

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
НЕУСТОЙЧИВОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ВЫТЕСНЕНИЯ

П. В. ИНДЕЛЬМАН, Р. М. КАЦ, М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Вопрос об устойчивости вытеснения одной жидкости другой в пористой среде имеет почти тридцатилетнюю историю [1-11]. При аналитических исследованиях этого явления в указанных работах был использован метод малых возмущений, широко применяемый в линейной теории гидродинамической неустойчивости. Установлено, что характер процесса вытеснения (устойчивость — неустойчивость) зависит от отношения подвижностей, разности плотностей жидкостей и уровня капиллярных сил. Однако в перечисленных публикациях исследуется только начальная эволюция малых возмущений.

Имеется значительное число экспериментальных работ (особенно по вытеснению смешивающихся жидкостей), известны также работы по численному моделированию неустойчивых фильтрационных течений [5, 7]. Тем не менее вопрос о влиянии неустойчивости на технологические показатели вытеснения, в частности на такой важный, как нефтеотдача, до сих пор остается открытым.

Целью данной работы является выяснение влияния неустойчивости на основные показатели процесса вытеснения с помощью конечно-разностных методов.

Изучались неустойчивые процессы двухфазного течения несмешивающихся жидкостей (модель Баклея — Леверетта) и поршневого вытеснения (модель Лейбензона — Маскета). Последнее может служить моделью вытеснения смешивающихся жидкостей.

1. Рассмотрим вытеснение несмешивающихся жидкостей в модели Баклея — Леверетта. Система уравнений, описывающая двухфазное плоское течение несмешивающихся жидкостей без учета гравитационных сил и капиллярного давления, имеет вид

$$(1.1) \quad mh \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla [w\varphi(s)] = 0$$

$$(1.2) \quad w = -kh[f_1(s)\mu_1^{-1} + f_2(s)\mu_2^{-1}] \nabla p, \quad \nabla w = 0$$

$$\varphi(s) = \frac{\mu_0 f_1(s)}{\mu_0 f_1(s) + f_2(s)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Здесь $h(x, y)$ — мощность пласта, $k(x, y)$ — абсолютная проницаемость, $f_1(s)$, $f_2(s)$, μ_1 , μ_2 — относительные фазовые проницаемости и вязкости для воды и нефти соответственно, m — пористость, $p(x, y, t)$ — давление, $s(x, y, t)$ — водоносимость, t — время.

Рассматривается вытеснение нефти водой из пласта прямоугольной формы, на противоположных сторонах которого (входе и выходе) задается постоянный перепад давления, боковые стороны непроницаемы

$$(1.3) \quad \begin{aligned} s(x, y, 0) &= s_0(x, y), \quad s(0, y, t) = s_t \\ p(0, y, t) &= p_1, \quad p(l, y, t) = p_2, \quad p_1 > p_2 \\ w_v(x, 0, t) &= w_v(x, b, t) = 0 \end{aligned}$$

Здесь l и b — соответственно длина и ширина пласта.

Невозмущенным течением в однородном пласте ($k=\text{const}$) будем считать такое течение, для которого начальное распределение водонасыщенности в пласте всюду постоянно, т. е. $s_0(x, y) = s_0 = \text{const}$. Очевидно, в этом случае решение системы (1.1)–(1.3) будет зависеть только от x и t .

Будем изучать влияние начального возмущения на процесс вытеснения нефти водой. Для этого система (1.1)–(1.3) решается численно с использованием конечно-разностных методов на разностной сетке x_i, y_i, t^n ($x_i = i\Delta x, y_i = j\Delta y, t^{n+1} = t^n + \Delta t^n, i=0, 1, \dots, N_1, j=0, 1, \dots, N_2, n=1, 2, \dots$).

Систему уравнений аппроксимируем с погрешностью $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^n)$ следующими разностными уравнениями в дивергентной форме:

$$(1.4) \quad (\Delta y)^2 [g_{i+\frac{1}{2},j}^n (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - g_{i-\frac{1}{2},j}^n (p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n)] + \\ + (\Delta x)^2 [g_{i,j+\frac{1}{2}}^n (p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - g_{i,j-\frac{1}{2}}^n (p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n)] = 0$$

$$(1.5) \quad m\Delta x h_{i+\frac{1}{2},j} [s_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - (s_{i+1,j}^n + s_{i,j}^n)/2] + \\ + w_{i+\frac{1}{2},j}^n [\varphi(s_{i+1,j}^n) - \varphi(s_{i,j}^n)] \Delta t^* = 0$$

$$m\Delta y h_{i,j+\frac{1}{2}} [s_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (s_{i,j+1}^n + s_{i,j}^n)/2] + w_{i,j+\frac{1}{2}}^n [\varphi(s_{i,j+1}^n) - \varphi(s_{i,j}^n)] \Delta t^* = 0$$

$$(1.6) \quad mh_{i,j} (s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n) / \Delta t^n + [w_{i+\frac{1}{2},j}^n \varphi(s_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) - w_{i-\frac{1}{2},j}^n \times \\ \times \varphi(s_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}})] / \Delta x + [w_{i,j+\frac{1}{2}}^n \varphi(s_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - w_{i,j-\frac{1}{2}}^n \varphi(s_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})] / \Delta y = 0$$

$$g_{i,j}^n = h_{i,j} k_{ij} [f_1(s_{i,j}^n) / \mu_1 + f_2(s_{i,j}^n) / \mu_2]$$

$$g_{i+\frac{1}{2},j}^n = 2g_{i,j}^n g_{i+1,j}^n / (g_{i,j}^n + g_{i+1,j}^n), \quad g_{i,j+\frac{1}{2}}^n = 2g_{i,j}^n g_{i,j+1}^n / (g_{i,j}^n + g_{i,j+1}^n)$$

$$w_{i+\frac{1}{2},j}^n = -g_{i+\frac{1}{2},j}^n (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) / \Delta x, \quad w_{i,j+\frac{1}{2}}^n = -g_{i,j+\frac{1}{2}}^n \times \\ \times (p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) / \Delta y$$

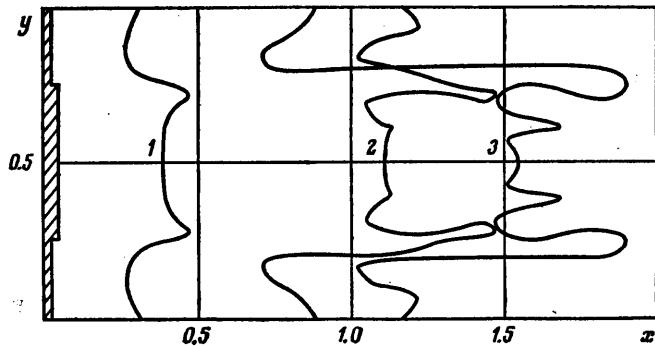
$$h_{i+\frac{1}{2},j} = (h_{i,j} + h_{i+1,j}) / 2, \quad h_{i,j+\frac{1}{2}} = (h_{i,j} + h_{i,j+1}) / 2$$

Двухшаговая схема (1.5), (1.6), использующая пять сеточных узлов при $t=t^n$, является одним из возможных обобщений на двумерный случай схемы Лакса – Вендроффа [12] и применяется с завышением временного слоя ($\Delta t^* > 0.5\Delta t^n$). Из анализа устойчивости схемы для двумерного линеаризованного уравнения была определена область значений чисел Куранта для промежуточного и основного слоев, для которых разностная схема устойчива и монотонна.

Выбором чисел Куранта из этой области удается получить удовлетворительное по точности решение. В частности, это подтверждается численным решением плоской задачи о площадном заводнении при сопоставлении его с независимым эталоном [13].

2. Серии расчетов проводились при различных соотношениях вязкостей как для однородного по проницаемости пласта, так и для неоднородного. При рассмотрении неоднородного пласта разностная сетка 60×30 разбивалась на квадратные блоки, содержащие по 25 разностных ячеек. Для каждого блока (I, J) задавалось постоянное значение проницаемости, определяемое логнормальным законом распределения независимо от значений проницаемости в остальных блоках. В таблице приводится выборка абсолютных проницаемостей по блокам со средней проницаемостью 1.16 дарси и средним квадратическим отклонением 0.35 дарси. В случае

однородного пласта на входном сечении при $t=0$ задавалось начальное возмущение водонасыщенности в виде «ступеньки», ширина которой равна $0.5b$, а длина — одному шагу разностной сетки (фиг. 1). Для неоднородного пласта возмущение водонасыщенности не задавалось. Расчеты проводились для $l=2 \text{ км}$, $b=1 \text{ км}$, $p_1=200 \text{ ат}$, $p_2=100 \text{ ат}$, $h=10 \text{ м}$ и следующих вариантов: 1— $s_0=0$, $f_1=s^2$, $f_2=(1-s)^2$; 2— $s_0=0.1$, $f_1=s^2$, $f_2=(1-s)^2$; 3— $s_0=0.2$, $f_1=(s-0.2)^3$, $f_2=[(1-s)/0.8]^3$; 4— $s_0=0.3$, $f_1=(s-0.2)^3$, $f_2=[(1-s)/0.8]^3$.



Фиг. 1

В вариантах 1—4 $\mu_0=20$, пласт однородный с $k=0.5 \text{ дарси}$. В пятом варианте отношение вязкостей $\mu_0=50$, пласт неоднороден, фазовые проницаемости те же, что в варианте 1.

Пусть τ и η — закачанный объем воды в поровых объемах и нефтеотдачи. На фиг. 1 показано положение фронтовой насыщенности $s=0.218$ для моментов времени $\tau=0.06$, 0.19 и 0.27 (кривые 1—3 соответственно).

Анализ поля скоростей в начальный момент времени показывает, что характер распределения скорости фильтрации вдоль невозмущенной границы раздела зависит от отношения вязкостей. Если вязкость вытесняющей

J	$I=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	0.62	1.13	0.90	0.98	1.33	1.27	0.89	0.90	0.99	1.06	0.87	0.94
5	0.83	0.55	0.69	1.52	1.13	0.77	1.19	0.79	0.98	1.19	1.70	1.03
4	0.73	1.09	1.07	1.79	0.82	0.77	0.82	1.24	1.12	1.01	1.36	1.33
3	1.47	1.18	1.41	1.61	1.13	0.99	2.19	1.24	1.88	0.98	1.14	1.17
2	1.49	2.03	1.57	1.24	1.36	1.19	0.84	0.51	1.66	0.86	1.14	1.35
1	1.08	0.78	0.96	1.48	1.48	0.83	1.11	1.36	0.78	1.53	1.62	1.11

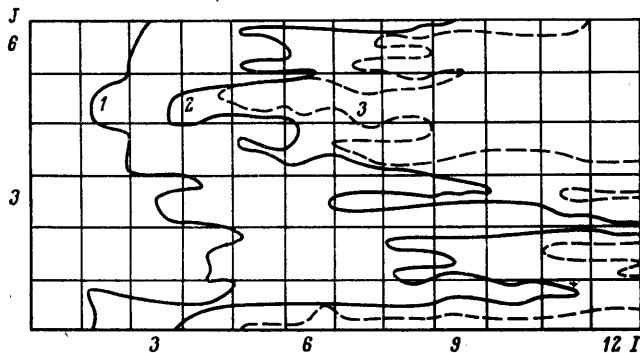
щей жидкости больше вязкости вытесняемой, продольная составляющая скорости минимальна в окрестности передней кромки ступеньки и максимальна в окрестности задней кромки. Поэтому начальное возмущение должно выравниваться со временем. Это подтверждается расчетами с $\mu_0 < 1$.

В случае $\mu_0 > 1$ максимум скорости достигается в окрестности передней кромки ступеньки, а минимум — в окрестности задней. Вдоль передней границы раздела скорость уменьшается с удалением от угловой точки к оси симметрии, а вдоль задней границы — увеличивается с удалением от угловой точки. В результате около передних углов ступеньки образуются два интенсивно развивающихся «языка», на задней границе раздела появля-

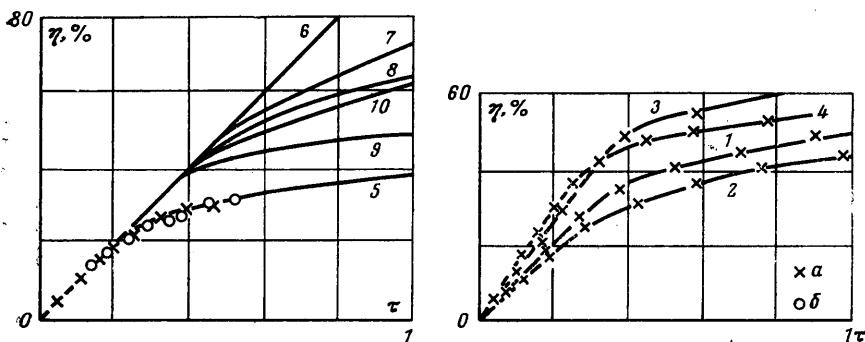
ются два небольших языка. Позднее образуются вторичные небольшие языки.

Присутствие в пласте подвижной воды, как показывают расчеты, снижает рост языкообразования, что связано с уменьшением отношения подвижности.

При вытеснении из неоднородного по проницаемости пласта (вариант 5, фиг. 2, кривые 1—3 соответствуют $\tau=0.05, 0.14$ и 0.21 , $\eta=0.20$) вода



Фиг. 2



Фиг. 3

устремляется в блоки с большей проницаемостью, обходя малопроницаемые блоки. В результате формируется существенно неоднородное течение, приводящее, как и в случае однородного пласта, к быстрому прорыву воды.

На фиг. 3 представлены зависимости η от τ для вариантов 1—5 (кривые 1—5). Сплошными линиями показаны зависимости η от τ для одномерного вытеснения, дискретные значения a соответствуют вытеснению из однородного пласта, b — из неоднородного. Из сравнения кривых на фиг. 3 можно сделать следующий вывод. Несмотря на то что неустойчивое вытеснение имеет существенно иную геометрию потока по сравнению с устойчивым, кривые текущей нефтеотдачи для обоих случаев почти совпадают. Это объясняется более полным вытеснением в зоне языков, компенсирующим слабый охват вытеснением в необводнившейся части пласта. Аналогичное явление наблюдалось при моделировании двухфазного вытеснения с учетом гравитационных сил [14]. После прорыва воды

в случае одномерного вытеснения отмечается практически полное совпадение объемов воды, поступающих через выходное сечение.

Таким образом в случае неустойчивого течения можно выделить некоторые функционалы (например, нефтеотдачу), устойчивые по отношению к малым флуктуациям входных данных.

По-видимому, это объясняется тем, что для характерных кривых фазовых проницаемостей, используемых в модели Баклея — Леверетта, значения отношения подвижностей заключены в узком интервале. Рассмотрим, например, фазовые проницаемости в виде $f_1=s^n$, $f_2=(1-s)^n$, $s^0=0$. Под отношением подвижностей естественно понимать величину

$$M = [f_1(s_\Phi) \mu_1^{-1} + f_2(s_\Phi) \mu_2^{-1}] [f_1(s_0) \mu_1^{-1} + f_2(s_0) \mu_2^{-1}]^{-1}$$

Здесь s_Φ — значение фронтовой водонасыщенности, определяемое соотношением $\mu_0 s_\Phi^n + (1-s_\Phi)^n = n(1-s_\Phi)^{n-1}$.

Тогда отношение подвижностей на фронте $M=n(1-s_\Phi)^{n-1}$, откуда следует, что $M \leq n$. Так, в вариантах 1—5 значение $M \leq 3$.

3. Рассмотрим поршневое вытеснение. Невозможность реализации двухфазного вытеснения с большим отношением подвижностей фаз при большом отношении вязкостей является принципиальным отличием модели Баклея — Леверетта от модели поршневого вытеснения. Поэтому естественно ожидать, что неустойчивое поршневое вытеснение будет изменять интегральные характеристики по сравнению с невозмущенным (одномерным).

Вытеснение рассматривается для тех же областей, что и в п. 2, при том же перепаде давления. Поле течения разбивается на две области: D_+ — область вторгшейся воды и D_- — область, занятую нефтью. В каждой из этих областей необходимо решить уравнения, описывающие однофазное течение. На искомой границе фаз должны выполняться условия непрерывности давления и потока. Ниже излагается способ решения двумерных задач о движении границы раздела фаз методами сквозного счета. Однако описание движения границы раздела с помощью линейного уравнения переноса и последующей его конечно-разностной аппроксимации накладывает существенные ограничения на выбор разностной схемы из-за «размазывания» границы раздела, порождаемого аппроксимационной вязкостью схемы.

Учитывая это обстоятельство, рассмотрим задачу

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial x} = 0, \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \sigma(0, t) = \sigma_r$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ — монотонная возрастающая функция, имеющая точку перегиба, и $\varphi(0) = 0$.

Тогда при $\sigma_r < \sigma_\Phi$, где σ_Φ удовлетворяет уравнению $\varphi(\sigma_\Phi) = \varphi'(\sigma_\Phi) \sigma_\Phi$, решение (3.1) имеет вид

$$(3.2) \quad \sigma = \begin{cases} 0, & x - \frac{\varphi(\sigma_r)}{\sigma_r} t > 0 \\ \sigma_r, & x - \frac{\varphi(\sigma_r)}{\sigma_r} t < 0 \end{cases}$$

Решение (3.2) в то же время является решением следующей линейной задачи поршневого вытеснения:

$$\frac{\sigma_r}{\varphi(\sigma_r)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \sigma(0, t) = \sigma_r, \quad \sigma(x, 0) = 0$$

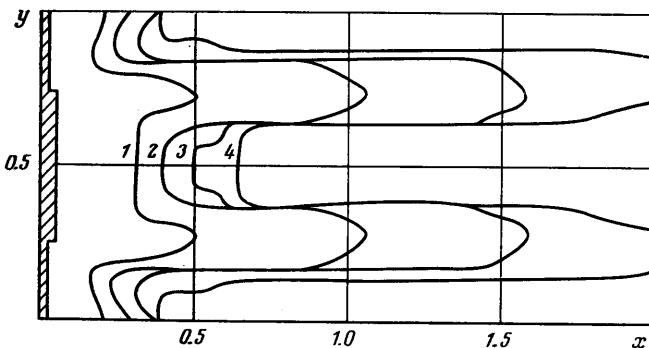
С другой стороны, решение задачи (3.1) можно получить разностным методом по схеме «уголок» [15].

Поэтому решение линейного уравнения, описывающего движение границы раздела фаз, ищется из решения квазилинейного уравнения переноса со специально подобранными граничными условиями

$$(3.3) \quad m \frac{\varphi(\sigma_r) \partial \sigma}{\sigma_r} + \nabla [w\varphi(\sigma)] = 0$$

$$\sigma(0, y, t) = \sigma_r, \quad \sigma < \sigma_r, \quad \sigma(x, y, 0) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_- \\ \sigma_r, & (x, y) \in D_+ \end{cases}$$

Решение этой задачи методом конечных разностей по схеме «уголок» обладает аппроксимационной вязкостью, принимающей большие значения



Фиг. 4

в области скачка и малые в остальном диапазоне. Искомое решение имеет вид $s(x, y, t) = \sigma(x, y, t) s_r / \sigma_r$, где s_r — доля воды в закачиваемом объеме.

Скорость фильтрации находится из уравнений

$$\nabla(g\nabla p) = 0, \quad w = -g\nabla p, \quad g(x, y, t) = h(x, y)k(x, y)f(x, y, t)$$

$$f(x, y, t) = \begin{cases} f_1(s_r) \mu_1^{-1} + f_2(s_r) \mu_2^{-1}, & (x, y) \in D_+ \\ f_2(0) \mu_2^{-1}, & (x, y) \in D_- \end{cases}$$

которые аппроксимируются разностной схемой (1.4).

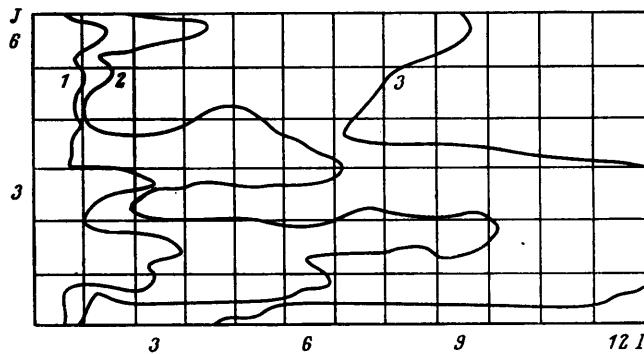
Для проверки получаемых решений были опробованы два вида функций $\varphi(\sigma)$: функция $\varphi(\sigma)$ варианта 1 п. 2 и функция $\varphi(\sigma) = \sin^2 \pi \sigma / 2$. Расчеты показали удовлетворительную точность предлагаемого способа нахождения движения границы раздела.

4. Расчеты проводились как для однородного, так и для неоднородного по проницаемости пласта при различных соотношениях вязкостей. В случае однородного поля проницаемости в начальный момент граница раздела фаз имела форму «ступеньки» с шириной, равной $0.5b$, и длиной, равной одному шагу разностной сетки. При рассмотрении неоднородного пласта начальная граница раздела была прямолинейна, а поле проницаемости бралось такое же, как и в п. 2.

На фиг. 4 показаны положения границы раздела в однородном пласте при отношении вязкостей $\mu_0 = 20$. Кривые 1–4 соответствуют $\tau = 0.11, 0.26, 0.39$ и 0.64 , $\eta = 0.55$. Положения границы в неоднородном пласте представлены на фиг. 5 для $\tau = 0.10, 0.30$ и 1.50 — кривые 1–3 соответственно. Нефтеотдача при $\tau = 1.50$ равна 0.73. Малое начальное возмущение границы

раздела в случае однородного пласта приводит к быстрому росту языков воды и их прорыву на небольшой площади выходного сечения. После прорыва воды охват заводнением увеличивается незначительно.

В [3] для проникновения одиночного языка в щель получено аналитическое выражение его границы и экспериментально обнаружено, что среди всех возможных значений параметра λ (отношение ширины языка к ширине щели) для широкого диапазона скоростей устойчивым является значение 0.5. Из фиг. 4 видно, что значение параметра λ близко к 0.5.



Фиг. 5

Вытеснение из неоднородного пласта приводит к быстрому обводнению высокопроницаемых блоков, тем самым уменьшая значение коэффициента охвата.

На фиг. 3 показаны зависимости нефтеотдачи от прокачанных объемов воды для различных соотношений вязкостей. Кривая 6 соответствует одномерному поршневому вытеснению, кривые 7-9 - значениям отношения вязкостей 10, 20 и 100 соответственно, кривая 10 - вытеснению из неоднородного пласта при $\mu_0=20$. Заметим, что в этом случае нефтеотдача неустойчивого вытеснения существенно отличается от устойчивого и зависит от отношения вязкостей.

Поступила 29 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). М., «Наука», 1969.
2. Van Meurs P. The use of transparent three-dimensional models for studying the mechanism of flow processes in oil reservoirs. Trans. AIME, 1957, vol. 210.
3. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1958, vol. 245, No. 1242.
4. Chuoke R. L., Van Meurs P., Van der Poel C. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. Trans. AIME, 1959, vol. 216.
5. Rachford H. H. Instability in water flooding oil from water-wet porous media containing connate water. Soc. Petrol. Engrs J., 1964, vol. 4, No. 2.
6. Blackwell R. J., Rayne J. R., Terry W. M. Factors influencing the efficiency of miscible displacement. Trans. AIME, 1959, vol. 216.
7. Peaceman D. W., Rachford H. H. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement. Trans. AIME, 1962, vol. 225.
8. Желтов Ю. В., Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е., Аванесов И. Г. Оценка коэффициента охвата при проектировании разработки месторождений нефти высокой вязкости. Геология нефти и газа, 1970, № 3.
9. Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е. Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде. В сб. «Физико-геологические факто-

- ры при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений». М., «Недра», 1969.
10. Кац Р. М. Об устойчивости совместного течения двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 2.
11. Hagoort J. Displacement stability of water drives in water-wet connate-water-bearing reservoirs. Soc. Petrol. Engrs J., 1974, vol. 14, No. 1.
12. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
13. Данилов В. Л., Кац Р. М. Метод зональной линеаризации в нелинейных многомерных задачах массопереноса в пористых средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
14. Королев А. В., Шалимов Б. В., Швайдлер М. И. Численное решение одномерных и двумерных задач фильтрации несмешивающихся жидкостей с учетом гравитационных и капиллярных сил. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1975.
15. Королев А. В., Шалимов Б. В., Швайдлер М. И. Исследование разностных схем для численного решения задач двухфазной фильтрации. В сб. «Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта». М., «Недра», 1976.