

ПРАВИЛО ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АБЛИРУЮЩИХ ТЕЛ
ПРИ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКАХ, ЛОКАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ
ОТ УГЛА НАКЛОНА ПОВЕРХНОСТИ

Э. З. АПШТЕЙН, Н. Н. ПИЛЮГИН

(Москва)

Правило площадей, известное для волнового сопротивления [1, 2], обобщено на тепловой нагрев пространственных тел потоками, локально зависящими от угла наклона поверхности. Проведены расчеты для трехосных эллипсоидов с разным отношением полуосей и выявлены границы применимости этого правила. Решена задача об определении уноса массы трехмерного тела, изменяющего свою форму под действием теплового потока. Установлено, что правило площадей справедливо и для изменения массы трехмерных тел, и даны формулы для расчета уноса.

1. В дальнейшем будем предполагать, что тепловой поток на поверхности тела q_w зависит от местного угла наклона поверхности, т. е. угла между внешней нормалью к элементу поверхности и вектором скорости набегающего потока газа. Такого рода зависимость имеет место для конвективных тепловых потоков [3, 4], для лучистых потоков [5, 6], при обтекании тел разреженным газом [7], а также при воздействии интенсивного внешнего излучения на обтекаемое тело [8]. Рассмотрим тепловой поток к телам, по форме близким к осесимметричным. Запишем уравнение формы обтекаемого тела в цилиндрической системе координат (r, z, φ) в виде $r_\varepsilon = r_0(z) + \varepsilon r_1(z, \varphi)$, $\varepsilon \ll 1$. Считаем, что рассматриваемое трехмерное тело мало отличается от некоторого осесимметричного $r = r_0(z)$. Для этих тел направляющие косинусы нормали к поверхности соответственно имеют вид

$$(1.1) \quad n_z = -\frac{1}{D} \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial z}, \quad D = \left(1 + \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r_\varepsilon^2} \left(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$(1.2) \quad n_{z0} = -r_0' / D_0, \quad D_0 = \sqrt{1 + r_0'^2}, \quad r_0' = \frac{dr_0}{dz}$$

Если разложить n_z в ряд по ε , то в линейном приближении получим

$$(1.3) \quad n_z = n_{z0} - \varepsilon D_0^{-3} \frac{\partial r_1}{\partial z} + O(\varepsilon^2)$$

Предполагая, что нормальный тепловой поток к телу является функцией локального угла $q_w = q_w(n_z)$, получим суммарный тепловой поток на тело

$$(1.4) \quad Q_w = \int_0^L \int_0^{2\pi} q_w r_\varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial z} \frac{d\varphi dz}{n}$$

Здесь L — длина тела. Если разложить подынтегральную функцию в ряд по ε с учетом (1.3), то нетрудно получить

$$\begin{aligned}
 Q_w &= Q_0 + \varepsilon Q_1, \quad Q_0 = 2\pi \int_0^L dz \frac{r_0' r_0 q_w(n_{z0})}{n_z} \\
 (1.5) \quad Q_1 &= \int_0^L dz \left\{ \frac{q_{w0}}{n_{z0}} r_0' \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi + \left(\frac{q_{w0} r_0}{n_{z0}} - \frac{r_0' r_0}{D_0^3 n_{z0}} \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(\frac{dq_w}{dn_z} \right)_{\varepsilon=0} \right) \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi \right\}
 \end{aligned}$$

Выбираем теперь осесимметричное тело $r=r_0(z)$ таким образом, чтобы в произвольном сечении $z=\text{const}$ площади его и исходного трехмерного тела были равны. Тогда имеем

$$(1.6) \quad S_0 = \pi r_0^2 \equiv S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_\varepsilon^2 d\varphi = \pi r_0^2 + \varepsilon r_0 \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi + O(\varepsilon^2)$$

Отсюда и из (1.5) следует оценка

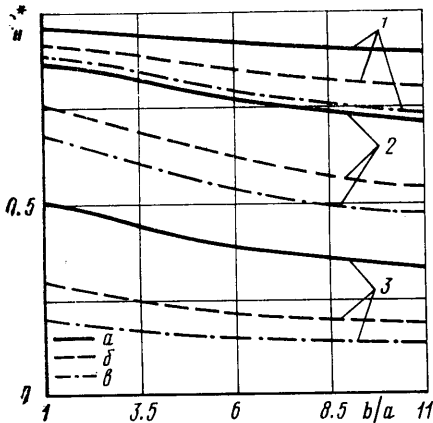
$$(1.7) \quad \int_0^{2\pi} \frac{r_1 d\varphi}{\pi r_0} \sim \varepsilon, \quad Q_1 \sim \varepsilon Q_0, \quad Q_w - Q_0 \sim \varepsilon^2 Q_0$$

Таким образом, различие в полных тепловых потоках сопоставляемых тел имеет более высокий порядок малости, чем различие их форм, если равны площади их поперечного сечения. Соотношения (1.5)–(1.7) обобщают на тепловые потоки известное для волнового сопротивления [1] правило площадей.

В качестве иллюстрации этого правила и для выяснения границ его применимости рассмотрим далее тепловые потоки при обтекании под нулевым углом атаки трехосных полуэллипсоидов с полуосями a, b, c вдоль координатных линий x, y, z гиперзвуковым потоком газа. При этом ось z направлена против вектора скорости набегающего потока, а оси x, y — перпендикулярно ему. На основе [4–6] в расчетах была принята зависимость для тепловых потоков вида

$$(1.8) \quad q_w = q_0 n z^m, \quad q_0 = C_{H_0} \rho v^{3/2}$$

где C_{H_0}, q_0 — коэффициент теплообмена и поток тепла в критическую точку тела. На фиг. 1 представлены зависимости $C_{H^*} = C_H / C_{H_0} = Q_w / q_0 S$ от отношения b/a полуосей, перпендикулярных потоку. Здесь C_H — коэффициент теплообмена, S — площадь мидела. Номера кривых 1, 2, 3 на фиг. 1 соответствуют значениям $c/\sqrt{ab} = 0.1, 0.25, 1.0$. Линиями a обозначены расчеты для $m=3$, b — для $m=6$, а δ — для $m=9$. Из фиг. 1 следует, что и при существенном отклонении формы тела от осесимметричной (например, при $b/a=2$) нормированный коэффициент теплообмена C_{H^*} отличается от C_{H^*} для тела вращения лишь на несколько процентов, т. е. применение правила площадей дает коллественно верный результат. Отметим, что даже при очень сильном отличии от осевой симметрии (при $b/a=11$) разница в C_{H^*} достигает всего 30–40%.



Фиг. 1

щения лишь на несколько процентов, т. е. применение правила площадей дает коллественно верный результат. Отметим, что даже при очень сильном отличии от осевой симметрии (при $b/a=11$) разница в C_{H^*} достигает всего 30–40%.

2. Рассмотрим теперь задачу об уносе массы и изменении формы трехмерного тела под действием интенсивных тепловых потоков. Уравнение,

описывающее изменение формы тела, разрушающегося под действием внешнего теплового потока, рассматривалось, например, в [8-10]. Исследуем класс тел, ограниченных поверхностью, обращенной выпуклостью навстречу набегающему потоку, и плоскостью миделя. Начало координат расположим в плоскости миделя. Пусть x, y, z — прямоугольные координаты, причем ось z направлена против вектора скорости набегающего потока. Если уравнение поверхности в данный момент времени задано в виде $z=z(x, y, t)$, то уравнение, описывающее изменение формы тела, имеет вид [9]

$$(2.1) \quad \frac{\partial z}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} = -\frac{q_w}{\rho_1 h}, \quad z_x' = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y' = \frac{\partial z}{\partial y}$$

где ρ_1 — плотность теплозащитного материала, h — эффективная энтальпия разрушения. В начальный момент времени $t=0$ необходимо задать исходную форму тела $z=z_0(x, y)$.

Изменение массы тела M определяется соотношением

$$(2.2) \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\rho v^3 C_H S}{h}, \quad C_H = \left(2 \int_S \frac{q_w dS}{\cos \theta} \right) / \rho v^3 S$$

где C_H — коэффициент теплообмена; dS — элемент площади сечения миделя тела; θ — угол между нормалью к элементу боковой поверхности dS , и осью z ; ρ, v — соответственно плотность и скорость набегающего потока газа.

Рассмотрим решение уравнения абляции (2.1), когда распределение потока тепла по поверхности тела дается некоторой функцией косинуса угла между нормалью к поверхности и осью z

$$q_w / \rho_1 h = H (\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}) \Psi(t)$$

Тогда решением в параметрическом виде [11] будет

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x(t) &= s_1 + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_{p_0, q_0}, & y(t) &= s_2 + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_{p_0, q_0} \\ z &= z_0(s_1, s_2) + \tau \left[\frac{p_0^2 + q_0^2}{f} \frac{\partial F}{\partial f} - F(f) \right]_{p_0, q_0}, & \tau &= \int_0^t \Psi(t) dt \\ f &= \sqrt{1+p^2+q^2}, & p &= \frac{\partial z}{\partial x}, & q &= \frac{\partial z}{\partial y}, & F &= \sqrt{1+p^2+q^2} H(\sqrt{1+p^2+q^2}) \end{aligned}$$

где $s_1, s_2, z_0(s_1, s_2)$ — начальные координаты поверхности тела x, y, z при $t=0$. В конкретном случае степенной зависимости $q_w/q_0 = n z^m$ из (2.3) получим

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x &= s_1 + \tau(1-m) \frac{p_0}{f_0^{1+m}}, & y &= s_2 + \tau(1-m) \frac{q_0}{f_0^{1+m}} \\ z &= z_0(s_1, s_2) - \tau [m f_0^{1-m} + (1-m) f_0^{-1-m}], & f_0 &= f(p_0, q_0) \end{aligned}$$

Для затупленного носка из (2.4) при $s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 0, p_0 \rightarrow 0, q_0 \rightarrow 0$ получим изменение его координаты со временем $z(s_1=0, s_2=0, \tau) = L - \tau$. В частном случае $m=1$ из (2.4) получаем форму тела в данный момент времени в явном виде $z=z_0(x, y) - \tau$. Наконец, в важном случае сильноизлучающего газа [5] в формулах (2.4) следует полагать $m=3$. Решение (2.3) позволяет найти массу тела в каждый момент времени

$$(2.5) \quad M = \rho_T \int \int_S z dx dy$$

Отметим следующую важную особенность: для разрушающихся тел произвольной начальной формы зависимость массы M от безразмерного времени τ есть кубическая парабола. Действительно, переходя в интеграле (2.5) от переменных x, y к переменным s_1, s_2 , получим

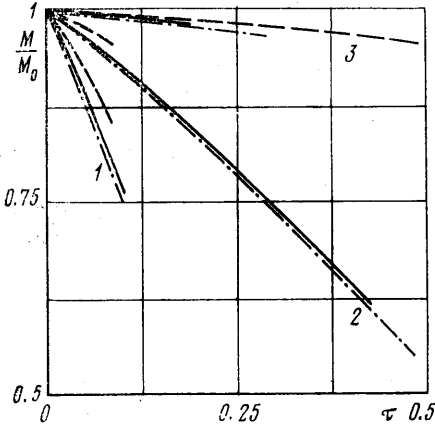
$$M = \rho_T \int \int z(s_1, s_2) [D(x, y) / D(s_1, s_2)] ds_1, ds_2$$

Поскольку z зависит от τ линейно, а в якобиан преобразования D входят произведения величин $x_{s_1'}, y_{s_1'}, x_{s_2'}, y_{s_2}'$, тоже линейно зависящих от τ , то функция $M(\tau)$ — кубический многочлен

$$(2.6) \quad M = M_0(1 - L_1\tau - L_2\tau^2 - L_3\tau^3)$$

Эта зависимость справедлива при некоторых ограничениях. Во-первых, между переменными x, y и s_1, s_2 должно быть взаимно-однозначное соответствие (т. е. поверхность тела не может иметь изломов). Во-вторых, значения z из (2.3) должны быть положительными. И наконец, необходимо, чтобы в каждой точке поверхности косинус угла между осью z и внешней нормалью был неотрицателен ($n_z \geq 0$).

3. Используя результаты п.1, можно показать, что первоначально эквивалентные (в смысле правила площадей) тела будут оставаться ими и при изменении формы с течением времени. С этой целью выделим в рассматриваемых телах некоторые элементарные слои, ограниченные сечениями z и $z+dz$ и пояском боковой поверхности. Применяя к ним



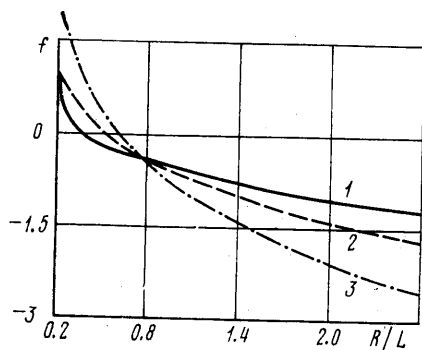
Фиг. 2

сформулированное в п.1 правило площадей, получим, что тепловые потоки к боковым поверхностям таких слоев равны друг другу. Поэтому скорости изменения их массы тоже равны, а следовательно, равны и скорости изменения площадей. Отсюда ясно, что с течением времени площади этих сечений будут оставаться равными друг другу, т. е. рассматриваемые тела будут эквивалентны.

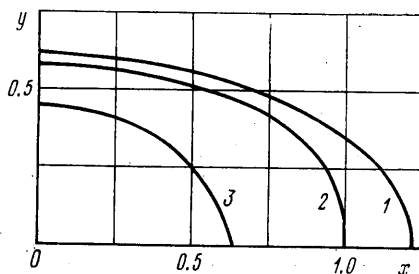
Для проверки этого утверждения и выявления основных закономерностей разрушения тел под действием тепловых потоков от ударного слоя при их гиперзвуковом обтекании газом были проведены расчеты для тел с первоначальной формой в виде половины эллипсоида. Предполагалось, что можно использовать выражение для лучистого потока сильноизлучающего газа [5], а влиянием слоя вдуваемых паров пренебречь. При расчетах размеры полуосей a, b, c выбирались так, что начальный объем тела $V_0 = \frac{2}{3}abc$ оставался во всех вариантах неизменным. На фиг. 2 показано относительное изменение массы M/M_0 разрушающегося тела в зависимости от безразмерного времени

$$\tau = \int_0^t C_H \rho v^3 dt / h \rho_1 R_0, \quad R_0 = (1.5 V_0 / \pi)^{1/3}$$

Расчеты заканчивались в момент образования на теле угловых точек [9, 10]. Кривые 1, 2, 3 на этой фигуре соответствуют $c=0.05R_0, R_0, 2.5R_0$. Линии a отмечают расчеты при $b/a=0.05$, линии b — при $b/a=0.5$, линии c — при $b/a=1.0$. Из этой фигуры следует, что изменение массы до образования угловой точки в основном определяется величиной c и практически не зависит от отношения b/a (при заданном c), т. е. изменение массы зависит от длины c по оси z , а не от его размеров по осям x, y в отдельности. При этом площади миделя тел на фиг. 2 для каждого заданного c равны.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из фиг. 2 следует, что угловые точки образуются для разных вариантов в разные моменты времени, а для изменения массы в большом диапазоне изменения b/a выполняется правило площадей. Это позволяет рассчитать унос массы пространственного тела, не слишком сильно отличающегося от осесимметричного, по формулам, полученным для осесимметричного тела с эквивалентной площадью сечения. В качестве примера найдем изменение массы для осесимметричного эллипсоида вращения ($c=L, a=b=R$) при $q_w \sim n_z^3$. В этом случае, используя (2.4), (2.5), удастся вычислить L_1, L_2, L_3 в (2.6) и получить следующее выражение ($l=R/L$):

$$(3.1) \quad \frac{\Delta M}{M_0} = \frac{(M_0 - M)}{M_0} = 6\tau l^2 [I_1(l) + 4\tau l^2 I_2(l) + 16\tau^2 l^3 I_3(l)]$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — некоторые функции l , которые из-за громоздкости не приводятся. Зависимости $f = \lg I_1, \lg(4l^2 I_2), \lg(16l^3 I_3)$ от l даны на фиг. 3 (кривые 1, 2, 3 соответственно). Резкое и неодинаковое изменение значений этих функций при возрастании l приводит к тому, что роль отдельных слагаемых в (3.1) может быть преобладающей и следствием этого будет разная зависимость $M(\tau)$ при разных l (ближе к линейной, к квадратичной либо к кубической). Отметим, что из (3.1) следует закон подобия для геометрически эквивалентных тел

$$(3.2) \quad R_1 = kR, L_1 = kL, (\Delta M/M_0)_k = (\Delta M/M_0)$$

где индекс 1 обозначает параметры для тела, геометрически подобного исходному. Фиг. 4 иллюстрирует изменение сечения эллипсоида $z=0.5$ м с размерами $b/a=0.5, c=1$ м в разные моменты времени. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\tau=0, 0.26, 0.42$. Из этой фигуры и аналогичных расчетов для других значений a, b и c следует, что исходное тело в разных направлениях поперечного сечения аблирует с разной скоростью. При этом размеры сечения в разных направлениях сближаются. Это связано с разным наклоном точек поверхности к направлению вектора скорости набегающе-

го потока газа, что и задает неравномерное распределение теплового потока по телу.

Следует отметить, что указанные закономерности будут иметь место и при гиперзвуковом движении трехмерного тела в атмосфере планет.

Авторы признательны Г. Г. Черному и Г. А. Тирскому за обсуждение результатов работы.

Поступила 18 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. О сопротивлении тел, близких к телам вращения. Инж. ж., 1961, № 3.
2. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
3. Widhopf G. F. Heat-transfer correlations for blunt cones at angle of attack. J. Spacecraft and Rockets, 1971, vol. 8, No. 9.
4. Chin J. H. Shape change and conduction for nosetips at angle of attack. AIAA Journal, 1975, vol. 13, No. 5, (Рус. перев.: Изменение формы и теплопроводности носовых частей, обтекаемых под углом атаки. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 5.)
5. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
6. Деев А. А., Левин В. А., Пилюгин Н. Н. О форме тела с минимальным полным потоком лучистой энергии к его поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
7. Kondo J., Aihara Y., Tani T., Onij A. The optimum configuration and the optimum reentry trajectory of Space shuttle vehicles. ICAS paper, 1972, No. 27.
8. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М., «Наука», 1970.
9. Мурзинов И. Н. О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
10. Коняев В. Г. Аналитическое исследование изменения формы аблирующих тел при их движении в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 6.
11. Лунев В. В. Некоторые свойства и решения уравнения абляции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965.