

## ОБ ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СФЕРЫ И ЦИЛИНДРА

И. А. ЗНАМЕНСКАЯ, А. П. РЯЗИН, Ф. В. ШУТАЕВ

(Москва)

Нестационарное отражение плоской ударной волны от искривленной стенки рассматривалось в ряде работ. В [1] предложен полуэмпирический метод определения движения ударной волны на оси симметрии. В [2] приведен численный расчет отражения ударной волны от сферы, найдено распределение плотности и давления на поверхности сферы. В [3] экспериментально получено значение плотности в зависимости от времени в трех точках на поверхности сферы. В [4] приводится дифференциальное соотношение, связывающее величину отхода ударной волны с радиусом ее кривизны и градиентом скорости газа за скачком. В большинстве работ основное внимание уделяется поздним стадиям отражения, переходу к установившемуся обтеканию. В [5] рассмотрено отражение сферической ударной волны от плоскости. Использовано разложение в ряд по пространственным координатам и времени. Отметим также работу [6], в которой применена аналогичная методика при рассмотрении начальной стадии столкновения взрывных волн.

Ниже теоретически и экспериментально исследуется начальная стадия отражения искривленной и плоской ударной волны от сферы, цилиндра, а также сферической и цилиндрической выемки.

Находятся точные выражения для производных по времени числа Маха отраженной ударной волны и производных по координате и по времени от плотности и давления за отраженной ударной волной на оси симметрии течения в начальный момент времени. Анализируются частные случаи отражения и обсуждаются некоторые особенности распределения параметров.

Приводятся результаты эксперимента по отражению плоской ударной волны от сферы, цилиндра и цилиндрической выемки.

Сравниваются полученные теоретические и экспериментальные данные и делаются выводы об их качественном соответствии и пределах применимости по времени аналитических соотношений.

1. Рассмотрим осесимметричное течение, возникающее при падении ударной волны на сферу радиуса  $r$ . Пусть радиус кривизны волны на оси симметрии  $X$  равен  $R_0$  ( $O$  — точка касания волны со сферой). Считаем, что газ перед падающей ударной волной покоится и параметры его — плотность  $\rho_0$ , давление  $p_0$ , скорость звука  $c$  — постоянны. Отсчет времени ведется от момента прихода волны в точку  $O$ .

Введем лагранжевы координаты  $a^1, a^2, a^3$ . За исходное состояние прием состояние за падающей волной. Обозначим число Маха падающей волны в точке касания через  $M_0$ , а отраженной волны — через  $M$ . Индекс 0 относится к невозмущенному состоянию, индекс 1 — к состоянию за падающей ударной волной, индекс 2 — к состоянию за отраженной ударной волной.

Уравнение для изменения числа Маха ударной волны при движении в газе с неоднородными параметрами получено в [7]. Для падающей ударной волны оно имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{2}{(1-M_0^2)} \left[ \frac{2(\gamma-1)(M_0^2-1)^2}{2+(\gamma-1)M_0^2} + 3+M_0^2 \right] = \\ = c_0 [2+(\gamma-1)M_0^2] \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} - \frac{2m}{(\gamma+1)R_0} \right], \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \frac{\partial \rho_1}{\partial a^3} v$$

Здесь  $v$  — компонента единичной нормали к поверхности волны в точке касания; значение  $m=1$  соответствует двумерному случаю, а  $m=2$  — трехмерному.

Уравнение для отраженной ударной волны имеет вид

$$(1.2) \quad \frac{2}{M^2} \left[ \frac{2(\gamma-1)(M^2-1)^2}{(\gamma-1)M^2+2} + 3+M^2 \right] \frac{dM}{dt} = \\ = -(M^2-1) \left[ 2(\gamma-1) \frac{c_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + \frac{2+(\gamma-1)M^2}{M^2} \frac{c_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} + \right. \\ \left. + \frac{2((\gamma-1)M^2+2)}{M^2(\gamma+1)} \frac{m}{R_1} + \frac{\gamma-1}{M} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{2}{M} \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial t} \right]$$

где  $R_1$  — радиус кривизны отраженной ударной волны.

Граничным условием является условие непротекания газа на поверхности сферы. В данном случае, поскольку рассматривается течение вдоль оси  $X$ , граничное условие имеет вид

$$x_2(a^3, t) = 0$$

Разложим  $x_1$  и  $x_2$  в ряды по  $t$  и возьмем их разность

$$[x]_t = [x]_0 + \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \right]_0 t + \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right]_0 \frac{t^2}{2} + \left[ \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right]_0 \frac{t^3}{6} + \dots$$

Здесь и далее  $[z] = z_2 - z_1$ , где  $z$  — любая переменная.

Учитывая, что  $x_1(a^3, t) = a^3 + v_1 t + \dots$  ( $v_1$  — скорость газа за падающей волной), и последовательно приравнявая нулю коэффициенты при  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$ , в выражении для  $x_2$ , получим граничные условия соответственно первого, второго, третьего и т. д. порядков.

Граничное условие первого порядка тривиально

$$\left[ \frac{\partial x}{\partial t} \right] = -v_1$$

Граничное условие второго порядка, записанное через градиент плотности, имеет вид

$$(1.3) \quad \gamma \frac{\rho_1}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{R} \frac{1}{M c_1} \frac{ds_2}{dM} \frac{dM}{dt} + \frac{\gamma-1}{R} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0$$

Здесь  $s$  — энтропия,  $R$  — газовая постоянная. Уравнения (1.1) — (1.3) образуют замкнутую систему. Из геометрических соображений можно найти, что кривизна отраженной ударной волны на оси симметрии в момент отражения выражается следующим образом:

$$\frac{1}{R_1} = - \left( \frac{1}{R_0} \frac{u_1}{u_0} + 1 + \frac{u_1}{u_0} \right)$$

где  $u_0$  и  $u_1$  — скорости соответственно падающей и отраженной ударных волн.

Решение полученной системы уравнений (1.1) — (1.3) дает точные выражения для изменения числа Маха отраженной ударной волны и гра-

диента плотности за ней на оси симметрии в начальный момент времени, если заданы параметры падающей волны. Эти выражения представляют собой линейные комбинации кривизны падающей ударной волны и градиента плотности за ней

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_* = A_1 + B_1 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)_* + C_1 \left(\frac{1}{R_0}\right)_*$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} = A_2 + B_2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)_* + C_2 \left(\frac{1}{R_0}\right)_*$$

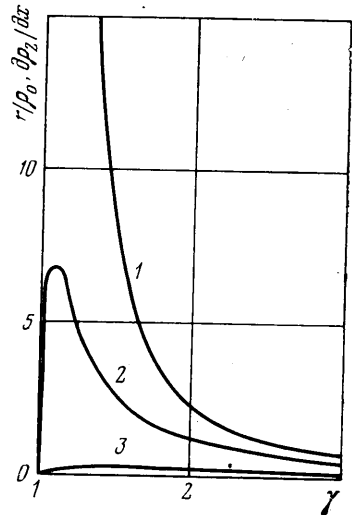
Звездочкой отмечены безразмерные значения величин

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_* = \frac{r}{c_0} \frac{dM}{dt}, \quad \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x}\right)_* = \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x} \quad (\alpha=1, 2), \quad \left(\frac{1}{R_0}\right)_* = \frac{r}{R_0}$$

Коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  ( $i=1, 2$ ) являются функциями  $M_0$  и  $\gamma$ . Ниже приведены их значения при  $\gamma=1.4$  для различных чисел Маха.

$M_0$	1.1	1.5	2	2.5	3	5	10
$A_1$	-0.1941	-0.8732	-1.624	-2.332	-3.022	-5.680	-12.03
$A_2$	0.0022	0.2403	1.406	3.267	5.307	11.367	16.16
$B_1$	0.0148	0.0287	0.0008	-0.0412	-0.0804	-0.1983	-0.4286
$B_2$	0.0005	0.0545	0.2806	0.5716	0.8306	0.1391	1.701
$C_1$	-0.1014	-0.6404	-1.788	-3.320	-5.010	-11.85	-27.66
$C_2$	0.0024	0.3701	2.800	7.508	13.22	32.01	47.88

Приведем анализ некоторых частных случаев отражения ударной волны от сферы. Пусть падающая на сферу ударная волна в начальный момент является плоской ( $1/R_0=0$ ) и градиент плотности за ней равен нулю ( $\partial \rho_1/\partial x=0$ ). В этом случае отраженная ударная волна ослабляется ( $(dM/dt)_*=A_1<0$ ). Если за падающей волной плотность постоянна, то, как известно, с течением времени возникает установившееся обтекание. Известно, что при установившемся обтекании, а также на поздних стадиях отражения плоской ударной волны от сферы плотность газа на оси симметрии возрастает от волны к телу (см., например, [8]). Полученное решение системы для данного случая  $\rho_1=\text{const}$  дает положительное значение градиента плотности, т. е. плотность газа в начальный момент времени убывает от волны к телу. Таким образом, распределение плотности на оси симметрии на начальной стадии отражения плоской ударной волны от сферы качественно отличается от распределения при установившемся обтекании или на поздних стадиях отражения. На фиг. 1 представлена зависимость величины  $(\partial \rho_2/\partial x)_*$  от  $\gamma$  для различных чисел Маха (значениям  $M_0=5, 2.5, 1.5$  соответствуют кривые 1, 2, 3). Анализ показал, что при больших  $M_0$  изменение со временем числа Маха отраженной ударной волны линейно зависит от  $M_0$ .



Фиг. 1

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_* = \frac{4(3\gamma-1)^2 \sqrt{2(\gamma-1)\gamma}}{(\gamma+1)(17\gamma^2-14\gamma+1)} M_0, \quad M_0 \gg 1$$

Градиент плотности при больших  $M_0$  асимптотически стремится к по-

стоянной величине

$$\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)_* = \frac{4(3\gamma-1)(\gamma+1)\gamma}{(\gamma-1)^2(17\gamma^2-14\gamma+1)}, \quad M_0 \gg 1$$

Градиент давления за отраженной ударной волной на начальной стадии отражения равен нулю.

Падающая на сферу ударная волна в начальный момент времени плоская ( $1/R_0=0$ ), а за волной существует распределение параметров ( $\partial \rho_1/\partial x \neq 0$ ). Анализ рассчитанных значений коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  показывает, что если падающая ударная волна усиливается ( $dM_0/dt > 0$ ), то отраженная ударная волна при  $M_0 \gg 2$  ( $\gamma=1.4$ ) ослабляется. Градиент плотности в этом случае положителен как за падающей, так и за отраженной волной. Если падающая ударная волна ослабляется ( $dM_0/dt < 0$ ), то  $\partial \rho_1/\partial x < 0$ ; значение градиента плотности за отраженной волной может быть как положительным (при  $(\partial \rho_1/\partial x)_* < A_2/B_2$ ), так и отрицательным (при  $(\partial \rho_1/\partial x)_* > A_2/B_2$ ). В общем случае, когда падающая ударная волна искривлена, значение  $(\partial \rho_1/\partial x)_*$ , при котором  $dM/dt$  меняет знак, можно представить в виде  $(\partial \rho_1/\partial x)_*^0 = D + E(1/R_0)$ . Ниже приведены рассчитанные значения  $D$  и  $E$  для различных  $M_0$  и  $\gamma=1.4$ .

$M_0$	1.1	1.5	2	2.5	3	5	10
$D$	-13.11	-30.43	-19.19	56.66	37.59	28.64	28.07
$E$	-6.851	-22.31	-2114	80.66	62.33	59.77	64.53

Падающая на сферу ударная волна искривлена ( $1/R_0 \neq 0$ ), градиент плотности за волной в начальный момент времени равен нулю ( $\partial \rho_1/\partial x = 0$ ). Если падающая волна выпуклая и имеет небольшую кривизну, то, как показывает расчет, градиент плотности за отраженной волной положителен (при  $|1/R_0|_* < A_2/C_2$ ). Отраженная ударная волна ослабляется (при  $|1/R_0|_* < A_1/C_1$ ). При увеличении кривизны падающей волны  $(\partial \rho_2/\partial x)_*$  и  $(dM/dt)_*$  меняют знак. В случае, если падающая ударная волна вогнутая, отраженная волна всегда ослабляется и градиент плотности за ней положителен.

Отметим, что, как показал анализ, для двумерного случая — дифракции цилиндрической или плоской ударной волны на цилиндре — качественно картина отражения не изменится.

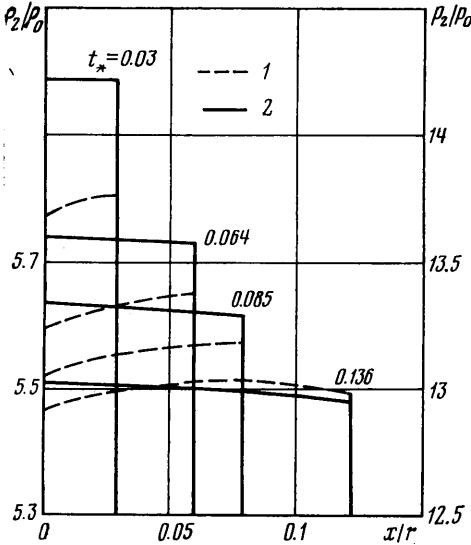
При отражении ударной волны от сферической или цилиндрической выемки уравнения для падающей и отраженной волн, а также граничные условия в начальный момент времени на оси симметрии будут иметь аналогичный вид с точностью до знака радиуса кривизны сферы или цилиндра.

Решение задачи об отражении плоской ударной волны с однородными параметрами за ней для сферической (цилиндрической) выемки с точностью до знака совпадает с решением для сферы (цилиндра). Отраженная ударная волна усиливается (сходится), а плотность от волны к телу возрастает.

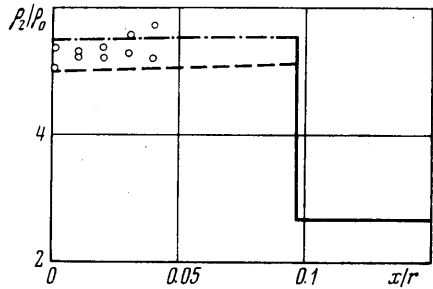
Аналогично может быть рассмотрен и более общий случай отражения, когда перед падающей на сферу ударной волной существует распределение параметров. В этом случае в уравнении (1.1) появятся дополнительные члены, характеризующие это распределение.

Для задачи дифракции плоской ударной волны с однородными параметрами за ней на сфере и цилиндре аналогично [9] были найдены также выражения для  $\partial^2 \rho_2/\partial x^2$ ,  $d(\partial \rho_2/\partial x)/dt$ ,  $\partial^2 p_2/\partial x^2$ ,  $d(\partial p_2/\partial x)/dt$ ,  $d^2 M/dt^2$  в начальный момент времени. Это позволило уточнить распределение плотности и давления на оси симметрии в начальный момент времени, зависи-

мость числа Маха и величины отхода отраженной волны от времени, а также проследить изменение величин градиентов плотности и давления со временем — при переходе к установившемуся обтеканию. Полученная система уравнений включает в себя выражения для  $d^2M/dt^2$ ,  $d(\partial\rho_2/\partial a)/dt$  и  $\partial^2\rho/\partial a^2$ , а также граничное условие третьего порядка  $[\partial^3x/\partial t^3]=0$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Дифференцируя по времени уравнения движения в лагранжевых координатах, получим

$$\partial^2 p_2 / \partial v \partial t = 0$$

Анализ рассчитанных значений этих величин, а также значений  $\partial^2 p_2 / \partial x^2$  и  $d(\partial p_2 / \partial x) / dt$ , приведенных в таблице для различных чисел  $M_0$ , показывает, что  $d(\partial p_2 / \partial x) / dt < 0$ ,  $d(\partial p_2 / \partial x) / dt < 0$ , начиная с некоторых малых чисел  $M_0$ , т. е. величины градиентов плотности и давления со временем убывают.

$M_0$	1.1	1.5	2	2.5	3	5	10
$d(\partial p_2 / \partial x) / dt$	0.2172	-2.240	-16.81	-44.99	-83.20	-273.2	-747.3
$\partial^2 p_2 / \partial x^2$	0.2229	-2.470	-18.15	-45.35	-76.89	-176.9	-260.6
$d^2 M / dt^2$	0.8192	4.747	11.37	20.07	30.94	96.21	409.42
$d(\partial p_2 / \partial x) / dt$	0.4534	-0.1182	-7.505	-29.79	-76.14	-640.0	-6566
$\partial^2 p_2 / \partial x^2$	0.4534	-0.1482	-8.889	-32.07	-73.71	-420.9	-2286

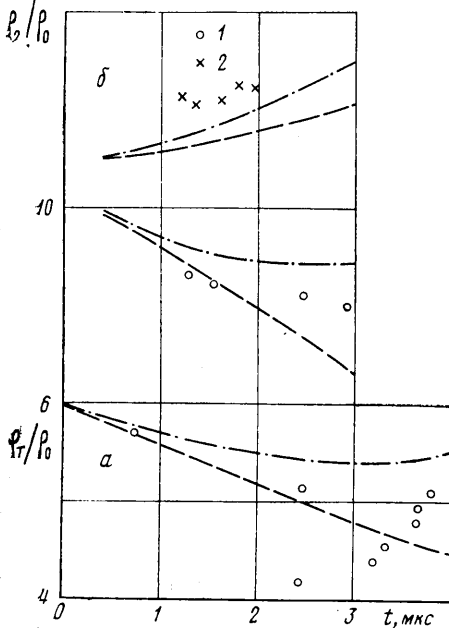
Это согласуется с тем фактом, что при больших  $t$  — при установившемся обтекании —  $\partial p_2 / \partial x < 0$  и  $\partial p_2 / \partial x < 0$ .

Значения всех вторых производных параметров газа за волной и  $d^2 M / dt^2$  не зависят от знака кривизны стенки. Давление в начальный момент времени возрастает от волны к телу. Изменение со временем распределения плотности (кривые 1) и давления (кривые 2) на оси симметрии за отраженной от сферы ударной волной для  $M_0 = 2$  показано на фиг. 2 (расчет проведен с учетом вторых производных).

Приведенные выше соотношения справедливы лишь при  $t \rightarrow 0$ . С целью проверки качественного соответствия картины течения, следующей из этих соотношений, реальным течениям и количественной оценки границ их применимости были проведены эксперименты по исследованию началь-

ной стадии отражения плоской ударной волны от сферы, цилиндра и цилиндрической выемки.

2. Первая серия экспериментов проводилась в ударной трубе прямоугольного сечения с внутренним размером рабочей части  $40 \times 61$  мм<sup>2</sup>. В качестве исследуемого газа использовался воздух, в качестве толкающего газа — гелий. Число Маха падающей ударной волны  $M_0 = 2 \pm 0.1$ . В качестве диафрагмы использовалась пленка из целлофана толщиной 0.2 мм. Оптическая часть установки состояла из интерферометра Маха — Цендера



Фиг. 4

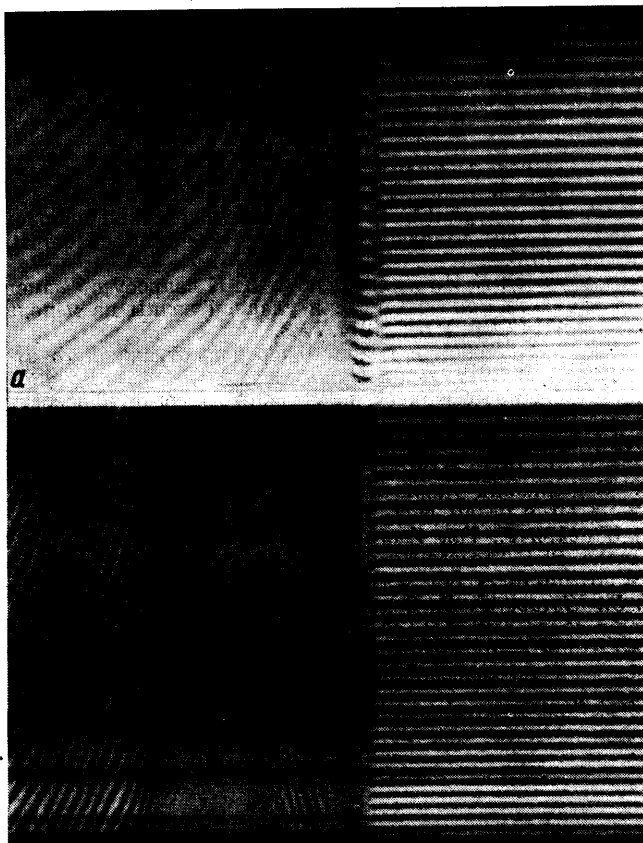
с импульсным источником света (ОКГ на рубине) и камеры ждущего фоторегистратора (ЖФР). Модуляция добротности ОКГ осуществлялась активным затвором на основе кристалла KDP. В рабочей секции трубы помещалась модель — сфера диаметром 16 мм. В каждом опыте получали несколько (3—4) интерференционных снимков, регистрирующих последовательные стадии отражения плоской ударной волны от сферы.

Эксперимент позволил получить распределение плотности на оси симметрии течения в начальные моменты отражения, начиная с  $t_* = 0.03$  ( $t_* = tc_0/2$ ). На фиг. 3 приведены экспериментальное и расчетное распределение плотности на оси симметрии в момент времени  $t_* = 0.106$ . Здесь и далее пунктирной линией обозначен расчет с учетом первых производных, штрихпунктирной — расчет с учетом вторых производных. На фиг. 4, а приведено изменение со временем плотности в точке торможения.

Сравнение величин отхода ударной волны от сферы, полученных из кадров, а также величин отхода от цилиндрической выемки, полученных из теневых разверток с расчетными значениями, найденными с учетом  $dM/dt$  и  $d^2M/dt^2$ , показывает, что полученные аналитические соотношения хорошо согласуются с экспериментом до  $t_{**} \sim 0.35 \div 0.4$ , где  $t_{**} = tu_0/r$ . Примерно до такого же значения времени экспериментальное распределение плотности соответствует теоретическому.

Вторая серия экспериментов имела целью изучение начальной стадии отражения плоской ударной волны с большим числом Маха ( $M_0 = 4 \div 6$ ) от цилиндра и цилиндрической выемки. Эксперименты проводились на двухдиафрагменной ударной трубе, аналогичной описанной в [10]. Камера низкого давления заполнялась аргоном ( $p_0 = 1$  атм), промежуточная камера — гелием ( $p_0 = 4$  атм), камера высокого давления — кислородно-водородно-гелиевой смесью ( $p_0 = 30$  атм). Внутреннее сечение рабочей части имело размер  $27 \times 27$  мм. Измерение скорости проводилось с помощью системы ионизационных датчиков. Для определения плотности использовался интерферометр Маха — Цендера и спектрограф. Развертка процесса во времени осуществлялась с помощью камеры ЖФР. В качестве источника света использовался импульсный разряд в капилляре. Точка, в которой измерялась плотность, находилась вблизи поверхности модели на оси симметрии. Усреднение значения плотности велось по участку  $0.4 \times 0.6$  мм<sup>2</sup>.

На фиг. 5, *a* приведены интерферограммы, полученные при отражении ударной волны от цилиндра радиуса 7 мм,  $M_0=4.22$ . Расстояние точки наблюдения от точки торможения  $d=0.3$  мм (фиг. 5, *a*). На фиг. 5, *б* приведены интерферограммы, полученные при отражении ударной волны от



Фиг. 5

цилиндрической выемки радиуса 18 мм, высота модели 16 мм,  $M_0=4.61$ . Расстояние точки наблюдения от точки торможения  $d=0.3$  мм (фиг. 5, *б*).

Первый резкий скачок полос соответствует приходу в точку наблюдения падающей ударной волны, а второй скачок — приходу отраженной волны. За отраженной волной следует участок изменения плотности со временем: на фиг. 5, *a* — уменьшение плотности, а на фиг. 5, *б* — увеличение плотности. Следующая область на фиг. 5, *б* соответствует приходу в точку наблюдения возмущений, идущих от краев модели. Обработка интерферограмм позволила получить изменение по времени плотности газа за отраженной ударной волной на оси симметрии течения вблизи поверхности модели. При отражении ударной волны от выемки рассматривался процесс отражения от самого начала отражения и до момента схлопывания возмущений.

На фиг. 4, *б* приведены результаты обработки двух типичных интерферограмм, а также результаты расчетов. Внизу представлен случай отражения ударной волны от цилиндра — 1, а сверху — от выемки — 2. Как и в первой серии экспериментов, как видно из приведенных данных, экспери-

мент соответствует теоретическим результатам примерно до  $t_* \sim 0.4$ . Это время можно считать временем начальной стадии отражения. Оно значительно превышает время стадии регулярного отражения ударной волны от сферы и цилиндра.

Таким образом, приведенные уравнения можно применять для описания движения ударной волны и изменения параметров газа на оси симметрии по крайней мере в течение стадии регулярного отражения.

Поступила 3 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жмаева Е. А., Харитонов А. И. Формирование головного скачка около затупленных тел, помещенных в ударной трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
2. Грудницкий В. Г., Прохорчук Ю. А. Расчет взаимодействия ударной волны с затупленным телом. В сб. «Численные методы механики сплошных сред», т. 6, № 4. Новосибирск, 1975.
3. Браславец В. А., Жмаева Е. А., Харитонов А. И. К вопросу об изменении плотности, давления и отхода при воздействии ударной волны на неподвижное затупленное тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
4. Полубоаринов А. К. О движении ударного фронта, отраженного от затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
5. Васильев М. М. Отражение сферической ударной волны от плоскости. Сб. «Вычислит. матем.», Москва, 1960, № 6.
6. Тугазаков Р. Я., Фонарев А. С. Начальная стадия столкновения взрывных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
7. Шугаев Ф. В., О движении ударных волн в газе с переменными параметрами. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 3.
8. Ladenburg R., Winckler J., Van Voorhis C. C. Interferometric studies of faster than sound phenomena. Pt I. The gas flow around various objects in a free, homogeneous, supersonic air stream. Phys. Rev., 1948, vol. 73, No. 11.
9. Пискарева М. В., Шугаев Ф. В. О дифференциальных соотношениях на нестационарной ударной волне. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
10. Коньков А. А., Рязин А. П., Соколов А. И. Двухдиафрагменная ударная труба для получения плотной термической плазмы. Теплофизика высоких температур, 1974, т. 12, вып. 4.