

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ГРАНИЧНОГО ПОТОКА ГАЗА**

ЧАН ВАН ЧАН, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Рассматривается неустойчивость слоя вязкой жидкости, граничащего с газовым потоком. Этому вопросу посвящен ряд работ, однако до сих пор нет единой теории, которая позволила бы объединить и объяснить экспериментальные результаты разных авторов. В данной работе дается решение задачи, пригодное для широкого класса течений жидких пленок при ламинарном и турбулентном течении газа.

1. Пусть слой вязкой жидкости стекает по твердой поверхности под воздействием силы тяжести и газового потока, движущегося над ним. Выберем систему координат с началом на твердой поверхности, ось  $x$  направим вдоль нее, ось  $y$  — в сторону жидкости. Двумерное нестационарное ламинарное течение описывается системой уравнений для жидкости и для газа

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{g}$$

и набором соответствующих граничных условий. Пусть  $h(x, t)$  — уравнение поверхности раздела, тогда на этой поверхности должны выполняться условия непроницаемости поверхности, непрерывности скоростей, а также нормальных и касательных напряжений

$$(1.2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v, \quad \mathbf{V}_1 - \mathbf{V} = 0$$

$$p_1 - p - \frac{\sigma}{R} = [\sigma_{11} n_x^2 + \sigma_{22} n_y^2 + \sigma_{12} n_x n_y]$$

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) n_x n_y + \sigma_{12} (n_y^2 - n_x^2)] = 0$$

$$(1.3) \quad n_x = b, \quad n_y = b \frac{\partial h}{\partial x}, \quad R^{-1} = b^3 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad b = \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

На твердых поверхностях выполняются условия прилипания, если же поток газа неограничен по  $y$ , то выполнится условие перехода в равномерный поток

$$(1.4) \quad \mathbf{V} = 0 \quad (y=0), \quad \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_\infty \quad (y \rightarrow \infty)$$

Здесь  $\mathbf{V}$ ,  $p$ ,  $\sigma_{ik}$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  обозначают скорость, давление, компоненты тензора вязких напряжений, плотность, кинематическую вязкость жидкости. Соответствующие величины для газа помечаются индексом 1, а знак [ ] обозначает разность величин на поверхности раздела,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $R$  — направ-

ляющие косинусы нормали и радиус кривизны поверхности раздела в каждой точке,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Если твердая поверхность наклонена под углом  $\theta$  к горизонту, то  $g_x = g \sin \theta$ ,  $g_y = g \cos \theta$ .

В дальнейшем будем использовать уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) — (1.4) в безразмерном виде, выбрав  $h_*$ ,  $U_*$  в качестве характерных длины и скорости. Уравнения (1.1) имеют простейшее решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), которое зависит только от одной переменной  $y$ . Оно соответствует стационарному течению при постоянной толщине слоя  $h=1$ . Профиль скорости в жидкости будет

$$(1.5) \quad U(y) = 2q(y - 1/2y^2) + \tau y$$

Для профиля скорости в газе  $U_1(y)$ , который будет дан ниже, должны выполняться условия на поверхности раздела  $y=1$

$$(1.6) \quad U_1 = q + \tau, \quad \mu_1 U_1' = \mu U' = \mu \tau, \quad \tau = \tau_* h_* / \mu U_*.$$

Поставим теперь задачу об устойчивости течения с профилем скорости  $U(y)$ ,  $U_1(y)$  к малым возмущениям, периодическим по  $x$ . В силу того что течение двумерное, можно ввести функцию тока для жидкости и газа, возмущения функций тока и поверхности представим в виде

$$(1.7) \quad \Phi(x, y, t) = \varepsilon \varphi(y) \exp \xi, \quad \Phi_1(x, y, t) = \varepsilon \varphi_1(y) \exp \xi, \quad h = \varepsilon \exp \xi, \quad \xi = i\alpha(x - ct)$$

Здесь  $c = c_r + ic_i$ ,  $c_r$  — фазовая скорость возмущения,  $\alpha c_i$  — скорость нарастания амплитуды возмущений с течением времени,  $\alpha$  — волновое число. Подставляя (1.7) в уравнения и граничные условия (1.1) — (1.4) и проводя линеаризацию по  $\varepsilon$  [1], приходим к следующей краевой задаче для уравнения Орра — Зоммерфельда для каждой среды со следующими граничными условиями на поверхности раздела  $y=1$  и твердой поверхности  $y=0$

$$(1.8) \quad \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha \operatorname{Re} [(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] = 0$$

$$(1.9) \quad y=1, \quad \varphi = \varphi_1, \quad \varphi' + U' = \varphi_1' + U_1', \quad \varphi = c - U \\ \mu_1 \mu^{-1} [\varphi_1'' + \alpha^2 \varphi_1 + U_1'' \varphi_1] = \varphi'' + \alpha^2 \varphi + U'' \\ (\alpha \operatorname{Re})^{-1} (\varphi''' - 3\alpha^2 \varphi') - i[(U - c)\varphi' - U' \varphi] = \\ = \rho_1 \rho^{-1} \{ (\alpha \operatorname{Re}_1)^{-1} (\varphi_1''' - 3\alpha^2 \varphi_1') - i[(U_1 - c)\varphi_1' - \\ - U_1' \varphi_1] \} - i[(1 - \rho_1 \rho^{-1}) \cos \theta \operatorname{Fr}^{-1} + \alpha^2 W^{-1}] \\ y=0, \quad \varphi = \varphi' = 0$$

В уравнения (1.8), (1.9) входят безразмерные числа Рейнольдса  $\operatorname{Re} = U_* h_* \nu^{-1}$ , Фруда  $\operatorname{Fr} = U_*^2 (gh_*)^{-1}$ , Вебера  $W = \rho U_*^2 h_* / \sigma$ .

Введем предположения  $\mu_1 / \mu \ll 1$ ,  $\rho_1 / \rho \ll 1$ . При этих условиях масштаб скорости во внешнем течении будет много больше масштаба скорости в жидкой пленке. Амплитуды возмущения скорости удовлетворяют соотношению  $\mu_1 / \mu \varphi_1 \sim \varphi$ . Положим  $\varphi_{10} = \mu_1 / \mu \varphi$ , тогда, не теряя общности, можно считать  $\varphi_{10} \sim 1$ ,  $\varphi \sim 1$ . Учитывая эти оценки, перепишем граничные условия (1.9) на поверхности раздела  $y=1$ , отбросив в них члены порядка  $\mu_1 / \mu$

$$(1.10) \quad \varphi_{10} = 0, \quad \varphi_{10}' = \tau,$$

$$(1.11) \quad \varphi'' + \alpha^2 \varphi + U'' = T, \quad (\alpha \operatorname{Re})^{-1} (\varphi''' - 3\alpha^2 \varphi') - i[(U - c)\varphi' - \\ - U' \varphi] + i[\operatorname{Fr}^{-1} \cos \theta + W^{-1} \alpha^2] = P (\alpha \operatorname{Re})^{-1} \\ T = \varphi_{10}''(1) + \alpha^2 \varphi_{10}(1), \quad P = \varphi_{10}'''(1) - 3\alpha^2 \varphi_{10}'(1)$$

Можно видеть, что в силу принятых предположений задачи для жидкости и газа формально разделились: для газа получили замкнутую задачу, которая включает в себя уравнение (1.8), граничные условия (1.10) при  $y=1$  и условия прилипания или затухания возмущений (1.4) вдали от поверхности раздела; для жидкости имеем уравнение (1.8), граничные условия (1.11) при  $y=1$ , в которых величины  $T, P$  вычисляются на основе решения задачи для газа, условия прилипания (1.4). Обе краевые задачи включают в себя собственное число  $s$ , которое заранее неизвестно.

Рассмотрим задачу для газа. Положим  $\eta=(y-h_*)/a$ , где  $a$  — характерный размер для потока газа, и зададим скорость основного течения в газе  $U(y)$  в виде разложения

$$U_1 - U_n = (A_1 \eta + A_2 \eta^2 + \dots) U_\infty / U_* \quad (A_i \sim 1)$$

Перейдем в последнем разложении к переменной  $\xi=(y-h_*)/h_*=y^{-1}$ . Легко видеть, что  $\eta=\xi d$ ,  $d=h_*/a$ , поэтому

$$(1.12) \quad U_1 - U_n = \mu \mu_1^{-1} \tau (y-1) + A_2 \mu (A_1 \mu_1)^{-1} \tau d (y-1)^2 + \dots$$

Обозначая  $\omega = \varphi_{10}'' - \alpha^2 \varphi_{10}$ , приведем (1.8) к виду

$$\omega'' - \alpha^2 \omega - i\alpha \operatorname{Re}_1 \mu \mu_1^{-1} \{ [\mu_1 \mu^{-1} (U_n - c) + \tau (y-1) + d\tau (y-1) (A_2 A_1^{-1} (y-1) + \dots)] \omega - \tau d (2A_1 A_2^{-1} + \dots) \varphi_{10} \} = 0$$

Для тонкого слоя жидкости  $d \ll 1$ , поэтому главным членом в фигурных скобках остается  $\tau(y-1)$  и с точностью до членов порядка  $\mu_1/\mu$ , получим отсюда уравнение

$$(1.13) \quad \omega'' - [\alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re} \nu \mu (v_1 \mu_1)^{-1} \tau (y-1)] \omega = 0$$

Таким образом, в уравнение входит только линейная часть профиля  $U_1(y)$ , которая определяется значением  $\tau$ .

Решив уравнение  $\varphi_{10}'' - \alpha^2 \varphi_{10} = \omega$  с условием (1.4), найдем функцию тока в виде

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2\alpha} \left[ e^{\alpha \xi} \int_0^{\xi} e^{-\alpha t} \omega(t) dt - e^{-\alpha \xi} \int_0^{\xi} e^{\alpha t} \omega(t) dt \right] + B e^{-\alpha \xi}$$

$$B = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \omega(t) dt$$

Отсюда легко получить  $T = \omega(0)$ ,  $P = \omega'(0) - 2\alpha^2 \tau$ . Функцию  $\omega(\xi)$  необходимо определить из (1.13) с условиями (1.10)

$$(1.14) \quad \omega \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty), \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \omega(t) dt = \tau$$

Допустим, что волны длинные,  $\alpha^2 \ll 1$ . Пусть  $\delta^{-3} = \alpha \operatorname{Re} \tau \nu \mu (v_1 \mu_1)^{-1}$ . Пренебрегая величиной  $\alpha^2$ , получим из (1.13) уравнение

$$(1.15) \quad \Omega''(\eta) - i\eta \Omega(\eta) = 0, \quad \eta = \xi / \delta$$

Подобное уравнение рассматривалось также в [2]. Необходимо найти решение уравнения (1.15), затухающее при  $\eta \rightarrow \infty$ . Решение проводится численно, подбором находим начальные условия  $\Omega(0)$ ,  $\Omega'(0)$ , обеспечивающие выполнение условия  $\Omega(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$   $\Omega(0) = -1.07437i$ ,  $\Omega'(0) = -0.39161 + 0.6783i$ . Таблицу значений  $\Omega(\eta)$  легко получить интегрируя

(1.15) с этими начальными данными методом Рунге — Кутта. Уже при  $\eta=6.5$  значения  $\Omega$  имеют порядок  $10^{-4}$ . Чтобы выполнялось условие (1.14), подберем константу  $A$  так:

$$A^{-1} = \delta \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha \delta \eta \Omega(\eta)} d\eta$$

Тогда легко найдем

$$T = \tau A \Omega(0), P = \tau (\delta^{-1} A \Omega'(0) - 2\alpha^2)$$

Обратимся теперь к задаче для слоя жидкости. Необходимо найти решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.11), (1.4). Следуя [1], применим прямой метод. Пренебрегая в (1.8), (1.11) членами порядка  $\alpha^2$ ,  $\alpha^4$ , интегрируя (1.8) по  $y$  от  $y$  до 1, получим с учетом граничного условия (1.11)

$$(1.16) \quad \varphi'''(y) - i\alpha \operatorname{Re} [(U-c)\varphi'(y) - U'(y)\varphi(y)] = P - i\alpha \operatorname{Re} S$$

Ищем приближенное решение для  $\varphi(y)$  в виде

$$(1.17) \quad \varphi(y) = ay^2 + by^3$$

Тогда (1.4) автоматически выполняется, а из третьего условия (1.9) и первого условия (1.11) получим

$$a = 1/4 [6(c - U_n) - (T - U_n'')], \quad b = 1/4 [T - U_n'' - 2(c - U_n)]$$

Подставляя (1.17) в (1.16) и интегрируя получающееся выражение по  $y$  от 0 до 1, получим уравнение для собственного значения

$$(1.18) \quad (U_n - c)^2 - (U_n - c) \left( \frac{3i}{\alpha \operatorname{Re}} + \frac{7\tau}{20} + \frac{2U_n}{5} \right) + \\ + (T - 2U_n + 2\tau) \left( \frac{3i}{2\alpha \operatorname{Re}} + \frac{\tau}{120} + \frac{U_n}{30} \right) - \frac{iP}{\alpha \operatorname{Re}} - S = 0 \\ S = (1 - \rho_1 \rho^{-1}) \operatorname{Fr}^{-1} \cos \theta + W^{-1} \alpha^2$$

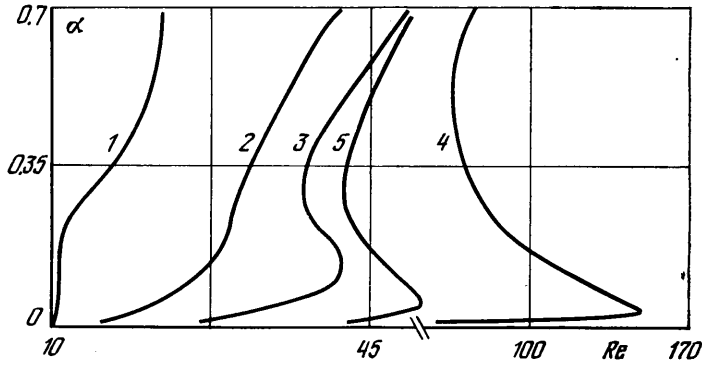
Определением собственного значения  $s$  завершается решение задачи об устойчивости течения к малым возмущениям. В частности, положив  $s = c_r$ , получим из (1.18) в конечном виде уравнение нейтральной кривой в плоскости  $\alpha$ ,  $\operatorname{Re}$  и выражение для фазовой скорости.

2. Применим полученное решение к исследованию устойчивости некоторых конкретных течений.

Рассмотрим вязкую пленку, стекающую по наклонной плоскости под действием только силы тяжести. В этом случае  $P=0$ ,  $\tau=0$ ,  $T=0$ . Положим  $U_n = h \cdot \rho g \sin \theta (2\mu)^{-1}$ , тогда профиль скорости  $U = 2y - y^2$  и из (1.18) можем найти  $s$ . Для нейтральных возмущений получаем фазовую скорость волн  $c_r = 2$  и уравнение нейтральной кривой [1]

$$\frac{\gamma \sqrt{2} \alpha^2}{\operatorname{Re}^{3/2} (\sin \theta)^{3/2}} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{Re}} = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho \nu^{1/2} g^{1/2}}$$

Для оценки точности определения собственных чисел по формуле (1.18) были проведены решения исходной задачи (1.8), (1.4), (1.11) методом конечных разностей [3]. Сравнение этих результатов для случая  $\theta=90^\circ$ ,  $\alpha=0.011$  проводится ниже. При каждом  $\operatorname{Re}$  первая пара значений  $c_r$ ,  $c_i$  получена по формуле (1.18), а вторая — численно. Видно, что метод



Фиг. 1

обеспечивает вполне хорошую точность при значениях  $\alpha$ ,  $Re$ , удовлетворяющих исходным предположениям.

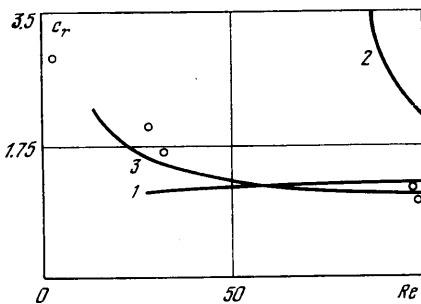
$Re$	$c_r$	$c_i$	$c_r$	$c_i$
10	1.9959	0.0480	1.9938	0.0483
20	1.9751	0.1158	1.9784	0.1149
50	1.9082	0.2154	1.8913	0.2271
70	1.8387	0.2647	1.8289	0.2726

Рассмотрим теперь вязкую пленку на горизонтальной поверхности, увлекаемую свободным потоком газа, занимающего полупространство  $y \geq h_*$ . За характерную скорость выберем  $U_* = \tau \cdot h_* \cdot \mu^{-1}$ , тогда профиль скорости  $U = y$ ,  $\tau = 1$ ,  $U_n = 1$ ,  $U''(1) = 0$ .

Из (1.18) находим

$$(2.1) \quad (1-c)^2 - (1-c) \left( \frac{3i}{\alpha Re} + \frac{3}{4} \right) + T \left( \frac{3i}{2\alpha Re} + \frac{1}{24} \right) - \frac{iP}{\alpha Re} - S = 0$$

Можно считать независимыми параметрами толщину слоя  $h_*$ , волновое число  $\alpha$ , число  $Re$ . Формула (2.1) позволяет построить при каждом значении  $h_*$  нейтральную кривую и кривые нарастания возмущений. На



Фиг. 2

Фиг. 1 даны нейтральные кривые для слоя воды, увлекаемого потоком воздуха. Кривые 1-4 соответствуют пленкам толщиной  $h_* = 0.016, 0.026, 0.097, 0.209$  см. В каждом случае область неустойчивости ограничена нейтральной кривой и осью  $\alpha = 0$ . Для тонких пленок ( $h_* \sim 0.02$  см) нейтральная кривая изменяется в зависимости от  $\alpha$  монотонно. Для средних и толстых пленок эта кривая имеет локальные минимум и максимум, область неустойчивости можно

разделить на две части, одна из которых соответствует малым значениям числа  $\alpha$  от начала координат до точки локального максимума, а другая — большим значениям числа  $\alpha$ . По характеру изменения  $c_r$  эти части соответствуют разным классам волновых возмущений, различающихся следующими свойствами: во-первых, возмущения первого класса распространяются гораздо медленнее, чем возмущения второго класса, во-вторых, при

$\alpha = \text{const}$  и увеличении  $Re$  скорость распространения возмущений первого класса увеличивается, а второго класса уменьшается. Это видно на фиг. 2, на которой для пленки толщиной  $h_* = 0.209$  см кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\alpha = 0.005, 0.26$ .

В экспериментальной работе [4] обнаружены только волны второго класса, для которых  $\alpha \geq 0.1$ . Сравнение экспериментальных [4] и расчетных значений  $c_r$  при  $h_* = 0.02$  см,  $\alpha = 0.2$  дается на фиг. 2: кривая 3 — расчет, точки — эксперимент. Согласование при  $Re > 10$  хорошее.

Исследуем теперь устойчивость вязкой пленки, граничащей с градиентным газовым потоком в горизонтальном канале высокой  $H + h_*$ . Решая уравнение (1.1) для основного стационарного течения с граничными условиями на поверхности раздела (1.2), получаем профиль скорости

$$(2.2) \quad U(y) = [my - d(y^2 - 2y)](m+d)^{-1} \\ U_1(y) = [md + 2d^2y - d^2y^2 + 1 - d^2 - m - md](1-m)^{-1}$$

В качестве характерной скорости здесь взята скорость на поверхности жидкости

$$U_* = p'h_*^2(1+d)[2\mu d(1+d\mu_1\mu^{-1})]^{-1}, \quad d = h_*H^{-1}, \\ m = (1-d^2\mu_1\mu^{-1})(1+d\mu_1\mu^{-1})^{-1}$$

где  $p'$  — градиент давления. Легко видеть, что в этом течении

$$U_n = 1, \quad \tau = m(m+d)^{-1}$$

Для собственного числа  $s$  из (1.18) получаем уравнение

$$(2.3) \quad (1-c)^2 - (1-c) \left[ \frac{3i}{\alpha Re} + \frac{2}{m+d} \left( \frac{3m}{8} + \frac{d}{5} \right) \right] + \\ + T \left[ \frac{3i}{2\alpha Re} + \frac{1}{m+d} \left( \frac{m}{24} + \frac{d}{30} \right) \right] + \frac{3di}{\alpha Re(m+d)} + \\ + \frac{d}{(m+d)^2} \left( \frac{m}{12} + \frac{d}{15} \right) - \frac{iP}{\alpha Re} - S = 0$$

Чтобы оценить точность применяемого метода определения  $s$ , задачу для газа решим также численным методом. Примем для  $\varphi$  выражение (1.17), тогда можно найти  $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ , а затем из граничных условий (1.9) определить  $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \varphi_1'''$  на поверхности раздела. Эти значения выражаются линейно относительно двух констант ( $\varphi''(0), \varphi'''(0)$ ). Теперь для газа решаем задачу с начальными данными при  $y=1$ . При численном интегрировании профиль  $U_1(y)$  берется в точном виде (2.2). Решения должны удовлетворять условиям прилипания газа к стенке канала  $\varphi_1(1+d^{-1}) = \varphi_1'(1+d^{-1}) = 0$ . Эти условия позволяют определить одну из двух неизвестных констант и собственное число  $s$ . Результаты вычисления  $s$  двумя методами для пленки толщиной  $h_* = 0.08$  см в канале высотой 2 см приведены ниже. Сравнение показывает хорошее согласование результатов.

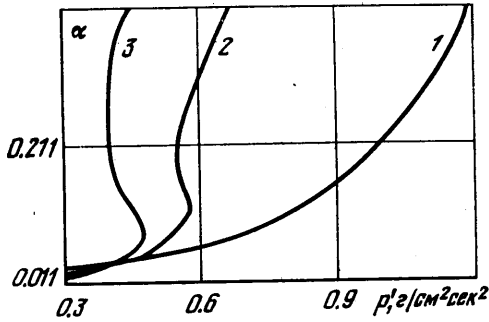
Re	Re <sub>1</sub>	c <sub>r</sub>	c <sub>i</sub>	c <sub>r</sub>	c <sub>i</sub>
1.2	611	1.3522	-17.0807	1.1923	-17.1480
1.5	763	1.3704	-13.4893	1.2045	-13.6940
1.75	891	1.3862	-11.1258	1.2145	-11.3900
2.5	1273	1.7147	-8.0241	1.2328	-8.1605

Характер неустойчивости здесь в основных чертах такой же, как в свободном потоке. Для сравнения на фиг. 1 изображена нейтральная кривая 5 для пленки толщиной  $h_* = 0.097$  см в канале и кривая 3 для такой же пленки в свободном потоке. Для пленок больших и средних толщин ( $0.05 \text{ см} \leq h_* \leq 0.3 \text{ см}$ ) область неустойчивости также делится на две части, соответствующие двум типам возмущений. При одинаковой толщине пленка в градиентном потоке теряет устойчивость при большем значении  $Re$ , чем пленка в свободном потоке. При одинаковых значениях  $\alpha, Re$

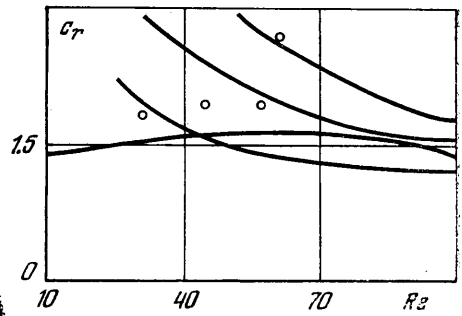
фазовая скорость почти одинакова, а скорость нарастания в первом случае заметно меньше, чем во втором.

На фиг. 3 представлены нейтральные кривые 1, 2, 3 для пленок воды толщиной  $h_* = 0.05, 0.08, 0.11$  см в плоскости  $\alpha, p'$ . Области неустойчивости заключены между нейтральными кривыми и осью  $\alpha=0$ . Видно, что область неустойчивости по  $p'$  для тонкой пленки меньше, чем для толстой, за исключением области малых значений  $\alpha$ . Это означает, что тонкая пленка неустойчива при большей скорости газа, чем толстая.

Экспериментальные результаты по устойчивости пленки в канале получены в работах [5-7]. Качественно они согласуются с расчетными. В частности, обнару-



Фиг. 3



Фиг. 4

жены два типа волновых возмущений, причем при малых значениях числа  $Re$  существуют главным образом волны первого класса, при  $Re$  порядка 30-50 появляются волны второго класса и в этом диапазоне и те и другие волны существуют одновременно. При дальнейшем увеличении  $Re$  в основном существуют волны второго класса. Относительно быстрых волн (волн второго класса) тонкая пленка более устойчива, чем толстая.

На фиг. 4 дается сравнение теоретических и экспериментальных значений фазовой скорости (1-4 в порядке возрастания  $c_T$ ). Кривые 1, 2, 3 соответствуют пленке толщиной  $h_* = 0.05$  см, кривая 4 - пленке толщиной  $h_* = 0.11$  см, причем кривая 1 построена при  $\alpha = 0.01$ , кривые 2, 4 - при  $\alpha = 0.131$ , кривая 3 - при  $\alpha = 0.411$ . Точками обозначены экспериментальные результаты [5, 7]. Для них  $\alpha$  заключены в диапазоне  $0.1 \leq \alpha \leq 0.45$ .

3. Применим теперь изложенный выше подход к изучению устойчивости жидкой пленки, увлекаемой турбулентным потоком газа в горизонтальном канале под воздействием градиента давления  $p'$ . Введем эффективные коэффициенты вязкости для газа и жидкости ( $\mu_* = \mu + \mu_t$ ,  $\mu_{1*} = \mu_1 + \mu_{1t}$ ,  $\mu_t, \mu_{1t}$  - турбулентные вязкости). Будем описывать совместное течение жидкости и газа уравнениями (1.1) и граничными условиями (1.2), (1.4), в которых коэффициенты молекулярной вязкости  $\mu, \mu_1$  заменим на  $\mu_*, \mu_{1*}$ . Примем предположения [8]  $\mu_t \ll \mu$ , тогда  $\mu_t$  можно отбросить и считать течение в пленке ламинарным.

Пусть  $h_*$  - толщина пленки,  $2H + h_*$  - высота канала. Для основного усредненного течения имеем следующие уравнения и граничные условия:

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_* \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = p', \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) = p'$$

$$(3.2) \quad U_1(h_*) = U(h_*), \quad \mu_* \frac{\partial U_1}{\partial y} = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=h_*},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0, \quad U(0) = 0$$

Здесь  $\mu_{1*}$  является функцией от  $y$ .

Выбрав  $h_*$ ,  $U_* = -p'(\frac{1}{2}h_*^2 - h_*H) / \mu$  в качестве характерных величин, найдем профиль скорости в пленке

$$U(y) = [2y - d(y^2 - 2y)](2+d)^{-1}$$

Видно, что  $U_*$  равна скорости на поверхности раздела,  $U_n = 1$ ,  $\tau = (2+2d)(2+d)^{-1}$ . Далее будем считать, что возмущения потока газа, вызываемые волнами (1.7) на поверхности жидкости, не вносят существенных изменений в  $\mu_{1t}$  и вкладом их в баланс вязких и нормальных сил на поверхности раздела можно пренебречь. При этих условиях для возмущений в жидкости будем иметь краевую задачу (1.8), (1.11),  $\varphi = \varphi' = 0$  при  $y=0$  с неизвестными величинами  $P$ ,  $T$ . Как было установлено в [9], вкладом  $P$  можно пренебречь по сравнению с  $T$ . Тогда из (1.18) получаем уравнение для собственного значения  $c$

$$(3.3) \quad (1-c)^2 - (1-c) \left[ \frac{3i}{\alpha \text{Re}} + \left( \frac{3}{2} + \frac{2d}{5} \right) (2+d)^{-1} \right] - \\ - \frac{T}{4} \left[ \frac{1}{2+d} \left( \frac{1}{3} + \frac{2d}{15} \right) + \frac{6i}{\alpha \text{Re}} \right] - S = 0$$

Найдем теперь  $T$ . В силу сделанных предположений для  $T$  имеем

$$(3.4) \quad T = \left( \eta \mu_{1t} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \eta \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=h_*}$$

Следуя [8], представим

$$\mu_{1t} = \rho_1 \kappa^2 (y+l_0)^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|$$

где  $\kappa$  — универсальная константа Кармана ( $\kappa=0.4$ ),  $l_0$  — путь перемешивания по Прандтлю на поверхности раздела. Пользуясь уравнением  $\mu_{1t} \partial U_1 / \partial y = p' y - p' H$ , полученным из (3.1) и (3.2), можно вычислить  $\mu_{1t}$ ,  $\partial^2 U_1 / \partial y^2$  через  $p'$ ,  $H$ ,  $l_0$ ,  $\kappa$ ,  $\mu_1$ ,  $\rho_1$ . Подставляя эти величины в (3.4), после приведения к безразмерной форме полученного выражения получаем

$$(3.5) \quad T = \frac{2d}{2+d} - \frac{4d\nu_1}{M \text{Re} \nu} - \frac{16\nu_1 \rho \kappa^2 L_0 (2-L_0 d)}{\text{Re}^2 \nu \rho_1 (2+d)^2 N M^2} - \\ - \frac{16\kappa^2 L_0^2 d \rho}{\text{Re} (2+d)^2 M^2 \rho_1} - \frac{64\kappa^4 L_0^3 (2-L_0 d) \rho}{(2+d)^2 \text{Re}^2 N M^3 \rho_1} \\ d = h_* H^{-1}, L_0 = l_0 h_*^{-1}, M = N + \nu_1 (\nu \text{Re})^{-1} \\ N = \left( \frac{1}{\text{Re}^2} \left( \frac{\nu_1}{\nu} \right)^2 + \frac{8\kappa^2 L_0^2 \rho}{\text{Re} (2+d) \rho_1} \right)^{1/2}$$

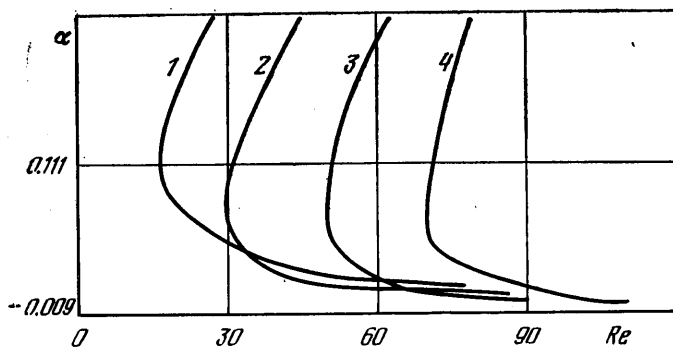
В [8] для случая воздух — вода получили для  $L_0$  значение 0.25. Здесь это значение принимается для вычисления  $T$  по (3.5).

Для нескольких пленок воды в канале высотой 2 см были проведены расчеты собственного числа  $c$  по (3.3). На фиг. 5 представлены нейтральные кривые 1—4 для пленок толщиной  $h_* = 0.02, 0.05, 0.08, 0.11$  см соответственно. В каждом случае область неустойчивости ограничена двумя ветвями кривой. Расчеты показывают, что в случае турбулентного газового потока пленка теряет устойчивость позже, чем в случае ламинарного потока газа. Этот результат согласуется с экспериментальными наблюдениями в [6, 9]. По результатам вычислений также видно, что в пленке, граничащей с ламинарным потоком, возмущение растет гораздо быстрее,



чем при турбулентном потоке. Что касается фазовой скорости, то она почти одинакова для пленок в том и другом случае.

В заключение отметим, что в изложенной теории при рассмотрении устойчивости пленки существенно учитывается дрейфовое течение в ней,



Фиг. 5

вызываемое потоком газа, и задача ставится в общей форме, как задача об устойчивости течения газ — жидкость. Этих обстоятельств не было в [10, 11], где фактически рассмотрена только устойчивость профиля газового потока над пленкой.

Поступила 18 X 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М., Изд-во МГУ, 1973.
2. Bordner G. L., Nayfeh A. H., Saric W. S. Stability of liquid films adjacent to compressible streams. *Z. angew. Math. und Phys.*, 1975, vol. 26, No. 6.
3. Thomas L. H. The stability of plane Poiseuille flow. *Phys. Rev.*, 1953, vol. 91, No. 4.
4. Сэррих, Маршалл. Экспериментальное изучение устойчивости тонкого слоя жидкости, омываемого сверхзвуковым потоком. *Ракетная техника и космонавтика*, 1971, т. 9, № 8.
5. Craik A. D. D. Wind-generated waves in thin liquid films. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 26, pt 2.
6. Cohen L. S., Hanratty J. Generation of waves in the concurrent flow of air and liquid. *A. I. Ch. E. Journal*, 1965, vol. 11, pt 1.
7. Гугучкин В. В. Волновое движение пленок жидкости, текущих совместно с газовым потоком. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 4.
8. Семенова И. П., Якубенко А. Е. Взаимодействие турбулентного потока газа с жидкой пленкой. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 2.
9. Plate E. J., Chang P. C., Hidy G. M. Experiments on the generation of small water waves by wind. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 35, pt 4.
10. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, pt 4.
11. Benjamin B. T. Shearing flow over wavy boundary. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, pt 2.