

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.
2. Киреев В. И. О моделировании газовых струй, истекающих из реальных сопел Лаваля. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2.
3. Дроздова Н. В., Пирумов У. Г., Росляков Г. С., Сухоручков В. П. Сверхзвуковые течения газа в конических соплах. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 6. М., Изд. МГУ, 1974.
4. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.

УДК 536.25

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ ВБЛИЗИ 4°C

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, В. М. ШИХОВ

(Пермь)

В работе исследуется устойчивость плоскопараллельного конвективного течения воды в плоском вертикальном слое, ограниченном нагретыми до разной температуры плоскостями в области аномалии теплового расширения.

Известно, что при температурах, близких к $T_i \approx 4^\circ \text{C}$, вода обнаруживает аномалию теплового расширения. В области $0^\circ \text{C} < T < T_i$ плотность воды растет с увеличением температуры, достигая максимального значения в точке T_i ; при $T > T_i$ имеет место нормальное поведение — уменьшение плотности с ростом температуры. Такая температурная зависимость плотности приводит к своеобразию конвективных явлений в воде в области температур, близких к точке инверсии теплового расширения. Вопрос о конвективной устойчивости равновесия воды рассматривался в большом числе работ, в которых изучены различные аспекты линейной и нелинейной теории, а также воздействие на устойчивость некоторых осложняющих факторов (библиография приведена в обзоре [1]). Устойчивость свободных конвективных течений жидкости с аномалией теплового расширения, насколько известно авторам, ранее не изучалась.

Рассмотрим вертикальный слой воды, ограниченный плоскостями $x=0$ и $x=h$. Одна из границ ($x=0$) поддерживается при температуре $T=0^\circ \text{C}$; другая ($x=h$) — при температуре $T=\Theta$.

В интервале температур $0^\circ \text{C} < T < 8^\circ \text{C}$ плотность воды как функция температуры с достаточной точностью аппроксимируется параболическим законом $\rho = \rho_m [1 - \alpha(T - T_i)^2]$, где ρ_m — максимальное значение плотности, достигаемое в точке инверсии $T = T_i = 3.98^\circ \text{C}$, а $\alpha = 8 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-2}$ — температурный коэффициент. Поскольку $\alpha T_i^2 \ll 1$, можно переписать формулу для плотности в следующем виде:

$$(1) \quad \rho = \rho_0 [1 + \alpha T (2T_i - T)]$$

Здесь T — температура, отсчитываемая от 0°C , а ρ_0 — плотность при $T=0$.

С таким законом изменения плотности уравнения конвекции в обычных приближениях Буссинеска запишутся в виде

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \alpha g T (2T_i - T) \boldsymbol{\gamma}$$

$$\partial T / \partial t + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Здесь все обозначения — обычные; предполагается, что параметры α , ν и χ не зависят от температуры.

Выберем в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления соответственно h , h^2/ν , $g\alpha\Theta^2 h^2/\nu$, Θ и $\rho_0 g \alpha \Theta^2 h$. Тогда система (2) запишется в безразмерном виде

$$(3) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + G(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p + \Delta \mathbf{v} - T(2\tau^{-1} - T) \boldsymbol{\gamma}$$

$$\partial T / \partial t + G \mathbf{v} \nabla T = P^{-1} \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$G = g\alpha\Theta^2 h^3 / \nu^2, \quad P = \nu / \chi, \quad \tau = \Theta / T_i$$

Здесь G и P — числа Грасгофа и Прандтля; τ — безразмерный параметр, характеризующий распределение плотности в слое жидкости: если $\tau > 1$ (т. е. $\Theta > T_i$), то точка инверсии теплового расширения находится внутри слоя; при $\tau < 1$ плотность как функция поперечной координаты x монотонно возрастает, достигая максимального значения на правой границе. Как уже отмечалось, квадратичная аппроксимация плотности достаточно точна при изменении Θ в пределах $0-8^\circ\text{C}$, что соответствует интервалу изменения параметра $0 < \tau < 2$. При $\Theta > 8^\circ\text{C}$ следует пользоваться более точной аппроксимацией плотности; в частности, до $\Theta = 30^\circ\text{C}$ достаточную точность дает кубический закон.

Уравнения (3) имеют решение, описывающее плоскопараллельное конвективное течение следующей структуры: $v_x = v_y = 0$, $v_z = v_0(x)$; $T = T_0(x)$; $p = p_0(z)$.

Из (3) с учетом граничных условий и условия замкнутости потока находим профили скорости и температуры [2]

$$(4) \quad v_0 = \frac{1}{60}x(1-x)[5x^2 + 5(1-4\tau^{-1}) - 2(2-5\tau^{-1})], \quad T_0 = x$$

$$v_0(0) = v_0(1) = 0; \quad T_0(0) = 0, \quad T_0(1) = 1, \quad \int_0^1 v_0 dx = 0$$

Как видно, независимо от значения τ имеет место линейное распределение температуры. Профиль скорости, напротив, существенно определяется этим параметром. При малых τ ($\tau < 5/3$) течение состоит из двух встречных потоков — нисходящего у правой горячей стенки и восходящего — у холодной; $\tau = 5/3$ с ростом τ появляется и развивается восходящий поток у горячей стенки, и течение, таким образом, состоит из трех потоков — центрального нисходящего и двух восходящих возле границ. В симметричном случае $\tau = 2$ ($\Theta = 8^\circ\text{C}$) профиль является четным относительно середины слоя; он подобен профилю в слое с однородными внутренними источниками тепла (см. [3]). При дальнейшем увеличении τ (в области $\tau > 2.5$) течение снова состоит из двух встречных потоков (эта перестройка, впрочем, наступает уже за пределами достаточной точности принятой квадратичной аппроксимации плотности).

Для исследования устойчивости плоскопараллельного течения (4) рассмотрим малые плоские возмущения функции тока и температуры вида

$$(5) \quad \psi = \Phi(x) \exp(-\lambda t + ikz), \quad T = \theta(x) \exp(-\lambda t + ikz)$$

где λ — декремент, k — волновое число.

Линеаризация уравнений (3) около стационарного решения (4) и подстановка (5) приводят к системе уравнений для амплитуд (штрих означает дифференцирование по x)

$$(6) \quad -\lambda(\Phi'' - k^2\Phi) + ikG[v_0(\Phi'' - k^2\Phi) - v_0''\Phi] = (\Phi^{IV} - 2k^2\Phi'' + k^4\Phi) + 2(T_0 - \tau^{-1})\theta' + 2T_0'\theta$$

$$(7) \quad -\lambda\theta + ikG(v_0\theta - T_0'\Phi) = P^{-1}(\theta'' - k^2\theta)$$

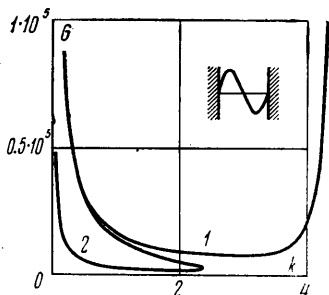
Граничные условия для амплитуд на твердых идеально теплопроводных стенках имеют вид

$$(8) \quad x=0, \quad x=1; \quad \Phi = \Phi' = 0, \quad \theta = 0$$

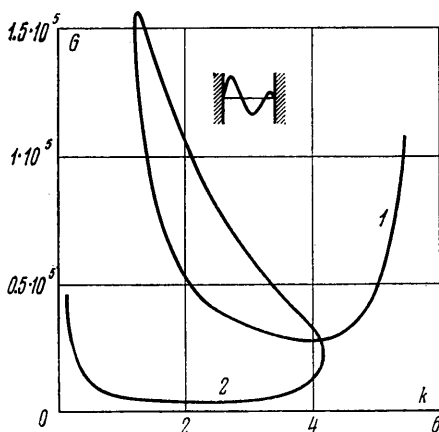
Спектральная задача (6)–(8) определяет характеристические возмущения и их декременты λ в зависимости от параметров — G , P , τ , k . Граница устойчивости основного течения находится из условия $\text{Re } \lambda = 0$. Отличие от соответствующей спектральной задачи, описывающей возмущения в конвективном течении с «нормальным» поведением плотности (см. [4]), заключается в иной форме профилей скорости и более сложной структуре подъемной силы (два последних слагаемых в (6)).

Для численного решения спектральной амплитудной задачи (6)–(8) применялся метод Рунге — Кутты — Мерсона; пошаговая ортогонализация проводилась по схеме, описанной в [5, 6]. Число Прандтля в расчетах оставалось фиксированным $P = 11.2$ (это значение соответствует 5°C).

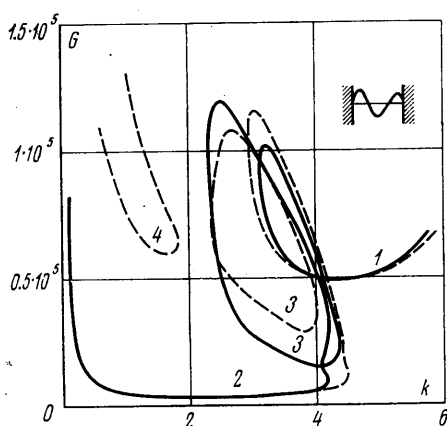
На фиг. 1–4 представлены нейтральные кривые $G(k)$ для некоторых значений параметра τ . Фиг. 1 относится к значению $\tau = 1$. Как уже указывалось, при этом значении τ течение состоит из двух встречных потоков (профили скорости схематически указаны на фиг. 1–4). Результаты исследования устойчивости при этом, естественно, близки к соответствующим результатам для хорошо изученного конвективного течения с кубическим профилем, которое реализуется при «нормальной» линейной зависимости плотности от температуры. На нейтральных кривых видны две моды неустойчивости. Одна из них (кривая 1) связана с развитием гидродина-



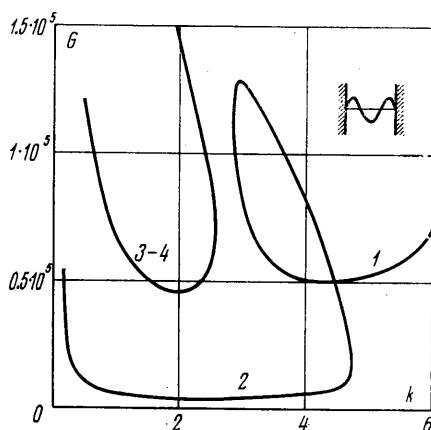
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



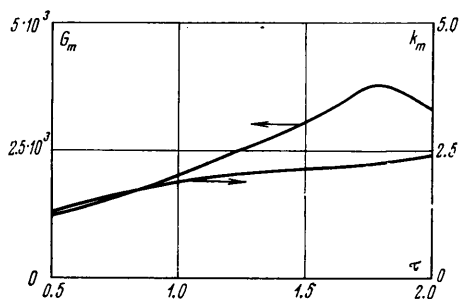
Фиг. 4

мических возмущений типа медленно дрейфующих вихрей на границе встречных потоков. Кривая 2 соответствует неустойчивости типа нарастающих тепловых волн, распространяющихся в восходящем потоке с фазовой скоростью, близкой к максимальной скорости этого потока; последняя мода является наиболее опасной.

Увеличение τ приводит к появлению в основном течении еще одного восходящего потока. При $\tau=1.818$ (фиг. 2) интенсивность этого потока еще мала. Поэтому присутствуют обсужденные выше два механизма неустойчивости, которым теперь соответствуют две ветви единой нейтральной кривой; эти ветви соединяются через замкнутую петлю.

Вблизи симметричного случая $\tau=2$ происходит быстрая перестройка нейтральных кривых по мере изменения τ . Фиг. 3 соответствует значениям $\tau=1.961$ и 1.980 (нейтральная кривая для $\tau=1.980$ изображена пунктиром, для $\tau=1.961$ — сплошной линией), при которых оба восходящих потока близки по интенсивности. Гидродинамическая мода неустойчивости (кривая 1) соответствует теперь двум расположенным вдоль границ раздела потоков цепочкам медленно дрейфующих вверх вихрей (ср. с формой неустойчивости конвективного течения, вызванного однородными внутренними источниками тепла [3, 7]). Кроме гидродинамической моды, имеются еще две волновые моды; им соответствуют тепловые волны, распространяющиеся в каждом из восходящих потоков. Три ветви нейтральной кривой при $\tau=1.961$ соединяются через две замкнутые петли. При незначительном увеличении τ происходит отщуривание одной из петель с образованием на плоскости (G, k) замкнутой области неустойчивости ($\tau=1.980$). При переходе к симметричному случаю $\tau=2$ замкнутая область 3 объединяется с длинноволновой ветвью волнового типа 4. В пределе $\tau=2$ (фиг. 4) представлены три моды: гидродинамическая 1 и два типа волновых — 2 и 3-4.

В интервале $\tau \leq 2$ наиболее опасной (соответствующей наименьшему критическому числу Грасгофа) является волновая мода 2. Зависимость минимального (по k) критического числа G_m и соответствующего волнового числа k_m от τ представлена на фиг. 5.



Фиг. 5

В заключение заметим, что профили скорости при разных τ в общем сходны с профилями конвективного течения в вертикальном слое с неоднородными внутренними источниками тепла при разных значениях параметра неоднородности [8]. Можно говорить и об известной аналогии в характере неустойчивости двух течений. Эта аналогия проявляется в наличии общих механизмов неустойчивости; имеется также сходство в форме нейтральных кривых.

Поступила 4 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость. В сб. «Итоги науки и техники. Сер.: Механика жидкости и газа», т. II. М., ВИНТИ, 1977.
2. Пшеничников А. Ф. Свободная конвекция воды между вертикальными плоскостями при температурах, близких к 4°C . В сб. «Гидродинамика», вып. 3. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1971, № 248.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
5. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. В сб. «Гидродинамика», вып. 5. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1974, № 316.
6. Шихов В. М. Спектры возмущений и устойчивость конвективного движения в вертикальном канале с пронизаемыми границами. В сб. «Гидродинамика», вып. 8. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1976, № 362.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. О двух типах неустойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
8. Шихов В. М., Якушин В. И. Об устойчивости конвективных движений, вызванных неоднородно распределенными внутренними источниками тепла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.

Технический редактор Н. Г. Глебовский

Сдано в набор 16.01.79 Подписано к печати 29.03.79 Т-03763 Формат бумаги 70×108^{1/16}
 Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 18,3 Бум л. 6,0 Тираж 1980 экз. Зак. 1433

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
 2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10