

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СОПЛ

И. Л. ОСИПОВ

(Москва)

Рассматривается численный метод определения профиля сопла Лавала, имеющего плоскую звуковую поверхность. В настоящее время существуют эффективные методы решения прямой задачи, т. е. расчета смешанного течения газа в канале с заданным контуром [1-3]. При этом, однако, положение и форма переходной поверхности заранее неизвестны; расход газа во входном сечении приходится варьировать, в связи с чем время расчета увеличивается. Кроме того, при произвольном выборе контура сопла в потоке газа возможно образование местных сверхзвуковых зон или областей с отрывом потока. В связи с этим представляет практический интерес профилирование безударных коротких сопел при отсутствии в течении зон с обратными градиентами давления.

Первый численный метод решения задачи о профилировании, называемой также обратной задачей сопла Лавала, был предложен в работе [4]. При этом задавалось распределение скорости газа вдоль оси сопла и обратная задача интерпретировалась как условно корректная задача Коши. Из дальнейших исследований в этом направлении следует отметить работы [5, 6]. В подобной постановке при построении коротких сопел имело место возникновение местных сверхзвуковых зон или нарушение монотонности скорости газа [4, 6]. В работах [7, 8] параметры потока задавались вдоль образующей канала, форма которой заранее неизвестна. Это дает возможность выполнить важное условие отсутствия скачков уплотнения и решить корректно поставленную задачу для уравнения Чаплыгина. В [9] обратная задача рассматривается как вариационная и решается посредством минимизации функционала, зависящего от решения прямой задачи.

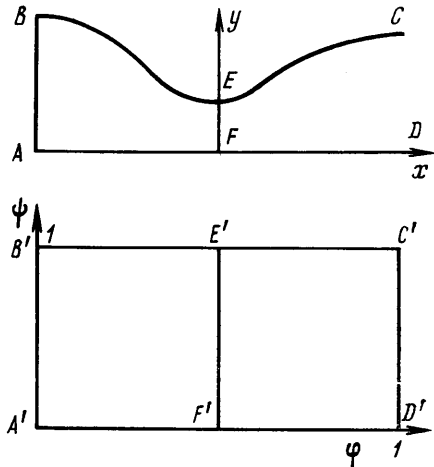
В данной работе для решения задачи о профилировании предложен численный итерационный алгоритм второго порядка точности. Метод дает возможность построения плоских и осесимметричных коротких сопел при относительно небольшом времени расчета. Распределение скорости газа может задаваться как вдоль оси, так и вдоль образующей канала. В отличие от [7, 8] длины сопел заранее задаются и удается избежать разрыва в граничных условиях для краевой задачи.

1. Постановка задачи и метод расчета.

На фиг. 1 изображена область течения безвихревого газа в профилируемом сопле в физических переменных x, y . На оси AD или на стенке BC , форму которой требуется определить, задается модуль приведенной скорости $\lambda = w/w^*$ так, чтобы выполнялись условия: $\lambda < 1$ при $x < 0$, $\lambda > 1$ при $x > 0$, $\lambda = 1$ и $d\lambda/dx = 0$ в точке $x = 0$ [4]. Угол наклона вектора скорости к оси Ox ϑ равен нулю на отрезках AD , AB и EF . На линии EF число Маха M равно единице. В случае, когда скорость задана на оси, фиксированы длины отрезков AB и AD , а если скорость задана на стенке — фиксированы длины кривой BC и отрезка AB .

Введем независимые ортогональные переменные φ, ψ :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} d\psi &= B\rho w y^{\nu} (\cos \vartheta dy - \sin \vartheta dx), \\ d\varphi &= C(\varphi)w (\cos \vartheta dx + \sin \vartheta dy) \end{aligned}$$



Фиг. 1

Здесь $\nu = 0, 1$ для плоского или осесимметричного случаев соответственно, ρ — плотность газа; B — постоянная, выбираемая таким образом, чтобы длина отрезка $A'B'$ (фиг. 1) была равна единице; функция $C(\varphi)$ задается соотношением $C(\varphi) = 1/Lw$, где L — длина заданной линии, w — заданная скорость. Тогда вдоль линии AD или BC будет выполняться равенство $d\varphi = dl/L$, где l — длина вдоль соответствующей кривой, и длина отрезка $A'D'$ (или $B'C'$) будет равна единице. Таким образом, в переменных φ, ψ область течения $ABCD$ перейдет в фигуру $A'B'C'D'$ (фиг. 1). В осесимметричном случае вместо переменной ψ будем пользоваться переменной

$\sqrt{\psi}$ для того, чтобы сохранилась линейная зависимость между шагами рассматриваемой системы координат и физической.

Рассмотрим уравнения Бернулли и энергии:

$$(1.2) \quad w^2 + 2\kappa(\kappa - 1)^{-1} P \rho^{-1} = 2D_1, \quad P = D_2 \rho^\kappa$$

Здесь P — давление, κ — показатель адиабаты, D_1, D_2 — константы.

Выразим функции P, ρ и w через величину $z = M^2$ с помощью соотношений (1.2) и подставим эти выражения в уравнения неразрывности и безвихренности. В переменных ϕ, ψ эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$(1.3) \quad \frac{1}{2^\nu \psi^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = \frac{(z-1)}{y^\nu F_1} \frac{\partial z}{\partial \phi} - \nu \frac{\sin \phi}{y^2} F_2,$$

$$F_1 = \frac{BzP(z)^{(\nu-1)/\nu}}{C(\phi)D_5}; \quad F_2 = \frac{P(z)^{(\nu+2)/2\nu}}{Bz^{1/2}D_4}$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{2^\nu \psi^\nu F_3}{y^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}, \quad F_3 = \frac{zD_5C(\phi)P(z)^{(\nu+1)/\nu}}{B}$$

$$\gamma = \kappa - 1, \quad P(z) = 2 + \gamma z, \quad D_5 = \frac{D_3}{D_4}, \quad D_3 = \sqrt{2\gamma D_1}, \quad D_4 = \frac{D_3^{(\nu+2)/\nu}}{(\kappa D_2)^{1/\nu}}$$

Отметим, что функция F_1, F_2 и F_3 не имеют особенностей и положительны при $z > 0$.

Исключив из уравнений (1.3) и (1.4) производные от ϕ , получим уравнение второго порядка относительно функции z :

$$(1.5) \quad \frac{1}{4^\nu \psi^\nu} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{y^\nu}{\psi^\nu F_3} \frac{\partial z}{\partial \psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1-z}{y^\nu F_1} \frac{\partial z}{\partial \phi} \right] = -\nu \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\sin \phi}{y^2} F_2 \right]$$

В осесимметричном случае в уравнения (1.3) — (1.5) входит величина y , которая в переменных ϕ, ψ заранее неизвестна. Для функции $y(\phi, \psi)$ из соотношений (1.1) получим дифференциальное уравнение вдоль линий $\phi = \text{const}$:

$$(1.6) \quad dy^{2\nu} = 2^\nu F_2 \cos \phi d\psi^{2\nu}$$

При численном решении полученной системы уравнений относительно неизвестных функций z, y, ϕ используется идея расщепления системы уравнений газовой динамики на подсистемы более низкого порядка [10]. Уравнения (1.3) и (1.6) при известной величине $z(\phi, \psi)$ можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных y, ϕ вдоль линий $\phi = \text{const}$. Уравнение (1.5) является уравнением второго порядка для функции z при заданных y, ϕ . Эти подсистемы решаются попеременно.

Квадрат $A'B'C'D'$ разбивается на прямоугольные ячейки, и искомые функции аппроксимируются значениями в узлах сетки. Каждая итерация начинается с местного интегрирования уравнений (1.3) и (1.6) от отрезка $A'D'$, где $\phi = y = 0$ до отрезка $B'C'$ вдоль всех расчетных линий $\phi = \text{const}$. При этом распределение z считается известным с предыдущей итерации либо заданным как начальное приближение.

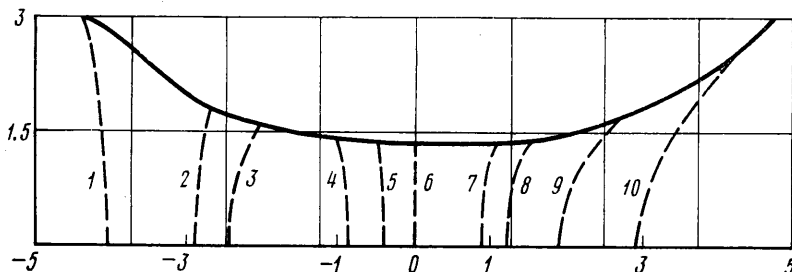
Уравнение (1.5) решается методом верхней релаксации с прогонкой по линиям $\phi = \text{const}$ [11], причем релаксационный параметр выбирался равным 1.2–1.8 для $z < 1$ и полагался единицей для $z > 1$. Граничные условия для уравнения (1.5) имеют следующий вид: $z=1$ на $E'F'$ и $\partial z / \partial \phi = 0$ на $A'B'$ (это следует из уравнения (1.3) при $\phi=0$); на $A'D'$ или $B'C'$ z выбирается равной заданной функции $z(\phi)$, а на другой из этих границ привлекается граничное условие для $\partial z / \partial \psi$, которое будет следствием уравнения (1.4). Функции F_1, F_2, F_3 вычисляются по значениям z с предыдущей итерации. При $z < 1$ уравнение аппроксимируется центральными разностными производными, а при $z > 1$ — по шеститочечной схеме, в которой производные по ϕ приближаются односторонними разностными формулами, чтобы избежать влияния точек, расположенных вниз по потоку [12].

После каждой итерации проверяется на выполнение условие

$$(1.7) \quad \max_{i,j} \left| \frac{z_{i,j}^{(n)}}{z_{i,j}^{(n-1)}} - 1 \right| < \epsilon h^2$$

где ε — заданная точность, $h = \max(h_\varphi, h_\psi)$. Если это условие не выполняется, то проводится новая итерация, начиная с расчета значений y и ψ .

2. Примеры расчетов. По предложенной схеме были проведены расчеты для различных распределений λ или z вдоль оси или образующей канала. Расчеты показали сходимость метода; решение одного варианта требует 600–800 итераций при сетке 40×40 и $\varepsilon = 0.01$ (см. (1.7)). Соответствующее расчетное время составляет 10–15 мин на БЭСМ-6. Отличие расходов газа на входном и выходном сечениях, а также координат точек E и F (фиг. 1) не превысило 0.5%.



Фиг. 2

На фиг. 2 изображено течение газа в плоском канале, вдоль оси которого функция $z(\varphi)$ задавалась в следующем виде:

$$(2.1) \quad z = \begin{cases} z_0 + A_1 \varphi^2, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ 1 - A_2 (\varphi - 0.5)^2, & \varphi_1 \leq \varphi \leq 0.5 \\ 1 + A_3 (\varphi - 0.5)^2, & 0.5 \leq \varphi \leq 1 \end{cases}$$

Здесь $z_0 = 0.05$, $\varphi_1 = 0.35$, $A_3 = 40$, а коэффициенты A_1 и A_2 выбирались из условия гладкости функции z в точке φ_1 . Пунктирные кривые 1–10 соответствуют линиям постоянства числа Маха для $M = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.5$ и 2.0 .

Несмотря на то, что рассматриваемый метод позволяет профилировать как дозвуковую, так и сверхзвуковую части сопла, основное внимание было уделено построению дозвукового участка, так как в настоящее время существуют эффективные методы расчета сверхзвуковых двумерных течений с плоской переходной границей, обладающие высокой точностью [13, 14]. Ниже будут представлены результаты расчетов только дозвуковых частей сопел Лавала.

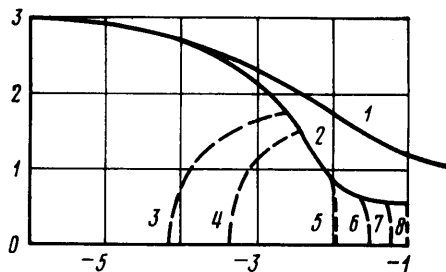
В двух левых столбцах таблицы представлена образующая $y(x)$ плоского сопла, вдоль оси которого функция $\lambda(x)$ была выбрана следующим образом:

$$(2.2) \quad \lambda = \lambda_\infty + (1 - \lambda_\infty)(1 + Ax^2)^{-1}, \quad \lambda_\infty = 0.1, \quad A = 10$$

В следующих столбцах указаны результаты решения задач, в которых значения функции λ на образующей задавались из решения предыдущей задачи. При этом k — число знаков выбранного распределения на стенке (x, y в см). Как видно из таблицы, уже при $k=4$ расхождение не превышает 1.2% и объясняется погрешностью вычислений.

Для расчетов с заданием функции λ на оси была обнаружена следующая закономерность. При уменьшении длины сопла и постоянной ширине AB число итераций возрастает и существует некоторая критическая длина (зависящая от конкретного распределения λ), при которой итерации расходятся. Так, для распределения (2.2) эта длина равняется 2.5 см, для распределения (2.1) — 4.7 см. Это объясняется тем обстоятельством, что у стенки короткого сопла возможно образование скачков уплотнения даже при монотонном поведении скорости газа вдоль оси.

Если же задавать λ на стенке, то подобных ограничений на сходимость не наблюдалось. На фиг. 3 кривая 1 соответствует профилю плоского сопла с распределением



Фиг. 3

(2.2) вдоль образующей, при этом вместо x использовалась переменная l — длина стенки, отсчитываемая от точки E $\lambda_\infty=0.2$, $A=1$. При данных параметрах метод для такого же осевого распределения расходится. Интересно отметить, однако, что если использовать в качестве данных на оси результаты проведенного расчета, то расходимости не будет, и отличие решений составит 0.5–1.5%.

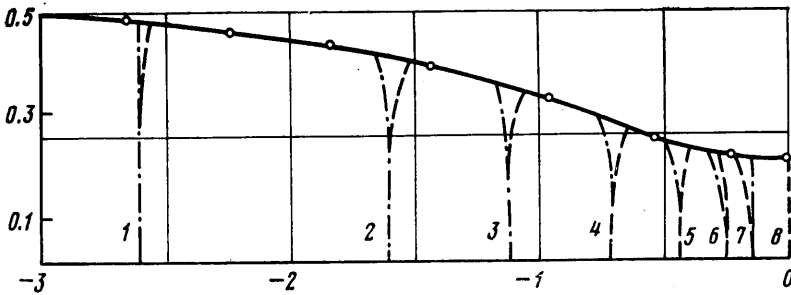
На фиг. 3 изображен также более короткий плоский канал (кривая 2), при этом величина z на образующей задавалась в следующем виде:

$$(2.3) \quad z = z_0 + (1 - z_0) \exp(-kl^2), \quad z_0 = 0.01, \quad k = 1$$

Пунктирные линии 3–8 соответствуют кривым с $M=0.15, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$.

| x | $y(x)$ | $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| -3.00 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -2.50 | 0.4873 | 0.4883 | 0.4880 | 0.4880 |
| -2.00 | 0.4578 | 0.4569 | 0.4567 | 0.4567 |
| -1.50 | 0.3993 | 0.3939 | 0.3943 | 0.3944 |
| -1.00 | 0.3112 | 0.3081 | 0.3081 | 0.3081 |
| -0.50 | 0.1629 | 0.1612 | 0.1614 | 0.1615 |
| -0.00 | 0.0904 | 0.0896 | 0.0897 | 0.0897 |

На фиг. 4 сплошной кривой изображен контур осесимметричного сопла, на оси которого $\lambda(x)$ задавалась по формуле (2.2) при $\lambda_\infty=0.1$, $A=6.2$. Это распределение использовалось также в [4]. Точками отмечены значения $y(x)$ образующей, штрихо-



Фиг. 4

выми линиями нанесены кривые $\lambda = \text{const}$ (для $\lambda = 0.12, 0.15, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$), полученные в [4]. Штрихпунктирные линии изображают кривые с теми же λ , полученные в данном расчете. Видно, что контуры практически совпадают; некоторое различие в положении и форме линий постоянства λ вполне объясняется различным характером граничных условий на входном отверстии AB . Подобная ситуация описана, например, в работе [2].

На фиг. 5 изображены образующие осесимметричных сопел при использовании распределения (2.3) для $z_0=0.001$, $k=0.9, 0.7, 0.3$ (соответствующие кривые 1–3). Для сравнения дозвуковых частей коротких сопел представляется возможным ввести в рассмотрение безразмерный параметр s по формуле $s = (D-d)/L$, где D, d — размеры входного и выходного сечений соответственно, L — длина сопла. Ясно, что чем больше s , тем короче сопло. В [4] s^* — наибольшее значение s для рассчитанных сопел составило ~ 0.3 , причем для сопел с плоской звуковой поверхностью $s^* \sim 0.2$ (в работе [6] $s^* \sim 0.15$). При фиксировании параметров потока на контуре сопла [7, 8] величина s^* увеличивается до 0.5–0.6. Максимально короткие сопла в данной работе имеют $s \sim 0.5$. При этом, как уже отмечалось, нет ограничений на увеличение s . Необходимо только следить, чтобы длина почти прямолинейного участка BK (фиг. 5) была достаточной для того, чтобы граничное условие $\Phi=0$ на входном отверстии AB не вносило заметных искажений в поле течения. Очевидно, что существенное отличие контура от прямолинейного начинается от точки K (фиг. 5), так что фактически для рассчитанных сопел величина $s^* \sim 0.7$.

Чтобы изучить влияние граничного условия $\phi=0$ на AB на течение в канале, были проведены дополнительные расчеты для сопла, изображенного на фиг. 3 (кривая 1). При этом варьировалась длина сопла L . Максимальное отличие результатов расчета канала при $L=9$ от решения с $L=6$ составило 3,5%, от решения с $L=7$ — 2,1%, от решения с $L=8$ — 0,8%. Трансзвуковые части всех построенных сопел практически полностью совпали. Таким образом, погрешность, вносимая граничным условием для ϕ на AB , во-первых, невелика и, во-вторых, резко падает при увеличении L .

Течение во всех рассчитанных соплах получается безотрывным, т. е. давление плавно уменьшается вдоль линий тока. Получившиеся сопла не содержат местных сверхзвуковых зон.

Следует отметить, что в рамках предложенного метода представляется принципиально возможным построение сопел с произвольной (не обязательно плоской) звуковой поверхностью. Однако при этом расчет трансзвуковой части сопла значительно усложнится ввиду необходимости учета влияния сверхзвукового потока газа в горловине сопла на течение в дозвуковой части. Это потребует модификации итерационного алгоритма при решении уравнения (1.5).

Автор выражает признательность А. В. Шипилину и Ю. Д. Шмыглевскому за ценные консультации и обсуждения, постоянное внимание к работе.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреев В. И., Лифшиц Ю. Б. О трансзвуковом течении газа в осесимметричных соплах Лавала с кривыми стенками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
2. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Расчет смешанного течения газа в соплах. Тр. Секции по численным методам в газовой динамике II Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Т. 2, М., ВЦ АН СССР, 1971.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
4. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
5. Овсянников А. М. Расчет течения в дозвуковой и трансзвуковой частях кольцевых сопел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
6. Cohen M. J., Portnoy H. Irrotational subsonic flow of an ideal gas in two-dimensional ducts-optimal ducts and ducts with plane sonic exits. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 5. (Рус. перев. Безвихревое дозвуковое течение идеального газа в двумерных каналах. Каналы оптимальной формы и каналы с плоской звуковой поверхностью на выходе. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 5.)
7. Подсыпанкина Н. А., Шифрин Э. Г. Об одном методе профилирования коротких плоских сопел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
8. Подсыпанкина Н. А. Использование плоскости годографа при профилировании численным методом осесимметричного сопла Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
9. Бугов В. Г., Васенин И. М., Шелуха А. И. Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
10. Шипилин А. В. Итерационный численный метод расчета течений излучающего газа при дозвуковых скоростях. В сб. «Динамика излучающего газа», вып. 2, М., ВЦ АН СССР, 1976.
11. Вазов В., Форсайт Д. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд. иностр. лит., 1963.
12. Murman E. M., Cole J. D. Calculation of plane steady transonic flows. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 1. (Рус. перев. Расчет установившихся плоских трансзвуковых течений. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 1.)
13. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. М., Изд-во АН СССР, 1962.
14. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.