44\,000$  и  $38\,000$ , при которых эксперименты были прекращены по причинам, указанным выше. В потоке  $P_1$  слабая бимодальность движений появляется при  $Ra=36\,000$  и прогрессивно растет на интервале  $36\,000 \leq Ra \leq 44\,000$ . Длина волны поперечных возмущений  $L_x = 2.34 h$ . Результирующие трехмерные конвективные возмущения движутся в направлении основного потока с фазовой скоростью  $c=18.1$  (что равно почти половине максимума невозмущенной скорости в середине слоя).

В потоке  $P_2$  деформация регулярных продольных валов происходит при  $Ra=28\,000$ . Система движущихся волн с длиной волны  $L_x = 2.34 h$

существует в диапазоне  $30\,000 \leq Ra \leq 40\,000$ . Этот тип движений изображен на фиг. 1. Здесь в горизонтальном сечении области счета на уровне  $z=0.375$  проведены изолинии вертикальной скорости (цифры на линиях соответствуют следующим безразмерным величинам скорости: 1—0, 2—5, 3—10, 4—15, 5—20, 6—25, 7—30), сплошными стрелками указан вектор фазовой скорости возмущений, пунктирной стрелкой — максимальная скорость невозмущенного потока. Фазовая скорость ( $c=12.4$ ) не изменяется с ростом  $Ra$  и составляет только 17%  $Ra_1^{\max}=75$ . Волны появляются первоначально вблизи границ и имеют там большую амплитуду, чем в середине слоя. Заметим, что в покоящейся среде полностью развитые трехмерные конвективные течения появляются при  $Ra=26\,000$ .



Фиг. 1

Таким образом все рассмотренные виды потоков подавляют поперечные возмущения, но их стабилизирующее влияние различно в разных потоках. Наибольшим стабилизирующим эффектом обладает поток Куэтта. Данные о переходе к трехмерной плановой форме течений хорошо согласуются с результатами лабораторных экспериментов [11]. Следует отметить также, что как в численных, так и в лабораторных экспериментах поперечные моды конечной амплитуды появляются при  $Ra$ , больших, чем это предсказывалось линейной теорией для бесконечно малых возмущений.

Результаты вычислений числа Нуссельта  $Nu$  в проведенных экспериментах представлены в табл. 2, где все величины определены при  $Pr=0.7$ .

Для сравнения в таблице были приведены данные других авторов (цифрой 2 в последней колонке таблицы отмечены экспериментальные данные). Отметим, что в [12] при следующих значениях основных параметров течения:  $Pr=9.35$ ,  $R_2=33.4$  и  $Ra=5 \cdot 10^3$  — для числа Нуссельта было получено  $Nu=2.0$ . В настоящее время еще не существует общего мнения о влиянии течения со сдвигом на поток тепла в конвективном слое. Численное моделирование двумерных конвективных движений [7] показало, что течение Куэтта ослабляет поток тепла через конвективный слой. Лабораторные эксперименты дают противоречивые результаты. Например, в [12] наблюдалось небольшое увеличение  $Nu$  в течении со сдви-

гом, а в [13] показано, что течение со сдвигом уменьшает  $Nu$ . Настоящее трехмерное численное моделирование (см. табл. 2) показывает, что течение со сдвигом несколько увеличивает число Нуссельта. Из сравнения экспериментов  $C_1-C_3$  видно, что увеличение сдвига ведет к росту  $Nu$ . Отметим, что различия чисел  $Nu$  в экспериментах без сдвига и со сдвигом растут с ростом  $Ra$  там, где конвективные течения в отсутствие сдвига полностью двумерны (до  $Ra=25\ 000$ ). После перехода в этом эксперименте к трехмерной структуре течений различие чисел  $Nu$  во всех экспериментах заметно уменьшается.

Эти различия в потоках тепла становятся более понятными, если рассмотреть их совместно с расчетами кинетической энергии  $E$  конвективных движений. Естественно, что в связи с передачей кинетической энергии

Таблица 2

$Ra \cdot 10^{-3}$	Покоящаяся жидкость	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$R_2=160$ [°]	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$R_2=513$ [14]	$R_2=513$ [15]	
										1	2
5	2.03	2.14	2.14	2.16	--	2.12	2.15	2.12	2.10	1.95	--
8	2.40	2.48	2.52	2.56	--	2.49	2.53	2.45	2.49	2.10	1.90
10	2.53	2.63	2.69	2.72	2.70	2.64	2.70	2.64	--	2.15	2.00
12	2.64	2.79	2.82	2.86	--	2.76	2.83	2.76	2.76	2.25	--
15	2.75	2.93	2.97	3.02	--	2.90	2.98	2.90	--	2.30	--
20	2.89	3.10	3.14	3.21	3.10	3.07	3.16	3.07	--	--	--
25	2.98	3.22	3.27	--	--	3.18	3.29	3.18	--	--	--
30	3.16	3.31	3.36	--	3.71	3.26	3.38	3.26	--	--	--
35	3.33	3.37	--	--	--	3.32	3.45	3.33	--	--	--
40	3.37	3.42	--	--	4.02	--	--	3.38	--	--	--

основного потока конвективным пульсациям их энергия возрастает по сравнению с энергией конвективных движений в покоящемся слое жидкости. Большая ее часть расходуется на образование продольного компонента скорости конвективных течений, но некоторая часть при этом идет на интенсификацию переноса тепла через конвективный слой. Данные расчетов показывают, что различия в потоках тепла, обсуждавшиеся выше, как и различия в кинетической энергии  $E$ , в течениях со сдвигом и без него ведут себя совершенно аналогично с изменением  $Ra$ : они растут до тех пор, пока конвекция в покоящемся слое носит двумерный характер, а затем убывают. Таким образом, существует определенная пропорциональность между различиями в  $E$  и  $Nu$ , и некоторое увеличение переноса тепла в потоке со сдвигом представляется в этой связи вполне закономерным.

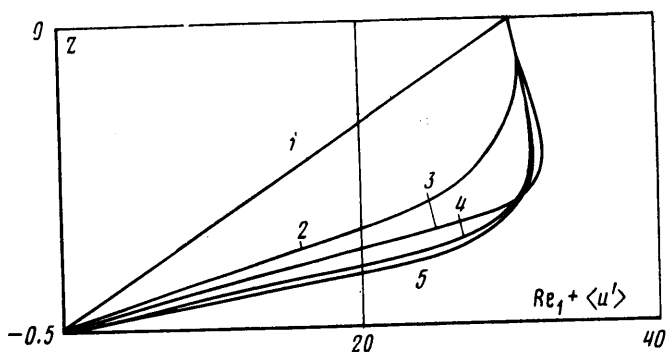
Профили результирующей скорости ( $u^* + \langle u' \rangle$ ), осредненные по горизонтальному периоду (где  $u'$  — конвективная скорость вдоль оси  $X$ ), для потоков Куэтта ( $C_1$ ) и Пуазейля ( $P_1$ ) представлены на фиг. 2 и 3 соответственно (цифры на фигурах соответствуют результатам расчетов при различных значениях числа Рэлея: 1 —  $Ra < Ra_*$ , 2 —  $Ra = 10\ 000$ , 3 —  $Ra = 20\ 000$ , 4 —  $Ra = 32\ 000$ ). В силу симметрии относительно линии  $z=0$  на фиг. 3 и относительно точки  $z=0$ , ( $Re_1 + \langle u' \rangle = 30$  на фиг. 2 изображена лишь нижняя половина области течения. Во всех рассмотренных потоках вблизи жестких границ образуются пограничные слои с большими градиентами скорости, а в центральной части слоя скорость незначительно изменяется с высотой. Подобно тому как профиль результирующей температуры определяется выполнением условия  $Nu = \text{const}$  во всем слое (условие стационарности конвективного процесса), профиль результирующей скорости должен удовлетворять условию постоянства переноса мо-

мента количества движения в слое ( $M = \text{const}$ ). В принятой системе безразмерных координат запишем

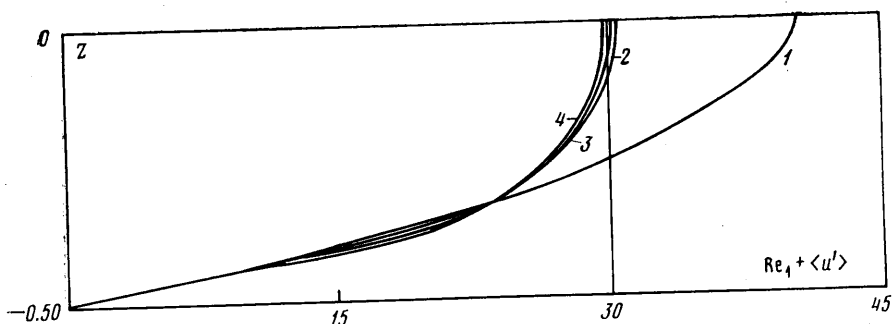
$$(2.1) \quad M = 1 + [\partial \langle u' \rangle / \partial z - \langle w' u' \rangle] R_2^{-1}$$

Здесь угловыми скобками обозначено осреднение по периоду.

При отсутствии конвекции  $M = 1$ . В выражении (2.1) появляется неопределенность при  $R_2 = 0$ , поэтому расчеты в потоке Пуазейля проводились таким образом, чтобы эти особые точки не участвовали в вычислениях. Результаты показали, что в установившемся течении условие  $M = \text{const}$  соблюдается с точностью до нескольких процентов в потоке Куэт-



Фиг. 2

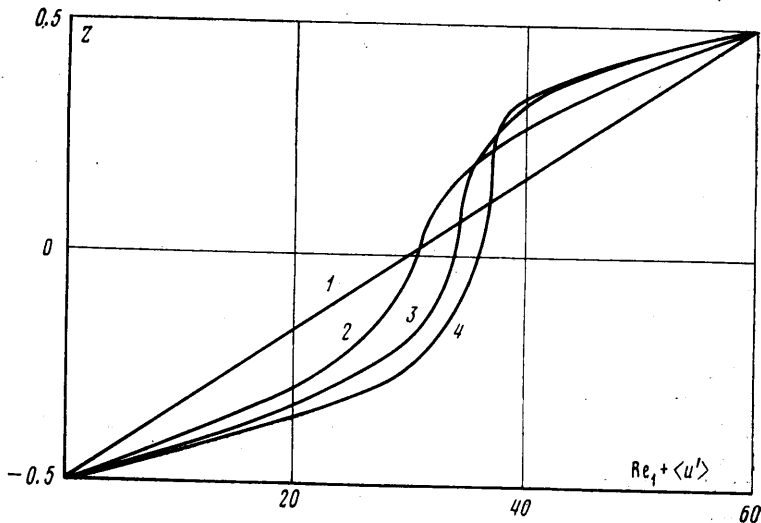


Фиг. 3

та и с точностью до 8–10% при больших  $Ra$  в потоке Пуазейля. Таким образом, после потери устойчивости в потоке со сдвигом реализуется система конвективных течений, обеспечивающая одновременное выполнение двух фундаментальных условий:  $Nu = \text{const}$  и  $M = \text{const}$ . Это условие выполняется строго лишь для стационарного режима конвекции, хотя, по видимому, не лишено смысла и для осциллирующего режима, если под  $Nu$  и  $M$  подразумевать их значения, осредненные по временному периоду.

**Нелинейный профиль температуры ( $N \neq 0$ ).** В работах [16, 17] было показано, что нелинейность вертикального распределения невозмущенного поля температуры оказывает очень существенное влияние на структуру конвективных течений в первоначально покоящемся слое жидкости: переходы от двумерной структуры к трехмерной происходят при меньших  $Ra$ , чем это имеет место при линейном профиле температуры, а вместо шахматной в плане формы течений образуются квазিশестиугольные ячейки, причем при нагревании конвективного слоя ( $N > 0$ ) образуются ячейки с нисходящими движениями в центре, а при  $N < 0$  — ячейки с восходящими движениями в центре.

Численные эксперименты по моделированию конвективных течений в потоке Куэтта и Пуазейля при  $N > 0$  показали, что все основные закономерности, отмеченные для случая покоящейся жидкости, сохраняются и при моделировании конвекции в потоке со сдвигом, хотя детали в структуре течений, естественно, меняются. При линейном профиле скорости (эксперимент  $C_4$  в табл. 1) и  $Ra = 2000$  устанавливается валиковая форма конвекции с геликальной системой циркуляции, однако в отличие от случая с линейным профилем температуры площадь, занятая восходящими течениями  $S^+$ , становится несколько меньше площади, занятой нисходя-



Фиг. 4

щими течениями  $S^-$ :  $S^+ \approx 5S^- / 7$ . Напротив, интенсивность восходящих течений  $w^+$  в 2 раза больше интенсивности нисходящих:  $|w_{\max}^+| \approx 2|w_{\max}^-|$ . При  $Ra = 4000$   $S^+ \approx S^- / 2$ ,  $|w_{\max}^+| \approx 3|w_{\max}^-|$ , а при  $Ra = 6000$   $S^+ \approx S^- / 3$ ,  $|w_{\max}^+| \approx 4|w_{\max}^-|$ .

При  $Ra = 8000$  происходит переход от валиковой к ячейковой структуре течений почти во всем конвективном слое (только вблизи верхней границы течения носят бимодальный характер). Ячейки с нисходящими движениями в центре перемещаются с фазовой скоростью  $c = 27.6$ , что практически совпадает со средней скоростью невозмущенного потока ( $\langle R_1 \rangle = 30$ ). В отличие от конвекции в покоящейся жидкости сохраняется лишь осевая симметрия конвективных течений относительно оси, совпадающей с направлением крупномасштабного потока. В связи с параболичностью невозмущенного профиля температуры и возникающей вследствие этого асимметрией конвективных течений относительно середины слоя образуется асимметрия и в вертикальном распределении результирующей скорости (см. фиг. 4, где цифрами обозначены результаты расчетов при различных значениях числа Рэлея: 1 —  $Ra < Ra_*$ , 2 —  $Ra = 2000$ , 3 —  $Ra = 6000$ , 4 —  $Ra = 10\,000$ ), приводящая к появлению больших скоростей в центральной части слоя, чем это имеет место при линейном профиле температуры.

В потоке Пуазейля ( $P_4$ ) при  $Ra = 2000$  и  $4000$  структура течений была аналогичной описанной выше для потока Куэтта. Переход от валиковой структуры течений к ячейковой произошел при  $Ra = 6000$ . Однако в отличие от потока Куэтта движения носят осциллирующий характер. Пове-

дение движений в этом режиме изучалось на достаточно большом отрезке времени ( $\Delta t \approx 10$ ). Оказалось, что экстремальные значения  $Nu$  и  $E$  в пределах каждого из 14 рассматриваемых периодов совпадают с точностью до 0.01%, т. е. движения являются полностью периодическими. В горизонтальной плоскости замкнутые конвективные ячейки чередуются с валиковой формой течений. Замкнутые конвективные ячейки возникают попеременно в соседних валиковых системах, и полное совпадение систем течений происходит с периодом  $\tau = 1.4118$ .

В связи с периодичностью движений в данном случае нельзя употреблять термин «фазовая скорость» в обычном его понимании, однако следует отметить, что на участках, близких к экстремальным значениям  $Nu$  и  $E$ , когда структура течений со временем изменяется незначительно, можно достаточно точно оценить скорость трансляции возмущений крупномасштабным потоком. Расчеты показали, что «фазовая скорость» возмущений сохраняется одинаковой на всех уровнях и равна средней скорости невозмущенного потока.

Необходимо отметить также, что переход от валиковой к ячейковой структуре течений происходит (при одинаковых значениях  $N$ ) практически при тех же значениях  $Ra$ , что и при отсутствии крупномасштабного потока. Таким образом, нелинейность профиля температуры оказывает решающее влияние на переходы в структуре конвективных течений.

Экспериментов с  $N < 0$  (охлаждение со временем конвективного слоя) для конвекции в потоке со сдвигом не проводилось, однако, учитывая полную антисимметричность течений для  $N > 0$  и  $N < 0$  в случае покоящейся жидкости, можно предсказать, что для тех же абсолютных значений  $N$  переходы от валиковой структуры течений к ячейковой произойдут при тех же  $Ra$ , что и в случае  $N > 0$ , однако при этом образуются ячейки с восходящими движениями в центре.

Авторы благодарят Н. М. Сазанович и Л. И. Деревич за помощь в проведении вычислений.

Поступила 13 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kuo H. L. Perturbations of plane Couette flow in stratified fluid and origin of cloud streets. *Phys. Fluids*, 1963, vol. 6, No. 2.
2. Deardorff J. W. Gravitational instability between horizontal plates with shear. *Phys. Fluids*, 1965, vol. 8, No. 6.
3. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow with a temperature gradient. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.*, 1965, vol. 286, No. 140, 4.
4. Трубников Б. Н. Некоторые вопросы теории свободной (ячейковой) и вынужденной конвекции. Тр. Центр. аэрол. обсерв., 1967, вып. 75.
5. Gage K. S., Reid W. H. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 33, pt 1.
6. Asai T. Stability of plane parallel flow with variable vertical shear and unstable stratification. *J. Meteorol. Soc. Japan*, Ser. 2, 1970, vol. 48, No. 2.
7. Lipps F. B. Two — dimensional numerical experiments in thermal convection with vertical shear. *J. Atmos. Sci.*, 1971, vol. 28, No. 1.
8. Желнин А. А. Некоторые результаты численного моделирования конвекции в неустойчиво стратифицированном потоке со сдвигом. Тр. Гидрометцентра СССР, 1974, вып. 148.
9. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier — Stokes equations. *Math. Computations*, 1968, vol. 22, No. 104.
10. Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А. Численная модель конвекции в потоке с вертикальным сдвигом. Тр. Гидрометцентра СССР, 1973, вып. 110.
11. Kamotani Y., Ostrach S. Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow. *Trans. ASME., Ser. C., J. Heat. Transfer*, 1976, vol. 98, No 1.



12. *Ingersoll A. P.* Convective instabilities in plane Couette flow. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, No. 4.
  13. *Ingersoll A. P.* Thermal convection with shear at high Rayleigh number. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 25, pt. 2.
  14. *Ogura Y., Yagihashi A.* A numerical study of convection rolls in a flow between horizontal parallel plates. *J. Meteorol. Soc. Japan, Ser. 2*, 1969, vol. 47, No. 3.
  15. *Mori Y., Uchida Y.* Forced convective heat transfer between horizontal flat plates. *Intern. J. Heat Mass Transfer*, 1966, vol. 9, No. 8.
  16. *Veltishchev N. F., Zelnin A. A.* Numerical simulation of cellular convection in air. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, pt. 2.
  17. *Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А.* Мезомасштабная конвекция в нагреваемом и охлаждаемом конвективном слое. *Тр. Научн.-исслед. центра изуч. природных ресурсов*, 1976, вып. 1.
-