

О СВОЙСТВАХ УДАРНЫХ АДИАБАТ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК ЖУТЕ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Для ударных адиабат, соответствующих разрывным решениям гиперболических систем уравнений, выражающих «законы сохранения», доказываются два свойства, известных для ударных адиабат в газе [1]. Если состояние с одной стороны от разрыва зафиксировано, то в точке экстремума скорости разрыва на ударной адиабате скорость разрыва равна одной из скоростей характеристик по другую сторону разрыва и наоборот. Если для систем определен поток энтропии или массовая плотность энтропии, то в точках экстремума скорости имеет место экстремум производства энтропии в разрыве и массовой плотности энтропии. Если система является симметрической гиперболической системой [2, 3], то экстремумы производства энтропии в разрыве соответствуют экстремумам скорости.

Эти свойства могут оказаться полезными при изучении разрывов в сложных средах, так как отрезки ударной адиабаты, точки которых могут соответствовать реально существующим разрывам, часто бывают ограничены точками, соответствующими разрывам, скорость которых равна скорости какой-либо характеристики по одну из сторон разрыва (см., например, [4, 5]).

1. Рассмотрим систему гиперболических уравнений, каждое из которых записывается в дивергентном виде. Для одномерного случая, достаточного для целей настоящей статьи, систему будем записывать в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} A_i(u_k) + \frac{\partial}{\partial x} B_i(u_k) = F_i(x, t) \quad (i=1, \dots, n, \quad k=1, \dots, n)$$

где $A_i(u_k)$, $B_i(u_k)$, $F_i(x, t)$ — заданные функции, $u_k = u_k(x, t)$ — неизвестные величины.

Будем считать, что обобщенные решения, содержащие сильные разрывы, определены как решения интегральных уравнений

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A_i dx + B_i \Big|_{x=x_2} - B_i \Big|_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} F_i dx$$

при любых постоянных x_1 и x_2 . Из этих соотношений получаются условия на разрыве, движущемся со скоростью U

$$(1.3) \quad B_i(u_k^-) - UA_i(u_k^-) - B_i(u_k^+) + UA_i(u_k^+) = C_i.$$

где C_i не зависят от u_k и имеют смысл внешних воздействий. Эти величины обязаны своим происхождением правым частям уравнения (1.2.) и отличны от нуля, если F_i имеют на разрыве особенности типа дельта-функций. Через u_k^- обозначены величины справа от разрыва («перед» разрывом), а через u_k^+ — величины слева от разрыва («за» разрывом).

Будем называть ударной адиабатой, соответствующей начальному состоянию u_k^- , совокупность значений u_k^+ , удовлетворяющих соотношениям (1.3) при каком-нибудь произвольном значении U и заданных значениях u_k^- . Если соотношения (1.3) независимы, что предполагается, то в пространстве u_i ударная адиабата представляется кривой.

Будет доказано, что следующие соотношения выполняются на ударной адиабате только одновременно

$$(1.4) \quad \frac{dU}{d\sigma} = 0, \quad U = c_i^+$$

где σ — длина дуги адиабаты, c_i^+ — одна из скоростей характеристик в состоянии u_k^+ , U — скорость разрыва. Пусть, кроме того, характеристическая скорость c_i^+ одна-кратная. Тогда, если разность $U - c_i^+$ на ударной адиабате меняет знак в точке u_k^+ , то в этой точке U имеет экстремум. Наоборот, если U имеет экстремум в точке u_k^+ , то $U - c_i^+$ меняет знак в этой точке ударной адиабаты.

Равенство скорости разрыва и скорости характеристики будем по аналогии с теорией детонации называть условием Жуге.

Для доказательства этих утверждений продифференцируем (1.3), считая u_k^- постоянными

$$(1.5) \quad \left(\frac{\partial B_i^+}{\partial u_j^+} - U \frac{\partial A_i^+}{\partial u_j^+} \right) du_j^+ = (A_i^+ - A_i^-) dU$$

Индексы плюс и минус означают, что соответствующие величины берутся при $u = u_k^+$ и u_k^- . Если $dU = 0$, а хотя бы одно $du_j^+ \neq 0$, то очевидно, что определитель матрицы

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial B_i^+}{\partial u_j^+} - U \frac{\partial A_i^+}{\partial u_j^+} \right)$$

равен нулю. Этот определитель совпадает с определителем, который служит для нахождения скоростей характеристик системы (1.1) при $u_k = u_k^+$. Таким образом, из первого соотношения (1.4) следует второе. Наоборот, если $U = c_i^+$, то определитель матрицы (1.6) равен нулю, и при неравных нулю du_j^+ получаем $dU = 0$. При этом предполагается, что одновременно с определителем системы (1.5) не обращается в нуль выражение, обеспечивающее разрешимость системы (1.5) при равном нулю определителе и не равной нулю правой части, т. е. рассматривается случай «общего положения».

Более детальное исследование показывает, что, если это условие не выполнено или если условие Жуге выполняется сразу по нескольким характеристическим скоростям, то ударная адиабата может иметь точки самопересечения. Последний случай имеет место, например, в магнитной гидродинамике, когда в пространстве скоростей среды кривая, представляющая собой часть ударной адиабаты, соответствующей медленной ударной волне, пересекается при выполнении условия $H_{x2} = 0$ с окружностью, которая соответствует вращательному разрыву, распространяющемуся перед ударной волной с той же скоростью [5], причем кривая и окружность лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Рассмотрим случай, когда соотношения (1.4) выполнены в изолированной точке ударной адиабаты, которую будем называть точкой Жуге. В окрестности этой точки приращения du_j^+ направлены приблизительно по собственному вектору матрицы (1.6) в точке Жуге (ударная адиабата касается собственного вектора в точке Жуге), а направление движения точки u_j^+ при увеличении U меняет знак при изменении знака разности $U - c_i^+$, так как в выражениях для du_j^+ , представленных по правилу Крамера как отношение соответствующих определителей, знаменатель (определитель системы) меняет знак, а числители все в нуль не обращаются. Это означает, что U в точке Жуге имеет экстремум. Наоборот, если в точке Жуге U имеет экстремум, то определитель системы, а следовательно и разность $U - c_i^+$, меняет знак.

2. В случае, когда система дифференциальных уравнений (1.1) обладает еще одним «законом сохранения»,¹ который может быть получен домножением уравнений системы на некоторые переменные множители, зависящие от искомых величин, оканчивается возможным [2, 3], выбирая эти множители в качестве новых искомых величин, добиться того, что система (1.1) сохранит свой вид, а функции $A_i(u_k)$ и $B_i(u_k)$ будут выражаться через две функции $A(u_k)$ и $B(u_k)$ как производные

$$(2.1) \quad A_i(u_k) = \frac{\partial A(u_k)}{\partial u_i}, \quad B_i(u_k) = \frac{\partial B(u_k)}{\partial u_i}$$

а дополнительный закон сохранения примет вид

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (A - A_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x} (B - B_i u_i) = -u_i F_i$$

В задачах механики сплошных сред такой дополнительный закон сохранения, выполняющийся для непрерывных движений, всегда имеется. Это во многих случаях уравнение для энтропии, а в некоторых других случаях, как например, в теории мелкой воды — уравнение для механической энергии. Для определенности выражение, которое дифференцируется во времени в равенстве (2.2), будем называть объемной плотностью энтропии, а величину, дифференцируемую по x , — потоком энтропии в выбранной системе координат. Поток энтропии в отрицательном направлении через поверхность, движущуюся со скоростью U равен

$$(2.3) \quad P(u_k, U) = U(A - A_i u_i) - (B - B_i u_i)$$

¹ Здесь всюду используется выражение «закон сохранения», хотя сохранение соответствующих величин гарантируется только при $F_i = 0$.

Покажем, что если $A(u_k)$ — выпуклая функция своих аргументов (это является условием того, что (1.1) — симметрическая гиперболическая система [2, 3]), то экстремумы функции

$$(2.4) \quad \Delta P(u_k^-, u_k^+, U) \equiv P(u_k^+, U) - P(u_k^-, U)$$

на ударной адиабате совпадают с экстремумами U . «На ударной адиабате» означает, что u_k^- не меняются, а u_k^+ и U связаны соотношениями (1.3). Выражение ΔP представляет собой производство энтропии на разрыве. Вычислим дифференциал выражения (2.4) вдоль ударной адиабаты

$$(2.5) \quad \begin{aligned} d\Delta P &= (B_{ij}^+ - UA_{ij}^+) u_i^+ du_j^+ - (A^+ - A_i^+ u_i^+ - A^- + A_i^- u_i^-) dU = \\ &= [A^+ - A^- - A_i^- (u_i^+ - u_i^-)] dU \\ A_{ij} &= \frac{\partial^2 A}{\partial u_i \partial u_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial^2 B}{\partial u_i \partial u_j}, \quad A_i = \frac{\partial A}{\partial u_i}, \quad B_i = \frac{\partial B}{\partial u_i} \end{aligned}$$

Здесь индексами плюс и минус снабжены функции от u_k при $u = u_k^+$ и u_k^- ; при преобразованиях было использовано соотношение (1.5). Из выпуклости функции A следует положительность выражения в квадратных скобках в (2.5) (положительность этого выражения принимается иногда в качестве определения выпуклости функции $A(u_k)$). В этом случае приращение производства энтропии ΔP всегда совпадает по знаку с приращением скорости разрыва U , т. е. их экстремумы совпадают. Если A — не выпуклая функция, то экстремумы U будут одновременно экстремумами ΔP (имеется в виду случай общего положения, когда в точке экстремума U коэффициент при dU в (2.5) не равен нулю), в то время как ΔP может иметь дополнительные экстремумы в точках адиабаты, где коэффициент при dU в (2.5) обращается в нуль.

Отметим, что применительно к газодинамическим ударным волнам доказанное утверждение слабее, чем известное утверждение о совпадении экстремумов U и массовой плотности энтропии [1]. Однако автору неизвестно, как определить массовую плотность энтропии для систем рассматриваемого здесь вида в общем случае.

Отметим, в заключение, что причина выполнения указанных выше свойств ударной адиабаты очень проста. Если выполнено условие Жуге, то наряду с исходным разрывом можно рассмотреть как один разрыв, комбинацию из исходного разрыва и следующего за ним с той же скоростью малого возмущения. Этот разрыв будет иметь ту же скорость, что и исходный (т. е. $dU/d\sigma = 0$ в рассматриваемой точке) и ту же самую энтропию за разрывом (если энтропия определена), а также то же самое производство энтропии в разрыве, так как изменение энтропии и ее производство в малом возмущении равны нулю. Наоборот, если на ударной адиабате имеются две близкие точки, соответствующие разрывам, распространяющимся с одной и той же скоростью, то переход из одной точки в другую соответствует разрыву малой интенсивности, движущемуся с той же скоростью, что и исходные разрывы. Это означает выполнение условия Жуге и равенство нулю производной от энтропии и от производства энтропии вдоль ударной адиабаты. Выполнение же условия Жуге и экстремальности скорости разрыва не всегда следует, как было показано, из экстремальности энтропии за разрывом или ее производства в разрыве.

Поступила 26 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Lifшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 3.
3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М., «Наука», 1978.
4. Галин Г. Я. К теории ударных волн. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 1.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.