МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1979

УДК 532.51.013.4

О РАЗВИТИИ ДВУМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ, И. С. ШИКИНА

(Москва)

Изучается асимптотическое поведение при больших временах первоначально локализованных двумерных малых возмущений границы раздела двух жидкостей при наличии тангенциального разрыва скорости с учетом поверхностного натяжения. Развитие одномерных возмущений рассматривалось ранее в [1]. Найдено асимптотическое поведение возмущенной области, т. е. в пространстве xyt указан конус с вершиной в начале координат, такой что вдоль лучей, проходящих внутри него, возмущения стремятся к бесконечности с ростом t, а вдоль остальных лучей возмущения стремятся к нулю. Указаны условия, при которых неустойчивость тангенциального разрыва не будет абсолютной, т. е. при их выполнении течения с тангенциальным разрывом скорости могут осуществляться. Эти условия, так же как и форма упомянутого выше конуса, не зависят от величины поверхностного натяжения.

1. В линейной постановке общее решение задачи о поведении малых возмущений стационарного, не зависящего от координат x, y течения или состояния можно представить в виде

$$u(x,y,z,t)=\sum_j\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} A_j(z,k_x,k_y)\,e^{i(k_xx+k_yy)-i\omega_j(\mathbf{k})t}dk_xdk_y$$

где k_x, k_y — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$; $\omega_j(\mathbf{k})$ — j-я ветвь аналитической функции $\omega=\omega(\mathbf{k})$, определяемой дисперсионным уравнением. Под $u(x, y, z, t)$ понимается возмущение любой из величин, описывающих течение.

Для изучения поведения возмущений при $t\to\infty$ вдоль всевозможных лучей $x=x_0+w_xt$, $y=y_0+w_yt$ удобно перейти к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{w}$ с компонентами w_x, w_y

$$x'=x-w_xt,\quad y'=y-w_yt,\quad k'=k,\quad \omega'=\omega-w_xk_x-w_yk_y$$

Асимптотическое поведение возмущений для фиксированных x', y' при $t\to\infty$ определяется асимптотикой интегралов вида

$$u(x',y',t)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(k_x,k_y)\,e^{i(k_xx'+k_yy')-i\omega'(\mathbf{k})t}dk_xdk_y$$

По методу перевала [2] при $t\to\infty$ величина u по порядку величины оценивается следующим образом:

$$u\sim\frac{u(k_{xs},k_{ys})}{t\sqrt{\Delta}}\exp(t\,\mathrm{Im}\,\omega_s') \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{Im}\,\omega_s'\equiv\mathrm{Im}\,\omega'(k_{xs}, k_{ys})$ вычисляется в седловых точках k_{xs}, k_{ys}, через которые проводятся пути интегрирования на комплексных плоскостях k_x, k_y.

Оценка (1.1) имеет место, если $u(k_{x*}, k_{y*})\neq 0$ и $\Delta=\det\|\partial^2\omega'/\partial k_i\partial k_j\|\neq 0$. Если эти условия не выполнены, то для оценки u необходимо пользоваться следующим членом асимптотического разложения, имеющим вид $t^{-2/3}\exp(t\,\mathrm{Im}\,\omega_*')$.

В седловой точке $\partial\omega'/\partial k_x=0$ $\partial\omega'/\partial k_y=0$, т. е.

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_x}=w_x,\quad \frac{\partial\omega}{\partial k_y}=w_y \tag{1.2}$$

Если $\mathrm{Im}\,\omega_*'>0$, то $u(x', y', t)\to\infty$ при $t\to\infty$ для соответствующих w_x, w_y. Если $\mathrm{Im}\,\omega_*'\leqslant 0$, то $u(x', y', t)\to 0$.

Следовательно, асимптотика возмущений определяется группой волн, для которых $\mathbf{w}$ является групповой скоростью. На плоскости w_xw_y существует одна или несколько областей D, таких, что для $\mathbf{w}$, лежащих внутри области D, возмущения $u(x_0+w_xt,\ y_0+w_yt,\ t)\to\infty$, а для точек границы D и вне ее $u\to 0$ при $t\to\infty$. Точки, лежащие в D, определяют совокупность всех скоростей движущихся систем координат, в которых неустойчивость абсолютная. Область, занятая растущими возмущениями, при больших временах подобна D и линейно расширяется со временем.

2. Выясним, как развивается со временем начальное локализованное двумерное возмущение поверхности раздела $z=0$ двух идеальных несжимаемых жидкостей, занимающих полупространства $z>0$ и $z<0$. Пусть в невозмущенном состоянии верхняя жидкость движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$, а нижняя — со скоростью $\mathbf{v}_2$, плотности верхней и нижней жидкостей — ρ_1 и ρ_2 соответственно, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Начальное возмущение поверхности и ее скорость по нормали считаем малыми.

В системе координат, движущейся со скоростью

$$\mathbf{c}=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2,\quad \beta_1=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2},\quad \beta_2=\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \tag{2.1}$$

и осью x, параллельной относительной скорости, дисперсионное уравнение имеет вид [3]

$$\Omega=\sqrt{K^3-K_x^2} \tag{2.2}$$

$$\Omega=\frac{\omega\sigma}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^3(\rho_1+\rho_2)(\beta_1\beta_2)^{3/2}}\qquad K=\frac{k\sigma}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^2(\rho_1+\rho_2)\beta_1\beta_2}$$

$$k=\sqrt{k_x^2+k_y^2},\qquad K_x=K\cos\theta,\qquad K_y=K\sin\theta$$

Это уравнение справедливо и для комплексных K_x, K_y, однако нужно всегда выбирать ветвь K с $\mathrm{Re}\,K>0$.

Условие неустойчивости $\mathrm{Im}\,\Omega>0$ выполнено для точек действительной плоскости K_x, K_y, которые лежат внутри двух овалов l_1 и l_2 (фиг. 1), задаваемых уравнением $K^3-K_x^2=0$ или $K=\cos^2\theta$.

Введем безразмерные скорости

$$U=\frac{w_x}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|\sqrt{\beta_1\beta_2}},\qquad V=\frac{w_y}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|\sqrt{\beta_1\beta_2}} \tag{2.3}$$

Тогда соотношения (1.2) примут вид

$$U=\frac{\partial\Omega}{\partial K_x}=\frac{(^3/_2K-1)K_x}{\Omega},\qquad V=\frac{\partial\Omega}{\partial K_y}=\frac{^3/_2KK_y}{\Omega} \tag{2.4}$$

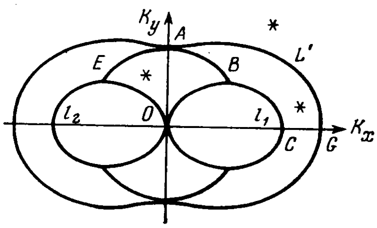
Обезразмеривая ω', так же как и ω, получим

$$\Omega'=\Omega-UK_x-VK_y \tag{2.5}$$

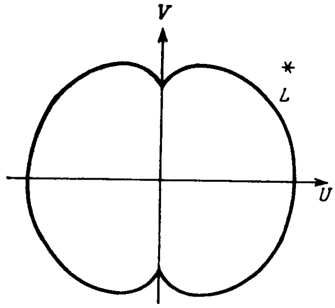
Соотношения (2.4) можно рассматривать как двузначное (соответствующее двум знакам перед корнем в равенстве (2.2)) отображение плоскости K_xK_y на плоскость UV.

Выберем ветвь функции $\Omega(K_x, K_y)$, соответствующую арифметическому значению корня (для другой ветви все рассуждения аналогичны) и через S обозначим соответствующее этой ветви однозначное отображение плоскости K_xK_y на плоскость UV, задаваемое равенствами (2.4).

Ввиду симметрии задачи при изучении отображения S можно ограничиться рассмотрением отображения квадранта $K_x \geqslant 0$, $K_y \geqslant 0$. Легко убе-



Фиг. 1



Фиг. 2

диться в том, что бесконечно удаленная окружность на плоскости K_xK_y переходит в бесконечно удаленную окружность на плоскости UV с сохранением полярных углов соответствующих точек. В точки оси V переходят точки оси K_y и окружности $K={}^2/_3$, изображенной линией AB на фиг. 1. Точке B соответствуют $U=0$, $V=\infty$. Точки овала l_1, на котором $\Omega=0$, переходят в бесконечно удаленные точки плоскости UV, причем отрезок BC кривой l_1 переходит в первый квадрант плоскости UV, а отрезок BO — во второй квадрант. Таким образом, бесконечно удаленным точкам плоскости UV соответствуют как бесконечно удаленные точки плоскости K_xK_y, так и точки овалов l_1 и l_2. Это говорит о неоднозначности обратного отображения S^{-1}.

Ветви этого неоднозначного отображения совпадают на линии, где

$$\Delta \equiv \frac{D(U,V)}{D(K_x,K_y)} = 0 \tag{2.6}$$

Будем обозначать эту линию на плоскости UV через L, а ее образ на плоскости K_xK_y — через L' (фиг. 1).

Уравнение (2.6) кривой L можно записать в параметрической форме

$$U = \sqrt{\frac{({}^3/_2K-1)^3}{1-{}^1/_2K}}, \quad V = \frac{3}{2}K\sqrt{\frac{2-{}^3/_2K}{1-{}^1/_2K}} \tag{2.7}$$

Уравнение кривой L' имеет вид

$$K = {}^4/_3 - {}^2/_3 \sin^2\theta \tag{2.8}$$

Линия L, изображенная на фиг. 2, симметрична относительно обеих осей. Максимальное значение U, равное $\sqrt{3}$, достигается в точке оси U. Максимальное значение V, равное ${}^3/_2$, достигается при $U={}^1/_2$ и соответствует возмущениям с $\theta=\pi/4$. В точке $U=0$, $V=\sqrt{{}^3/_2}$ кривая имеет точку возврата.

Из сказанного выше относительно отображения S следует, что часть квадранта $K_x \geqslant 0$, $K_y \geqslant 0$ вне кривой L' переходит в часть квадранта $U \geqslant 0$, $V \geqslant 0$ вне кривой L. На ту же область плоскости UV отображается область $ABCG$ плоскости K_xK_y. Криволинейный треугольник ABO отображается на квадрант $U \leqslant 0$, $V \geqslant 0$. Симметричный с ним криволинейный треугольник AEO отображается на квадрант $U \geqslant 0$, $V \geqslant 0$.

Таким образом, точке U, V, лежащей вне кривой L, соответствуют как прообразы при отображении S три пары действительных значений K_x, K_y (образ на плоскости UV и прообразы на плоскости K_xK_y обозначены на фиг. 1 и 2 звездочками). Всем этим значениям соответствуют действительные значения Ω'. Следовательно, согласно (1.1) возмущения затухают вдоль лучей $x=x_0+w_xt$, $y=y_0+w_yt$, где w_x и w_y связаны с U и V равенствами (2.3).

Точкам U, V, лежащим внутри L, соответствует как прообраз преобразования S только одна пара действительных значений K_x, K_y. Это означает, что две другие пары становятся комплексными. В силу того что все исходные формулы содержат только действительные коэффициенты, можно заключить, что эти пары значений K_x, K_y будут взаимно комплексно сопряжены. По тем же причинам комплексно-сопряженными будут и соответствующие значения Ω'. Поэтому, если они не являются действительными, то найдется Ω' с $\operatorname{Im}\Omega'>0$ и согласно (1.1) возмущения будут неограниченно расти вдоль лучей $x=x_0+w_xt$, $y=y_0+w_yt$, соответствующих рассматриваемым значениям U и V.

Покажем, что внутри области D, ограниченной кривой L, не существует никакой подобласти, в которой $\operatorname{Im}\Omega'\equiv 0$, т. е. что вся область D, за исключением, может быть, некоторых линий внутри нее, соответствует растущим возмущениям. Предположим противное. Тогда в точке U, V этой подобласти

$$\left(\frac{\partial\, \operatorname{Im}\Omega'}{\partial U}\right)_V=0,\quad \left(\frac{\partial\, \operatorname{Im}\Omega'}{\partial V}\right)_U=0 \tag{2.9}$$

Но согласно (2.5) первое из этих выражений равно $-\operatorname{Im} K_x$, а второе $-\operatorname{Im} K_y$, так что этой точке соответствуют только действительные значения K_x и K_y. А это значит, что точка U, V расположена вне D.

Таким образом, точки кривой L соответствуют асимптотическим значениям скоростей, с которыми движутся точки границы области, заполненной растущими возмущениями.

Если записать уравнение (2.7) линии L в виде $F(U^2, V^2)=0$, так что $F<0$ внутри области D, то воспользовавшись соотношениями (2.3), можно выписать критерий роста возмущений в произвольной системе координат вдоль прямых

$$x=x_0+q_xt,\qquad y=y_0+q_yt$$

$$F\left(\frac{(q_x-c_x)^2}{\beta_1\beta_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2},\ \frac{(q_y-c_y)^2}{\beta_1\beta_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2}\right)<0 \tag{2.10}$$

$$\mathbf{c}=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2,\quad \beta_1=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2},\quad \beta_2=\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$$

Если неравенство (2.10) имеет место при $q_x=0$, $q_y=0$, то имеет место абсолютная неустойчивость, т. е. возмущения неограниченно растут при $t\to\infty$ для фиксированных значений x и y. В противном случае неустойчивость носит конвективный характер, т. е. возмущения затухают со временем при фиксированных x и y (возмущения растут, но с течением времени выносятся из любой фиксированной области).

Нетрудно написать простые достаточные критерии отсутствия абсолютной неустойчивости. Из того, что было сказано о кривой L, следует, что отсутствие абсолютной неустойчивости обеспечивается выполнением хотя бы одного из неравенств

$$\left|\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}v_{1x}+\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}v_{2x}\right|>\sqrt{3}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2| \tag{2.11}$$

$$\left|\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}v_{1y}+\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}v_{2y}\right|>\frac{3}{2}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|$$

Первое условие является также необходимым и достаточным критерием отсутствия абсолютной неустойчивости по отношению к одномерным возмущениям, распространяющимся вдоль оси x. Это условие было получено в [1].

Отметим, что исследование условий абсолютной неустойчивости представляет интерес в связи с тем, что условия устойчивости ограниченных в пространстве течений могут в ряде случаев совпадать с условием отсутствия абсолютной неустойчивости [4].

Интересно отметить также, что вид возмущенной области при больших временах и условие абсолютной неустойчивости не зависят от величины поверхностного натяжения σ, так как эта величина не входит в левую часть неравенства (2.10).

Поступила 3 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Шикина И. С.* О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
2. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
3. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press., 1961.
4. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.