

ГИПЕРЗВУКОВОЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ
НА СТРЕЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЯХ БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА,
ОБТЕКАЕМЫХ ПОД УГЛОМ АТАКИ

И. Г. БРЫКИНА, Э. А. ГЕРШБЕИН

(Москва)

Исследуется течение вязкого сжимаемого газа в гиперзвуковом ударном слое на стреловидных крыльях бесконечного размаха с затупленной передней кромкой, обтекаемых под различными углами атаки. Уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя с модифицированными соотношениями Ренкина – Гюгонио на ударной волне и граничными условиями на поверхности тела, учитывающими скольжение и скачок температуры, решаются методом последовательных приближений, позволяющим получать как аналитическое решение для первых приближений, так и точное численное при реализации метода на ЭВМ.

Получено аналитическое решение задачи в первом приближении. Приводятся формулы для коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела, а также для профилей скоростей и температуры поперек ударного слоя. Сравнение аналитического решения с численным показало удовлетворительную точность аналитического решения для не слишком больших чисел Рейнольдса.

Впервые вопрос о влиянии вязкости и теплопроводности на течение за сильно искривленной ударной волной рассматривался в работе [1]. В дальнейшем решению уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя с модифицированными соотношениями Ренкина – Гюгонио для случая симметричных течений однородного газа был посвящен ряд работ (см., например, [2–9]). При этом для решения уравнений в [2–4, 7, 8] использовались различные численные методы, в [6] – интегральный метод, в [9] – метод последовательных приближений. Отметим, что на основании сравнения аналитического решения в первом приближении [9] с численным, полученным в рамках данного метода, можно сделать вывод об удовлетворительной точности аналитических формул для малых и умеренных чисел Рейнольдса. Об этом же свидетельствует сравнение аналитического решения [9] с численными решениями других авторов [3, 4, 7].

Решение уравнений пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя с модифицированными соотношениями Ренкина – Гюгонио на ударной волне методом последовательных приближений рассматривалось в [10]. Метод последовательных приближений для решения уравнений пограничного слоя использовался в [11, 12].

1. Рассмотрим обтекание гиперзвуковым потоком вязкого однородного газа гладких затупленных тел двух типов.

К первому типу отнесем осесимметричные тела, обтекаемые под нулевым углом атаки; ко второму – стреловидные крылья бесконечного размаха, обтекаемые под различными углами атаки.

Связем систему координат x^*, y^*, z^* с обтекаемой поверхностью (фиг. 1).

Определим элемент длины

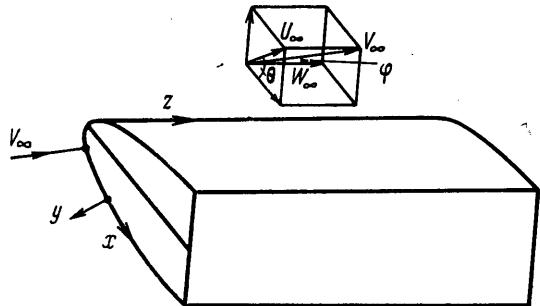
$$(1.1) \quad ds^2 = (1 + \kappa^* y^*)^2 dx^{*2} + dy^{*2} + (r_w^* + y^* \cos \alpha)^{2v} dz^{*2}$$

Здесь в случае осесимметричного течения $v=1$, α – угол между касательной к поверхности тела и направлением потока на бесконечности, z^* – азимутальный угол, κ^* – продольная кривизна поверхности, $\kappa^* = 1/R^*$.

В случае обтекания стреловидного крыла бесконечного размаха под углом атаки θ $v=0$, α – угол между касательной к контуру тела и проекци-

ей вектора скорости набегающего потока на плоскость, перпендикулярную образующей, κ^* — кривизна контура тела, φ — угол скольжения (фиг. 1).

Пусть u^*, v^*, w^* — составляющие скорости в направлениях x^*, y^*, z^* ($w^*=0$ в осесимметричном течении); $p^*, \rho^*, H^*, T^*, \mu^*, \lambda^*$ — соответственно давление, плотность, полная энталпия, температура, коэффициенты вязкости и теплопроводности, ψ — функция тока, V_∞ — скорость течения на бесконечности, $R_0=1/\kappa_0$ — радиус кривизны в критической точке,



Фиг. 1

r_w^* — расстояние до оси, параллельной скорости на бесконечности и проходящей через критическую точку.

Введем в ударном слое новые переменные по формулам

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u^* &= V_\infty u, \quad w^* = V_\infty w, \quad v^* = \varepsilon V_\infty v, \quad y^* = \varepsilon R_0 y, \quad x^* = R_0 x \\ \kappa^* &= \kappa_0 \kappa, \quad r_w^* = R_0 r_w, \quad p^* = \rho_\infty V_\infty^2 p, \quad \rho^* = \varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho, \quad T^* = T_0 T \\ H^* &= \frac{V_\infty^2}{2} H, \quad \mu^* = \mu^*(T_0) \mu, \quad \sigma = \frac{\mu^* c_p}{\lambda^*}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \\ T_0 &= \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu^*(T_0)}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad K = \varepsilon \text{Re} \end{aligned}$$

Подставляя переменные (1.2) в уравнения Навье — Стокса, записанные в системе координат x^*, y^*, z^* , устремляя ε и Re^{-1} к нулю и считая при этом произведение εRe величиной порядка единицы, получаем следующие уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r_w^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r_w^*) &= 0, \quad \rho' u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho u^2}{R} \\ \rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{\sigma K} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + w^2) \right] \right\}, \\ p &= \rho T, \quad \mu = T^\alpha \end{aligned}$$

Член, пропорциональный $\partial p / \partial x$, оставлен во втором уравнении системы (1.3) для того, чтобы область применимости данных уравнений расши-

рить в сторону больших чисел K , при которых этот член играет основную роль в пристеночной области ударного слоя.

В качестве граничных условий на ударной волне $y=y_s(x)$ используем модифицированные соотношения Ренкина – Гюгонио, которые в гиперзвуковом приближении в переменных (1.2) имеют следующий вид:

$$(1.4) \quad u = \cos \varphi \cos \alpha - \frac{1}{K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$w = \sin \varphi - \frac{1}{K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$H = 1 - \frac{1}{\sigma K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial y} [H + (\sigma - 1)(u^2 + w^2)]$$

$$p = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha, \quad \rho v - \rho u \frac{\partial y_s}{\partial x} = -\cos \varphi \sin \alpha$$

На поверхности тела выставим граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры [13]

$$(1.5) \quad u = \frac{2-\theta}{\theta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\rho K \sqrt{T}} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = 0, \quad w = \frac{2-\theta}{\theta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\rho K \sqrt{T}} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$H = H_w + \frac{2-\alpha^*}{\alpha^*} \frac{2\gamma}{\sigma(\gamma+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\rho K \sqrt{T}} \frac{\partial H}{\partial y}$$

Здесь θ – коэффициент диффузационного отражения, α^* – коэффициент аккомодации, которые в данной работе предполагаются равными единице; индексы w , s , w относятся к параметрам на бесконечности, за ударной волной и на поверхности тела соответственно.

Перейдем в уравнениях (1.3) и граничных условиях (1.4), (1.5) к переменным Дородницына и новым искомым функциям по формулам

$$(1.6) \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{1}{\Delta} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \int_0^{y_s} \rho dy$$

$$(1.7) \quad p = \cos^2 \varphi \bar{p}, \quad u = \cos \varphi \cos \alpha \bar{u}, \quad v = -\cos \varphi \sin \alpha \bar{v}, \quad w = \sin \varphi \bar{w}$$

$$H = H_w + (1 - H_w) g, \quad \psi(x, y) = \cos \alpha r_w \Delta f(\xi, \eta)$$

$$\beta = \frac{d \ln \Delta}{d \ln \xi} + \beta_w, \quad \beta_w = \xi \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{R} + \frac{v \sin \alpha}{r_w} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{\xi \operatorname{tg} \alpha}{R}, \quad \beta_2 = -\frac{d \ln (1 - H_w)}{d \ln \xi}$$

$$K^* = \frac{K \cos \varphi \cos \alpha}{\xi}, \quad k_1 = \frac{x}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad k_2 = -\frac{\xi \operatorname{tg} \alpha}{\Delta}$$

Система уравнений в новых переменных примет вид (черту здесь и далее опускаем)

$$(1.8) \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = u, \quad \beta f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = -\rho (k_1 u + k_2 v)$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_1 u^2 + \xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
 & = \frac{-\varepsilon \xi}{\rho \cos^2 \alpha} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\Delta^2 K^*} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\
 & \xi u \frac{\partial w}{\partial \xi} - \left(\beta f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\Delta^2 K^*} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \\
 & \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\Delta \cos^2 \alpha}{R} u^2, \quad p = \frac{\rho T}{\cos^2 \varphi} \\
 & \beta_2 u (1-g) + \xi u \frac{\partial g}{\partial \xi} - \left(\beta f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial g}{\partial \eta} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\mu \rho}{\sigma \Delta^2 K^*} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[g + \frac{\sigma-1}{1-H_w} (u^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + w^2 \sin^2 \varphi) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

В третьем уравнении (1.8) член, пропорциональный $\partial p / \partial \eta$, опущен ввиду его малости.

Границные условия на ударной волне при $\eta=1$ примут вид

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - \frac{\mu \rho}{\Delta K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad w = 1 - \frac{\mu \rho}{\Delta K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\
 (1.9) \quad g &= 1 - \frac{\mu \rho}{\Delta \sigma K \cos \varphi \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[g + \frac{\sigma-1}{1-H_w} (u^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + w^2 \sin^2 \varphi) \right] \\
 p &= \sin^2 \alpha, \quad f = \frac{r_w}{(1+\nu) \Delta \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

Границные условия на поверхности тела

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{Q}{\Delta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad w = \frac{Q}{\Delta} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad g = \frac{Q^*}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \\
 (1.10) \quad Q &= \frac{2-\vartheta}{\vartheta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{K} T^{w-1/2} \\
 Q^* &= \frac{2-\alpha^*}{\alpha^*} \frac{2\gamma}{\sigma(\gamma+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{K} T^{w-1/2}
 \end{aligned}$$

Коэффициенты трения и теплопередачи будут определяться по формулам

$$\begin{aligned}
 c_{fx} &= \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \left(\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \right)^{-1} = \frac{2 \cos \alpha \cos \varphi (\mu \rho)_w \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\Delta K} \Big|_w = \bar{c}_{fx} \cos^2 \varphi \\
 c_{fz} &= \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \left(\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \right)^{-1} = \frac{2 \sin \varphi (\mu \rho)_w \frac{\partial w}{\partial \eta}}{\Delta K} \Big|_w = \bar{c}_{fz} \cos \varphi \sin \varphi \\
 (1.11) \quad c_H &= \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} [\rho_\infty V_\infty (H_\infty^* - H_w^*)]^{-1} = \\
 & = \frac{(\mu \rho)_w}{\Delta \sigma K} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} - 2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha u \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2 \sin^2 \varphi w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \Big|_w = \bar{c}_H \cos \varphi
 \end{aligned}$$

2. Проинтегрировав уравнения импульсов и энергии 2 раза по η (от η до 1 и от 0 до η) с учетом граничных условий, получим интегродифференциальные уравнения для функций u , w , g , которые будем решать методом последовательных приближений, предложенным в [9] для осесимметричных течений. Итерационный процесс, организованный таким образом, чтобы каждое приближение удовлетворяло граничным условиям на ударной волне, имеет вид

$$(2.1) \quad u^{(n+1)} = \Delta_u^{(n+1)^2} (\beta_w A(u^n) + \beta_1 B(u^n) + C(u^n)) + \Delta_u^{(n+1)} (\beta_w A^*(u^n) + \beta_1 B^*(u^n) + C^*(u^n)) + \xi \Delta_u^{(n+1)} \frac{d\Delta_u^{(n+1)}}{d\xi} A(u^n) + \xi \frac{d\Delta_u^{(n+1)}}{d\xi} A^*(u^n),$$

$$w^{(n+1)} = \Delta_w^{(n+1)^2} (\beta_w A(w^n) + C(w^n)) + \Delta_w^{(n+1)} (\beta_w A^*(w^n) + C^*(w^n)) + \xi \Delta_w^{(n+1)} \frac{d\Delta_w^{(n+1)}}{d\xi} A(w^n) + \xi \frac{d\Delta_w^{(n+1)}}{d\xi} A^*(w^n)$$

$$g^{(n+1)} = \Delta_H^{(n+1)^2} (\beta_w A(g^n) + \beta_2 B(g^n) + C(g^n)) + \Delta_H^{(n+1)} \frac{d\Delta_H^{(n+1)}}{d\xi} A(g^n) + \Delta_H^{(n+1)} (\beta_w A^*(g^n) + \beta_2 B^*(g^n) + C^*(g^n)) + \xi \Delta_H^{(n+1)} \frac{d\Delta_H^{(n+1)}}{d\xi} A^*(g^n) + \frac{1-\sigma}{1-H_w} (\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi u^{(n+1)^2} + \sin^2 \varphi w^{(n+1)^2})$$

$$(2.2) \quad A(u) = K^* \int_0^\eta [\varphi^*(1-u) + \theta(u)] l d\eta, \quad B(u) = K^* \int_0^\eta \theta_p l d\eta$$

$$C(u) = \xi K^* \int_0^\eta \left[(1-u) \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \theta(u) \right] l d\eta,$$

$$A(w) = K^* \int_0^\eta [\varphi^*(1-w) + \theta(w)] l d\eta$$

$$C(w) = \xi K^* \int_0^\eta \left[(1-w) \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \theta(w) \right] l d\eta,$$

$$A(g) = \sigma K^* \int_0^\eta [\varphi^*(1-g) + \theta(g)] l d\eta$$

$$B(g) = \sigma K^* \int_0^\eta \theta(g) l d\eta, \quad C(g) = \xi \sigma K^* \int_0^\eta \left[(1-g) \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \theta(g) \right] l d\eta,$$

$$l = \frac{1}{\mu \rho}$$

$$A^*(u) = Q K^* l_w \theta_w(u), \quad B^*(u) = Q K^* l_w \theta_{pw},$$

$$A^*(w) = Q K^* l_w \theta_w(w)$$

$$A^*(g) = B^*(g) = Q^* \sigma K^* l_w \theta_w(g), \quad C^*(u) = Q K^* l_w \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(u)$$

$$C^*(w) = Q K^* l_w \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(w), \quad C^*(g) = Q^* \sigma K^* l_w \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(g),$$

$$f = \varphi^* = \int_0^1 u d\eta$$

$$\theta(u) = \int_{\eta}^1 u(1-u) d\eta, \quad \theta(g) = \int_{\eta}^1 u(1-g) d\eta, \quad \theta(w) = \int_{\eta}^1 u(1-w) d\eta,$$

$$\theta_p = - \int_{\eta}^1 \left(u^2 + \frac{\varepsilon \xi}{\beta_1 \cos^2 \alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) d\eta$$

Подставив функции $u^{(n+1)}$, $w^{(n+1)}$, $g^{(n+1)}$ и их производные по η в граничные условия на ударной волне, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций

$$\Delta_u^{(n+1)}(\xi), \Delta_w^{(n+1)}(\xi) \text{ и } \Delta_g^{(n+1)}(\xi)$$

$$\Delta_u^{(n+1)} \frac{d\Delta_u^{(n+1)}}{d\xi} a_1 + \frac{d\Delta_u^{(n+1)}}{d\xi} a_2 + \Delta_u^{(n+1)} a_3 + \Delta_u^{(n+1)} a_4 + a_5 = 0$$

(2.3)

$$\Delta_w^{(n+1)} \frac{d\Delta_w^{(n+1)}}{d\xi} c_1 + \frac{d\Delta_w^{(n+1)}}{d\xi} c_2 + \Delta_w^{(n+1)} c_3 + \Delta_w^{(n+1)} c_4 + c_5 = 0$$

$$\Delta_g^{(n+1)} \frac{d\Delta_g^{(n+1)}}{d\xi} b_1 + \frac{d\Delta_g^{(n+1)}}{d\xi} b_2 + \Delta_g^{(n+1)} b_3 + \Delta_g^{(n+1)} b_4 + b_5 = 0$$

Здесь a_i , b_i , c_i ($i=1, \dots, 5$) — известные функции координаты ξ , определяемые по n -му приближению

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \xi A_s(u^n), \quad a_2 = \xi A^*(u^n) + \operatorname{ctg} \alpha \varphi_s^{*n} (1 - u_s^n), \quad a_3 = \beta_w A_s(u^n) + \\
 &+ \beta_w B_s(u^n) + C_s(u^n) \\
 a_4 &= \beta_w A^*(u^n) + \beta_w B^*(u^n) + C^*(u^n) + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\xi} (1 - u_s^n) \times \\
 &\times \left(\beta_w \varphi_s^{*n} + \xi \frac{\partial \varphi_s^{*n}}{\partial \xi} \right), \quad a_5 = -1 \\
 c_1 &= \xi A_s(w^n), \quad c_2 = \xi A^*(w^n) + \operatorname{ctg} \alpha \varphi_s^{*n} (1 - w_s^n), \quad c_3 = \\
 &= \beta_w A_s(w^n) + C_s(w^n) \\
 c_4 &= \beta_w A^*(w^n) + C^*(w^n) + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\xi} (1 - w_s^n) \times \\
 &\times \left(\beta_w \varphi_s^{*n} + \xi \frac{\partial \varphi_s^{*n}}{\partial \xi} \right), \quad c_5 = -1 \\
 b_1 &= \xi A_s(g^n), \quad b_2 = \xi A^*(g^n) + \operatorname{ctg} \alpha \varphi_s^{*n} (1 - g_s^n), \quad b_3 = \\
 &= \beta_w A_s(g^n) + \beta_w B_s(g^n) + C_s(g^n)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$$b_i = \beta_w A^*(g^n) + \beta_2 B^*(g^n) + C^*(g^n) + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\xi} (1 - g_s^n) \times \\ \times \left(\beta_w \varphi_s^{*n} + \xi \frac{\partial \varphi_s^{*n}}{\partial \xi} \right)$$

$$b_s = -1 + (1 - \sigma) (1 - H_w)^{-1} (\sin^2 \varphi w_s^{(n+1)^2} + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi u_s^{(n+1)^2})$$

Давление, температура, плотность, коэффициенты трения и число Стантона в $(n+1)$ -м приближении находятся по формулам

$$\begin{aligned} p^{(n+1)} &= \sin^2 \alpha - \Delta^{(n+1)} \frac{\cos^2 \alpha}{R} \int_{\eta}^1 u^{(n+1)^2} d\eta \\ T^{(n+1)} &= H_w + (1 - H_w) g^{(n+1)} - \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi u^{(n+1)^2} - \\ &- \sin^2 \varphi w^{(n+1)^2}, \quad \rho^{(n+1)} = \cos^2 \varphi p^{(n+1)} / T^{(n+1)} \\ \bar{c}_{fx}^{(n+1)} &= 2 \cos \alpha \left\{ \Delta_u^{(n+1)} \frac{\cos \alpha}{\xi} \left[\beta_w \theta_w(u^n) + \beta_2 \theta_{pw} u^n + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(u^n) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \frac{d \Delta_u^{(n+1)}}{d \xi} \theta_w(u^n) \right\} \\ (2.5) \quad \bar{c}_{fz}^{(n+1)} &= 2 \left\{ \Delta_w^{(n+1)} \frac{\cos \alpha}{\xi} \left[\beta_w \theta_w(w^n) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(w^n) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \frac{d \Delta_w^{(n+1)}}{d \xi} \theta_w(w^n) \right\} \\ \bar{c}_h^{(n+1)} &= \Delta_h^{(n+1)} \frac{\cos \alpha}{\xi} \left[(\beta_w + \beta_2) \theta_w(g^n) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_w(g^n) \right] + \\ &\quad + \cos \alpha \frac{d \Delta_h^{(n+1)}}{d \xi} \theta_w(g^n) - \frac{\cos \alpha \cos^2 \varphi}{1 - H_w} u_w^{(n+1)} \bar{c}_{fx} - \frac{\sin^2 \varphi}{1 - H_w} \bar{c}_{fz} w_w^{(n+1)} \end{aligned}$$

Задавая каким-либо способом нулевое приближение $u^{(0)}$, $w^{(0)}$, $g^{(0)}$, с помощью формул (2.1), (2.3), (2.5) можно определить все последующие приближения для компонент скорости, энталпии, температуры, давления, плотности, коэффициентов трения и числа Стантона.

На критической линии $\xi = 0$ было получено численное решение задачи обтекания стреловидного крыла бесконечного размаха для различных углов скольжения путем вычисления на ЭВМ достаточно большого числа приближений. Нулевое приближение задавалось в виде линейных функций по η , удовлетворяющих граничным условиям на ударной волне и на поверхности тела, значение величины ω полагалось равным $1/2$.

На основании численных расчетов можно сделать вывод об удовлетворительной сходимости последовательных приближений в широком диапазоне определяющих параметров задачи. Например, для достижения точности решения 0.0001 требуется ~ 10 итераций при $Re \sim 10$, $\varphi = 0 \div 30^\circ$ ($\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.7$, $H_w = 0.03$). Относительная погрешность первого приближения для коэффициентов трения и числа Стантона в диапазоне чисел Рейнольдса от 1 до 50 и углов скольжения от 0 до 30° не превышала 5 %. При больших значениях Re и φ ошибка увеличивается, например при $Re = 70$ и $\varphi = 45^\circ$ она достигает 8.5 %. Эти оценки показывают, что уже первое приближение дает вполне удовлетворительную точность.

3. Получим решение задачи (1.8)–(1.10) в первом приближении метода последовательных приближений.

Зададим нулевое приближение в виде

$$(3.1) \quad u^{(0)} = a(\eta + b), \quad w^{(0)} = a^*(\eta + b^*), \quad g^{(0)} = c(\eta + d)$$

Подставив эти функции в граничные условия на ударной волне и на поверхности тела и положив $\omega = 1/2$, получим алгебраические уравнения для определения a, b, c, d, a^*, b^*

$$\begin{aligned} & \sigma(1 - (2Q_1 - Q_1^*)a)a^4 + a^3(a^2Q_1 - (1+2Q_1)a+1) - \\ & - E(1 - (2Q_1 - Q_1^*)a)(a^2Q_1 - (1+2Q_1)a+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.2) \quad b &= \frac{Q_1 a}{1 - 2Q_1 a}, \quad d = \frac{Q_1^* a}{1 - 2Q_1 a} \\ c &= \frac{\sigma a^4 (1 - 2Q_1 a)}{(1 - (2Q_1 - Q_1^*)a)(a^2Q_1 - (1+2Q_1)a+1)^2 E} \\ a^* &= a, \quad b^* = b \\ Q_1 &= \frac{(v+1)}{2} \frac{\cos \alpha}{r_w} Q, \quad Q_1^* = \frac{(v+1)}{2} \frac{\cos \alpha}{r_w} Q^* \\ E &= \frac{4}{(v+1)^2} \frac{\sigma K^2 (1-H_w) r_w^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Нужный корень уравнения (3.2) лежит в интервале $0 < a < a^{**}$, $a^{**} = (1+2Q_1 - \sqrt{1+4Q_1^2})/2Q_1$, причем, левая часть уравнения (3.2) при $a=0$ отрицательна, а при $a=a^{**}$ положительна.

Найдем первое приближение. Рассмотрим решение дифференциальных уравнений (2.3) в локально-автомодельном приближении, т. е. без учета членов с производными $d\Delta_u/d\xi$, $d\Delta_w/d\xi$ и $d\Delta_h/d\xi$, рассматривая при этом координату ξ как параметр. Специально проведенное сравнение точного (численного) решения уравнений (2.3) с их решением в локально-автомодельном приближении показывает, что последнее дает достаточно хорошую точность в широком диапазоне значений координаты ξ . Подставляя функции (3.1) в качестве нулевого приближения в итерационную схему и опуская выкладки при вычислении двойных интегралов, получим в первом приближении следующие выражения для составляющих скорости, энтальпии, трения и теплопередачи:

$$\begin{aligned} (3.3) \quad u(\xi, \eta) &= \Delta_u^2 P \sum_{k=0}^{10} u_k S_k + \Delta_u F_u, \quad w(\xi, \eta) = \Delta_w^2 P \sum_{k=0}^7 w_k S_k + \Delta_w F_w \\ g(\xi, \eta) &= \Delta_h^2 \sigma P \sum_{k=0}^7 g_k S_k + \Delta_h F_h + (1-\sigma)(1-H_w)^{-1} \times \\ & \times (\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi u^2 + \sin^2 \varphi w^2) \\ \bar{c}_{fx} &= \xi \bar{c}_{fx}^* = 2\Delta_u \frac{\cos^2 \alpha}{\xi} R_u, \quad \bar{c}_{fz} = 2\Delta_w \frac{\cos \alpha}{\xi} R_w \\ \bar{c}_h &= \Delta_h \frac{\cos \alpha}{\xi} R_h - \frac{\cos \alpha \cos^2 \varphi}{1-H_w} \Delta_u F_u \bar{c}_{fx} - \frac{\sin^2 \varphi}{1-H_w} \Delta_w F_w \bar{c}_{fz} \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad P(\xi) = \frac{K^* c^{1/2} (1 - H_w)^{1/2}}{\cos^2 \varphi \sin^2 \alpha}, \quad S_k = \frac{2}{2k+1} [(\eta + d)^{k+1/2} - d^{k+1/2}],$$

$$l^* = \frac{(d + 2a_6^* - 2a_2^* b^2)^{1/2}}{1 - a_3^* (1 + 3b + 3b^2)}$$

$$F_u(\xi) = PQl^* R_u, \quad F_w(\xi) = PQl^* R_w, \quad F_h(\xi) = \sigma PQl^* R_h$$

$$R_w = \beta_w a \left[\frac{1}{2} + b - a \left(\frac{1}{3} + b + b^2 \right) \right], \quad R_h = (\beta_w + \beta_2) a \left[\frac{1}{2} + b - c \left(\frac{1}{3} + \frac{b+d}{2} + bd \right) \right]$$

$$R_u = R_w - \beta_1 a^2 (1/3 + b + b^2) + a_1^* \{ (d + 2a_6^* - 2a_2^* b^2) [1 + a_4^* (3/4 + 2b + 3/2 b^2)] + 1/2 (1 - 4a_2^* b) [1 + a_4^* (3/5 + 3/2 b + b^2)] - 2/3 a_2^* [1 + a_4^* (1/2 + 6/5 b + 3/4 b^2)] \}$$

$$a_1^* = \frac{2\epsilon c (1 - H_w) \xi}{\cos \alpha \sin \alpha R \cos^2 \varphi}, \quad a_2^* = \frac{a^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{2c (1 - H_w)},$$

$$a_3^* = \frac{a \cos \alpha r_w}{3(v+1) (1/2 + b) R \sin^2 \alpha}$$

$$a_4^* = \frac{a}{3(v+1) (1/2 + b) R} \left(\frac{\cos \alpha r_w}{\sin^2 \alpha} + \frac{R}{2} + \frac{r_w}{\cos \alpha} - \frac{r_w}{2 \sin \alpha} \frac{dR}{d\xi} \right),$$

$$a_6^* = \frac{H_w}{2(1 - H_w)}$$

Коэффициенты u_k , w_k , g_k находятся по формулам

$$(3.5) \quad u_k = \sum_{i=\max(0, k-4)}^{\min(k, 6)} q_i l_{k-i} \quad (k=0, \dots, 10),$$

$$w_k = \sum_{i=\max(0, k-4)}^{\min(k, 3)} r_i l_{k-i} \quad (k=0, \dots, 7)$$

$$g_k = \sum_{i=\max(0, k-4)}^{\min(k, 3)} s_i l_{k-i} \quad (k=0, \dots, 7)$$

$$l_0 = a_6^* - a_2^* q^2, \quad l_1 = 1 - 2q a_2^* + a_3^* q^*, \quad l_2 = -a_2^* - 3a_3^* q^2, \quad l_3 = -3a_3^* q, \quad l_4 = -a_3^*$$

$$r_1 = \beta_w a^2 d (d/2 + q), \quad r_2 = -\beta_w a^2 q/2, \quad r_3 = -\beta_w a^2/6, \quad r_4 = r_1 q + \beta_w a (1/2 + b - q^*/3)$$

$$q_1 = r_1 + \beta_w a^2 q^2 - 2a_1^* l_0 (1 + a_4^* q^*), \quad q_2 = r_2 + \beta_w a^2 q - a_1^* [(1 - 4a_2^* q) (1 + a_4^* q^*) - 6q^2 a_4^* l_0]/2,$$

$$q_3 = r_3 + \beta_w a^2/3 + a_1^* [2a_2^* (1 + a_4^* (b + 1)) + 6a_4^* q a_6^* + q^2 a_4^* (3 - 20a_2^* q)]/3,$$

$$q_4 = a_1^* a_4^* (q (3 - 20a_2^* q) + 2a_6^*)/4, \quad q_5 = a_1^* a_4^* (1 - 10a_2^* q)/5$$

$$\begin{aligned}
 q_6 &= -a_1^* a_2^* a_4^*/3, \quad q_0 = -\sum_{i=1}^6 q_i (1+d)^i + \beta_w a (1/2 + b) (1-a(1+b)), \\
 q &= b-d, \quad q^* = (b+1)^3 - q^3 \\
 s_0 &= \beta_w a \left(\frac{1}{2} + b - c(1+d) \left(\frac{1+d}{3} + \frac{q}{2} \right) \right) + \beta_2 a \left(\frac{1}{2} + b + d \left(\frac{d}{2} + q \right) - \right. \\
 &\quad \left. - c(1+d)^2 \left(\frac{1+d}{3} + \frac{q}{2} \right) \right) \\
 s_1 &= \beta_w a c d \left(\frac{d}{2} + q \right) - \beta_2 a q, \quad s_2 = -\beta_w \frac{a c q}{2} - \beta_2 \frac{a}{2} (1-cq), \\
 s_3 &= -\beta_w \frac{a c}{6} + \beta_2 \frac{a c}{3}
 \end{aligned}$$

Функции Δ_u , Δ_w , Δ_H определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \Delta_u &= \frac{-a_4 + \sqrt{a_4^2 + 4a_3}}{2a_3}, \quad \Delta_w = \frac{-c_4 + \sqrt{c_4^2 + 4c_3}}{2c_3} \\
 \Delta_H &= \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 - 4b_3 b_5}}{2b_3}
 \end{aligned}$$

$$a_3 = P \sum_{k=0}^{10} u_k S_{ks}, \quad c_3 = P \sum_{k=0}^7 w_k S_{ks}, \quad b_3 = \sigma P \sum_{k=0}^7 g_k S_{ks}$$

$$a_4 = F_u + t(1-a(1+b)), \quad c_4 = F_w + t(1-a(1+b))$$

$$b_4 = F_H + t(1-c(1+d)),$$

$$b_5 = -1 + \frac{1-\sigma}{1-H_w} (\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi u_s^2 + \sin^2 \varphi w_s^2)$$

$$S_{ks} = \frac{2}{2k+1} [(1+d)^{k+\frac{1}{2}} - d^{k+\frac{1}{2}}], \quad t = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\xi} \beta_w a \left(\frac{1}{2} + b \right)$$

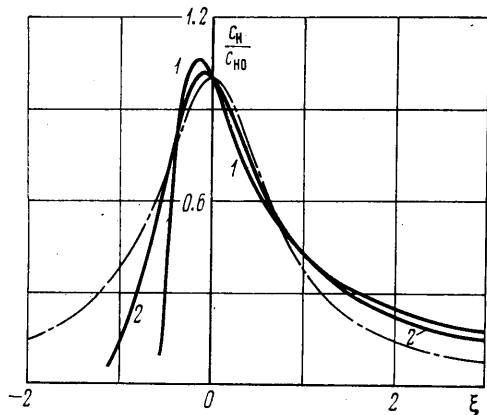
Давление, температура и плотность определяются по формулам (2.5).

Ранее, в [9], для оценки точности аналитического решения в первом приближении в случае осесимметричных течений было проведено его сравнение с результатами решения этой же задачи конечно-разностными методами, полученными другими авторами [3, 4, 7]. На основании сравнения распределений коэффициентов трения и теплообмена, а также давления и отхода ударной волны вдоль поверхности сферы, параболоида и гиперболоида вращения можно сделать вывод об удовлетворительной для практических расчетов точности аналитического решения для течений с малыми и средними числами Рейнольдса как в окрестности критической точки, так и в удалении от нее.

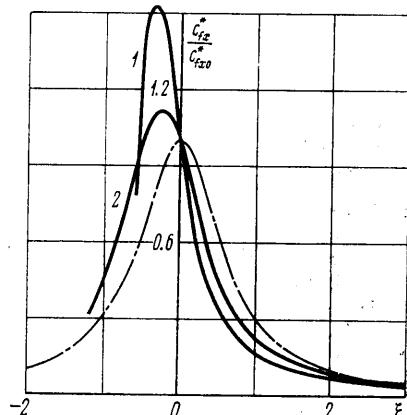
О точности первого приближения в окрестности критической линии в случае обтекания стреловидных крыльев говорилось в п. 2.

По приближенным аналитическим формулам был проведен расчет течения в гиперзвуковом вязком ударном слое около параболического, гиперболического, кругового и эллиптических цилиндров, расположенных под углами скольжения и атаки к направлению набегающего потока. Некоторые результаты расчетов обтекания параболического цилиндра, по-

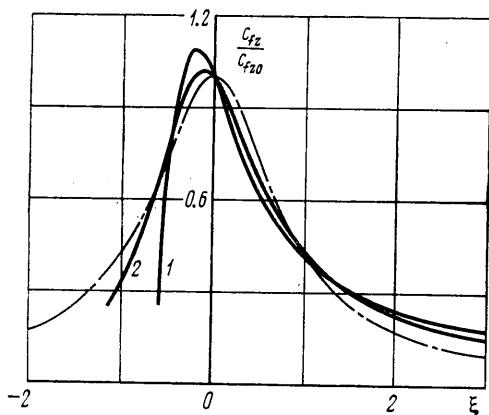
лученные при $Re=20$, $\phi=45^\circ$, $\gamma=1.4$, $H_w=0.03$, $\sigma=0.7$, приведены на фиг. 2–5. На фиг. 2–4 показано распределение вдоль поверхности относительных значений числа Стантона c_H/c_{H0} и коэффициентов трения c_{fz}^*/c_{fz0}^* и c_{fx}/c_{fx0} (индекс 0 означает, что соответствующие величины вычислены в критической точке), на фиг. 5 – давление и отход ударной волны.



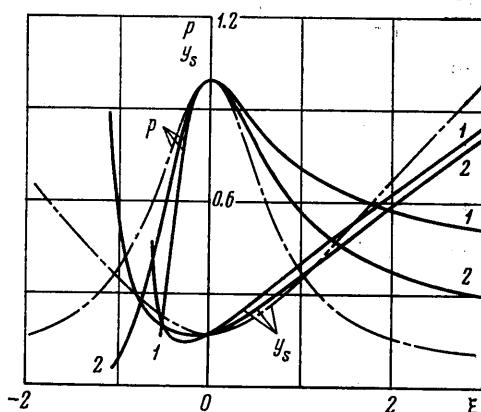
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Результаты приведены в зависимости от расстояния от критической точки (при $\xi>0$ и $\xi<0$) для двух углов атаки -30° (кривые 1) и 15° (кривые 2). Для сравнения приведены результаты расчета обтекания с нулевым углом атаки (штрихпунктирные кривые). При симметричном обтекании максимальное значение трения и теплового потока на поверхности достигается в критической точке и с увеличением расстояния вниз по потоку трение и тепловой поток постепенно уменьшаются. При обтекании этого же тела под углом атаки максимальное значение трения и теплового потока достигается уже не в критической точке. С увеличением расстояния от критической точки в сторону отрицательных значений ξ трение и тепловой поток начинают расти, принимают максимальное значение, затем резко уменьшаются, причем максимум и расстояние максимума от критической точки увеличиваются с увеличением угла атаки. При $\xi>0$ трение и тепловой поток ведут себя как при симметричном обтекании.

Аналогично, минимальное значение отхода ударной волны при обтекании под углом атаки находится не в критической точке, а смещено в сторону отрицательных ξ , и это смещение увеличивается с увеличением угла атаки, в то время как минимальное значение отхода уменьшается.

В заключение авторы благодарят Г. А. Тирского за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 18 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной. Вестн. МГУ, сер. физ.-мат. и ест. н., 1953, № 3.
2. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. Inst. Aerospace Sci. Paper, 1963, № 92.
3. Анкудинов А. Л. Расчет вязкого гиперзвукового ударного слоя с подводом массы при умеренно малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
4. Анкудинов А. Л. Вязкий ударный слой около параболоида вращения. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1448.
5. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
6. Kang S. W. Hypersonic low-Reynolds-number flow over a blunt body with mass injection. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 8.
7. Davis R. T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 5.
8. Srivastava B. N., Werle M. J., Davis R. T. Stagnation region solutions of the full viscous shock-layer equations. AIAA Journal, 1976, vol. 14, № 2.
9. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 1.
10. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува. В сб.: «Некоторые вопросы механики сплошной среды». М., Изд-во МГУ, 1978.
11. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации. Отчет НИИ механ. МГУ, 1969, № 1016.
12. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.
13. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965.