

ПАРАМЕТРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ КРЫЛА ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Б. ЛУКАШЕВИЧ

(Ленинград)

Предлагается подход к исследованию пространственного обтекания подводного крыла с учетом весомости жидкости за счет использования метода особенностей, представляющего влияние свободной поверхности воды влиянием безграничного слоя источников. Линейное решение доводится до конца для задачи об определении волнообразования и скосов потока за подводным крылом с заданными параметрами вихревой системы. Проводится оценка влияния на характеристики потока нелинейных факторов, связанных с учетом изменения за счет волнообразования формы выходящих с крыла свободных вихрей. Выясняется распределение скосов в потоке за крылом и приводятся рекомендации по выбору компоновки крыльевой системы с положительным взаимодействием элементов. Результаты расчета сопоставляются с экспериментом.

Традиционный подход к теоретическому исследованию пространственной задачи об обтекании подводного крыла весомой жидкостью характеризуется использованием методов теории потенциала, базирующихся на применении формулы Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S u(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

где u — искомая функция, заданная на поверхности S (поверхности крыла), а G — функция Грина, для определения которой используются граничные условия на свободной поверхности жидкости. Развитию этих методов посвящены работы [1-4].

Полученные в упомянутых работах весьма сложные решения обычно не доводились до конкретных вычислительных схем, приводящих к определению параметров возмущенного потока в любой его точке за подводным крылом. Единственная попытка в этом направлении была предпринята в работе [5]. Однако, даже несмотря на введение в ней достаточно сильных допущений (рассматривался П-образный вихрь и только для случая больших относительных скоростей), удалось получить лишь частичные приближенные данные либо для малых, либо для больших значений расстояния в потоке за крылом.

В работах [6-8] предложены полуэмпирические методы, а в [9] — метод, основанный на гипотезе плоских сечений. Результаты [6-9] относятся только к плоскому горизонтальному подводному крылу с формой в плане, близкой к прямоугольной.

Ниже излагается решение задачи о волнообразовании и скосах потока за подводным крылом, основанное на использовании метода особенностей. Разработанный численный метод решения полученного интегрального уравнения, в принципиальном отношении не зависящий от вида математической модели крыла (несущей линии, вихревой поверхности, распределения особенностей по контуру крыла), достаточно эффективен и позволяет найти конечные результаты для подводного крыла любой формы.

1. Обтекание крыла конечного размаха потоком весомой жидкости со свободной поверхностью рассматривается в системе координат, начало которой помещено на уровне невозмущенной свободной поверхности над крылом, ось x направлена по потоку, ось y — вертикально вверх, ось z — перпендикулярно скорости потока вдоль свободной поверхности (для крыла с формой в плане, симметричной относительно вертикальной про-

дольной плоскости, плоскость xu является плоскостью симметрии). На первом этапе исследование ограничивается линейным приближением.

Решение задачи (см., например, [10]) должно удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности жидкости

$$(1.1) \quad \frac{v_x}{v} = -\frac{1}{Fr^2} y_w = -\frac{1}{Fr^2} \int_{-\infty}^x \frac{v_y}{v} d\xi, \quad y=0$$

и условию непротекания на поверхности крыла

$$(1.2) \quad v_n|_S=0, \quad Fr=v/\sqrt{gb}$$

Здесь условие (1.1), как и все дальнейшие выражения, записано в безразмерных величинах; в качестве характерного линейного размера принята хорда крыла b ; v , v_x , v_y — скорость набегающего потока и составляющие вызванной скорости по осям x и y ; Fr — число Фруда; y_w — ордината возмущенной свободной поверхности воды; S — поверхность крыла; v_n — скорость, нормальная к этой поверхности.

Кроме того, должны выполняться условия отсутствия возмущений на бесконечности перед и под крылом

$$(1.3) \quad v_x, v_y, v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$(1.4) \quad v_x, v_y, v_z \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty$$

$$(1.5) \quad y_w \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty$$

Рассматриваемая задача об исследовании течения в нижнем полупространстве может быть сведена к изучению обтекания крыла безграничным потоком, а перечисленные условия удовлетворены, если по всей плоскости xz (при $y=0$) в потоке разместить слой источников с интенсивностью $q(x, z)$, а крыло и спутную зону за ним представить в виде сочетания особенностей — вихрей $\gamma_0(S)$, источников $q_0(S)$, диполей $m_0(S)$. Такое представление свободной поверхности жидкости и крыла автоматически удовлетворяет условию (1.4).

После записи условий (1.1) и (1.2) через потенциалы введенных особенностей может быть получена система интегральных уравнений для определения неизвестных интенсивностей $q(x, z)$, $\gamma_0(S)$, $q_0(S)$, $m_0(S)$. В принципе решения этой системы, удовлетворяющие условиям (1.3) и (1.5), позволят получить данные и по гидродинамическим характеристикам крыла, и по волновому движению жидкости.

В настоящей работе поставленная задача ограничивается только исследованием формы волновой поверхности и углов скоса потока за крылом. Параметры особенностей, заменяющих крыло и спутную зону потока за ним (вихревой системы), считаются известными, что эквивалентно исключению из рассмотрения условия (1.2). В этом случае система интегральных уравнений приводится к одному уравнению

$$(1.6) \quad \frac{1}{2 Fr^2} \int_{-\infty}^x q(\xi, z) d\xi - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi, \zeta) (x-\xi) d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = F(x, z)$$

$$(1.7) \quad F(x, z) = \frac{v_{hx}(x, 0, z)}{v} + \frac{1}{Fr^2} \int_{-\infty}^x \frac{v_{hy}(\xi, 0, z)}{v} d\xi$$

Здесь v_{hx} и v_{hy} — составляющие скорости, индуцируемой вихревой системой крыла с известными параметрами.

2. Приближенное решение интегрального уравнения (1.6), удовлетворяющее условиям (1.3) и (1.5), основывается на возможности пренебре-

жения для проведения практических расчетов учетом величин, не превышающих принимаемой точности вычислений.

Для конкретного значения принимаемой точности удовлетворение условиям (1.3) и (1.5) эквивалентно заданию такой величины $x=x_{\min}$, до которой изменением невозмущенного уровня свободной поверхности и вызванными скоростями на ней можно пренебречь, т. е. считать

$$(2.1) \quad q(x, z) = 0, \quad x < x_{\min}.$$

Последнее условие обеспечивает возможность записи первого интеграла в левой части уравнения (1.6) в конечных пределах. Бесконечные пределы второго интеграла, подынтегральная функция которого имеет особенность в точке x, z , также могут быть заменены конечными, ограничивающими окрестность этой точки и обеспечивающими принятую точность.

Общее решение интегрального уравнения (1.6), записанного в силу сказанного в конечных пределах, осуществляется в виде последовательного получения локальных решений в ограниченных областях потока (расчетных участках) и сращивании каждого последующего решения с предыдущими.

Локальное решение находится исходя из следующих соображений.

Пусть для всех x , не превышающих некоторого x_0 , интенсивность слоя источников и ординаты свободной поверхности известны (на первом участке при $x_0=x_{\min}$ эти величины заданы в силу (2.1)). Тогда характеристики свободной поверхности жидкости внутри участка

$$(2.2) \quad x_0 < x \leq x_0 + X, \quad z_0 - Z \leq z \leq z_0 + Z$$

(где z_0 соответствует положению середины расчетного участка по ширине) могут быть приближенно найдены в результате решения уравнения (1.6), если задаться $q(x, z) = 0$ в области $x > x_0 + X$ и $z_0 - Z > z > z_0 + Z$.

Точность определенной указанным образом функции $q(x, z)$ будет тем выше, чем дальше от границ участка (2.2) находится точка x, z . При достаточно больших размерах расчетного участка внутри его может быть найдена зона свободной поверхности с допустимыми по точности параметрами

$$(2.3) \quad x_0 < x \leq x_0 + X - \Delta X, \quad z_0 - Z + \Delta Z \leq z \leq z_0 + Z - \Delta Z$$

Сращивание решений, полученных на различных шагах, проводится по границам указанной зоны.

Решение уравнения (1.6) выполняется для расчетного участка (2.2), представленного в виде сетки, состоящей из NM квадратных элементов со сторонами Δx — N столбцов элементов по оси x и M полос по оси z (зона свободной поверхности с допустимыми по точности параметрами (2.3) будет состоять из nm элементов, где $n < N$ и $m < M$). Интенсивность слоя источников внутри элемента полагается постоянной.

Заменив непрерывное распределение интенсивности слоя источников внутри каждого элемента сосредоточенным в его центре и удовлетворив граничным условиям на свободной поверхности в точках x_v, z_u , соответствующих серединам передних сторон элементов слоя, придем к алгебраической системе NM уравнений.

В случае крыла, симметричного относительно оси x , уравнения указанной системы будут иметь следующую форму:

$$(2.4) \quad \frac{\Delta x}{2 \Gamma^2} \sum_{i=1}^{v-1} q_{i,u} - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M q_{i,k} [2(v-i) - 1] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{[(2(\nu-i)-1)^2 + 4(\mu-k)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(2(\nu-i)-1)^2 + 4(\mu+k-2)^2]^{1/2}} \right\} = \\ = \frac{v_{qx}(x_\nu, z_\mu)}{\nu} + \frac{1}{\Gamma^2} y_w(x_0, z_\mu) + F_1(x_\nu, z_\mu)$$

Здесь при $k=1$ второе слагаемое в фигурных скобках должно быть принято равным нулю, $1 \leq \nu \leq N$ и $1 \leq \mu \leq M$; величины $v_{qx}(x_\nu, z_\mu)/\nu$, относительная горизонтальная скорость на свободной поверхности, индуцированная частью слоя источников с найденной интенсивностью, и $y_w(x_0, z_\mu)$ известны из решений при $x \leq x_0$, а функция $F_1(x_\nu, z_\mu)$ определяется выражением (1.7), в котором пределы интегрирования $-\infty, x$ заменены на x_0, x_ν .

Допустимые размеры элемента слоя, участка (2.2) и зоны (2.3) были определены из серии расчетов ординат волновой поверхности за крылом и по результатам сопоставления расчета с экспериментом. Было получено, что длина стороны элемента слоя источников, заменяющего влияние свободной поверхности, должна составлять $\Delta x \leq l/7l$, с протяженностью расчетного участка (2.2) в направлении оси x $N\Delta x \geq 0.8l$ (l — размах крыла).

Для допустимых соотношений размеров участка (2.2) и зоны (2.3) в случае возмущений, симметричных относительно оси x , определены $n=N-4$ и $m=M-2$.

Согласно данным выполненной расчетной оценки отклонения формы распределения циркуляции вихрей по поверхности крыла от первоначально заданной, близкие к возможным отклонениям действительной формы от соответствующей безграничному потоку, не приводят к существенному изменению вычисленных параметров потока за крылом. Поэтому указанная форма распределения циркуляции может быть выбрана на основании известных данных теории крыла в безграничном потоке, а интенсивности вихрей найдены по заданному значению коэффициента подъемной силы крыла.

Численная реализация разработанного метода сводится к последовательным решениям систем уравнений (2.4) начиная от $x_0 = x_{\min}$ с последующим сдвигом абсцисс от x_0 на величину $n\Delta x$ до требуемого x_{\max} (значение x_{\min} должно выбираться таким, чтобы при первом решении системы уравнений (2.4) расчетный участок (2.2) включал себя в исследуемое крыло).

Массив значений интенсивностей слоя источников, полученный указанным образом для необходимой области потока, позволяет определить параметры возмущенного течения (ординаты волновой поверхности y_w и углы скоса α_w) за подводным крылом

$$(2.5) \quad y_w(x_\nu, z_\mu) = \int_{-\infty}^{x_\nu} \frac{v_{kv}(\xi, z_\mu)}{\nu} d\xi - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{\nu-1} q_{i,\mu}$$

$$(2.6) \quad \alpha_w(x, y, z) = \frac{v_{kv}(x, y, z)}{\nu} -$$

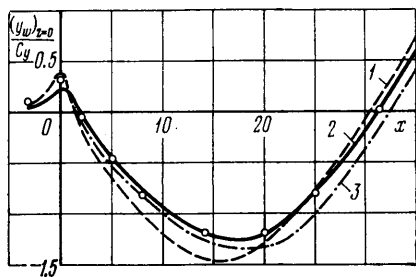
$$- \frac{H}{4\pi} \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{k=M_1}^{M_2} q_{i,k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + H^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}$$

В формуле (2.6) величина H определяет расстояние точки x, y, z от возмущенного уровня свободной поверхности воды, а значения индексов

N_1 , N_2 , M_1 и M_2 соответствуют границам участка слоя, который необходимо учитывать при определении волнового скоса, в продольном (по оси x) и поперечном (по оси z) направлениях от точки $x, 0, z$. Согласно данным проведенной оценки протяженность участка в каждую из указанных сторон от рассматриваемой точки должна составлять $12.5H$.

3. Расчеты выполнялись на ЦВМ «Минск-22» и БЭСМ-6. Для сопоставления теории с экспериментом были использованы материалы В. Т. Соколова, представленные частично в [6].

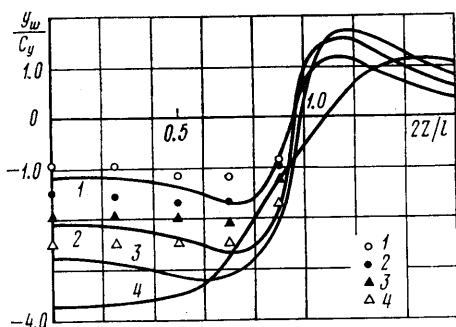
Согласно проведенному сопоставлению данных эксперимента и расчета для различных удлинений, погружений и чисел Фруда способы математического описания крыла в виде несущей линии и вихревой поверхности приводят к практически одинаковым результатам только при относительных погружениях $h \geq 0,6$. Для меньших погружений достаточно близкие к эксперименту данные могут быть получены лишь при использовании математической модели крыла в виде вихревой поверхности. В качестве иллюстрации на фиг. 1 для относительного погружения $h=0,4$ приведены результаты расчета по формуле (2.5) формы диамет-



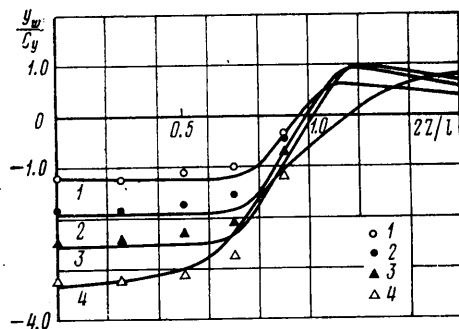
Фиг. 1

рального сечения волновой впадины за крылом с удлинением $\lambda=10$ ($Fr=5$), полученные для различных математических моделей, и нанесены экспериментальные точки; кривая 1 соответствует модели крыла в виде несущей линии, 2 — вихревой поверхности, 3 — П-образному вихрю.

Результаты расчетов позволили установить, что линейное приближение задачи обеспечивает удовлетворительную точность для средних и



Фиг. 2



Фиг. 3

больших погружений крыла ($h > 0,3$). Для малых же относительных погружений погрешности линейной теории обуславливают завышение абсолютных значений расчетных ординат волновой поверхности за крылом по сравнению с экспериментом. На фиг. 2 и 3 представлены расчетные контуры поперечных сечений волновой поверхности при различных абсциссах (кривая 1 — $x=8$, 2 — $x=14$, 3 — $x=20$, 4 — $x=30$) за крылом с удлинением 6.5 для $Fr=13$ и $h=0,15$ и 0.6. Там же нанесены и экспериментальные точки. Как следует из приведенных данных, для относительного погружения $h=0,6$ результаты расчета практически совпадают с экспери-

ментом, а для $h=0.15$ отмечается заметное расхождение указанных данных,

4. В линейном решении рассматриваемой задачи пренебрегалось двумя основными типами нелинейностей: во-первых, квадратами вызванных на свободной поверхности скоростей и конечностью амплитуд волн и, во-вторых, отличием действительной пелены свободных вихрей за крылом от полубесконечных прямолинейных нитей, задаваемых линейной теорией.

В учете первого типа нелинейности нет необходимости, так как длинные продольные волны, составляющие волновую поверхность за крылом, в любом районе потока могут быть отнесены к разряду малых (так, например, величина отношения глубины волновой впадины за крылом к ее длине составляет $1/30-1/60$). Пренебрежение же и вторым типом нелинейности, связанным с расчетом возмущений в потоке, может привести к существенным ошибкам при определении правой части уравнений (2.4), а следовательно, и к искажению конечных результатов решения.

Приближенное решение рассматриваемой задачи в нелинейной постановке было проведено с учетом влияния волнообразования на форму свободных вихрей, сбегających с крыла. Указанное решение отыскивалось в виде ряда последовательных приближений, каждое из которых представляло собой линейное решение волновой задачи (интегрального уравнения (1.6)), и определения по этим данным формы свободных вихрей. Использовалась простейшая схема крыла конечного размаха в виде П-образного вихря. Два свободных вихря, задаваемых этой схемой, представлялись в виде ломаных, состоящих из прямолинейных элементов.

Форма свободных вихрей на каждом шаге решения в свою очередь также определялась методом последовательных приближений. С этой целью в точках, соответствующих концам элементов, вычислялись суммарные скорости v_y и v_z , вызванные как слоем источников (волновые), так и вихревой системой крыла, с учетом данных предшествующего приближения, а координаты указанных точек (для элемента с номером L) находились как

$$\begin{aligned} x_L &= x_{F0} + \Delta x_F L \\ y_L &= y_{F0} + \Delta x_F \sum_{i=1}^L \frac{v_{y,i-1}}{v} \\ z_L &= z_{F0} + \Delta x_F \sum_{i=1}^L \frac{v_{z,i-1}}{v} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где x_{F0} , y_{F0} , z_{F0} — начальные координаты (торец крыла), а Δx_F — длина элемента свободного вихря. При определении погружения точек свободно-го вихря x_F , y_F , z_F от возмущенного уровня свободной поверхности воды

$$H_F = y_w(x_F, z_F) - y_F$$

(значения H_F необходимы для расчета скоростей v_y и v_z в (4.1)) использовалась линейная интерполяция формы волновой поверхности в виде

$$\begin{aligned} y_w(x, z) &= y_w(x_i, z) + (x - x_i) \frac{y_w(x_{i+1}, z) - y_w(x_i, z)}{\Delta x} \\ y_w(x_i, z) &= y_{wi,k} + (z - z_k) \frac{y_{wi,k+1} - y_{wi,k}}{\Delta z} \end{aligned}$$

$$y_w(x_{i+1}, z) = y_{wi+1,k} + (z - z_k) \frac{y_{wi+1,k+1} - y_{wi+1,k}}{\Delta x}$$

$$x_i < x < x_{i+1}, z_k < z < z_{k+1}$$

Переменные с индексами i, k известны по данным численного решения интегрального уравнения (1.6). В качестве исходной формы свободных вихрей принимались полубесконечные прямолинейные нити; величина Δx_F задавалась равной длине стороны элемента слоя источников (учет криволинейности свободных вихрей при расчете вызванных скоростей согласно данным выполненной оценки оказался достаточным на участке от $x_1 = x - 1.15l$ до $x_2 = x + 1.15l$).

Форма свободных вихрей (4.1), полученная после n -го приближения общего решения задачи, использовалась для расчета возмущений на поверхности воды в $(n+1)$ -м приближении. Процесс решения заканчивался тогда, когда максимальные отклонения координат элементов свободных вихрей от данных предыдущего шага не превышали заданной точности (принимавшейся равной 5%).

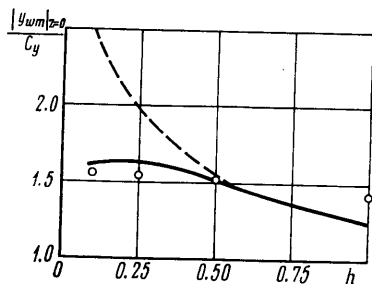
Использованный метод в отличие от метода линейной теории позволил учесть совместное влияние конкретных значений коэффициента подъемной силы, удлинения и погружения крыла на волнообразование и скосы потока.

Решение задачи для малых погружений крыла и значений коэффициента подъемной силы $C_y > 0.1$ указывает на возможность пересечения свободных вихрей с волновой поверхностью воды $H_F \leq 0$ (факт замыкания свободных вихрей подводного крыла на поверхность воды широко известен из экспериментальных наблюдений [8]). Полученный результат, поскольку и свободные вихри и свободная поверхность являются линиями тока, вообще говоря, не должен соответствовать строгому теоретическому решению задачи. Вследствие же приближенности разработанная расчетная схема приводит к пересечению указанных линий тока в районе их интенсивного сближения. Определяемые расчетом координаты вероятного положения точки замыкания вихрей на поверхность воды достаточно хорошо, учитывая схематичность представления крыла, согласуются с экспериментом. Так, например, согласно приведенной в [8] фотографии абсцисса точки замыкания свободного вихря, сбегаящего с малопогруженно-го крыла, составляет 5.7, а полученное расчетом ее значение для тех же параметров течения равно 6.9 (абсциссы выражены в хордах крыла).

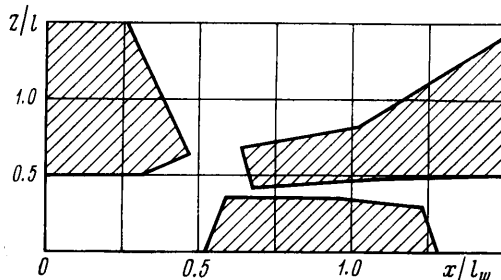
При расчете вызванных свободными вихрями скоростей учитывалась только ограниченная длина вихрей от крыла до точки их замыкания на поверхность воды. Конфигурация завихренной зоны поверхности воды позади точки замыкания и распределение внутри этой зоны вихревой интенсивности, которые должны удовлетворять условию (1.1) и определяться из решения уравнения типа (1.6), специально не рассматривались.

Результаты проведенного решения объясняют причину несоответствия данных линейного расчета и эксперимента для малых погружений крыла: снижение ожидаемой интенсивности волнообразования за крылом при этих условиях обтекания обусловлено тем, что действительная вихревая система крыла со свободными вихрями, замыкающимися на поверхность воды и имеющими поэтому конечную длину, которая вследствие нелинейности задачи зависит от конкретных значений λ, h, C_y и Γ , оказывает меньшее влияние на формирование волн за крылом, чем теоретическая модель с бесконечными вихрями (рассматриваемая, в частности, линейной теорией). На фиг. 4 представлены расчетные зависимости максимальной глубины диаметрального сечения волновой впадины за крылом ($\lambda = 5$,

$C_y=0.2$, $Fr=6$) от погружения крыла с учетом нелинейных факторов (сплошная кривая) и в линейном приближении (пунктир). Приведенные точки соответствуют расчету по эмпирической формуле В. Т. Соколова [6], полученной им в результате обработки проведенного эксперимента. Представленные данные свидетельствуют о хорошем совпадении нелинейного расчета с экспериментом (использованная эмпирическая формула, предназначенная для расчета волнообразования за крыльями с малыми и средними погружениями, несколько завышает действительные значения волновых ординат для больших погружений крыла).



Фиг. 4



Фиг. 5

5. Известно (см., например, [6]), что при выборе компоновок крыльевых систем особенно большое значения приобретает информация об углах скоса за передними крыльями. Указанные скосы отклоняют скорость потока, набегающего на задние крылья, от горизонтали, а подъемную силу, действующую на них, от вертикали. Поскольку при положительных скосах на заднем крыле может быть получена индуктивная тяга, общее сопротивление крыльевой системы за счет взаимодействия несущих элементов может оказаться меньше суммы сопротивлений составляющих ее крыльев, обтекаемых в изолированном состоянии, при одной и той же подъемной силе в обоих случаях. Следовательно, выбор компоновки крыльевой системы нужно осуществлять так, чтобы при заданных условиях обтекания заднее крыло располагалось в зоне положительных скосов потока, индуцируемых передним.

На фиг. 5 приведена построенная по результатам серии расчетов (по формуле (2.6)) для достаточно широкого диапазона погружений и чисел Фруда диаграмма распределения скосов в потоке за подводным крылом (заштрихованные зоны соответствуют положительным скосам). Приведенной диаграммой можно руководствоваться при выборе компоновок крыльев систем. Для определения относительной абсциссы x/l_w (l_w — длина волновой впадины за крылом), характеризующей положение заднего крыла относительно переднего, может быть использована приближенная формула, полученная в работе [5]

$$l_w = 2.12 Fr \sqrt{\lambda}$$

где l_w выражается в хордах крыла.

Поступила 13 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Обтекание тонких тел в трехмерном потоке. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Nishiyama T. Lifting-line theory of the submerged hydrofoil of finite span. J. Amer. Soc. Naval Engrs, vol. 79, No. 4.

3. *Панченко А. Н.* Гидродинамика подводного крыла. Киев, «Наукова думка», 1965.
4. *Гошев Г. А.* Теория подводного крыла конечного размаха произвольной формы. Тр. Ленингр. ин-та водного транспорта, 1962, вып. 33.
5. *Гошев Г. А.* О деформации поверхности воды за подводным крылом конечного размаха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
6. *Егоров И. Т., Соколов В. Т.* Гидродинамика быстроходных судов. Л., «Судостроение», 1971.
7. *Чудинов С. Д.* Приближенный метод определения формы свободной поверхности за подводным крылом. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1967, вып. 58.
8. *Эпштейн Л. А.* Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л., «Судостроение», 1970.
9. *Эпштейн Л. А.* О расчете впадины за подводным крылом конечного размаха и плоской глиссирующей пластинкой. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.
10. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. I. М., Гостехиздат, 1955.