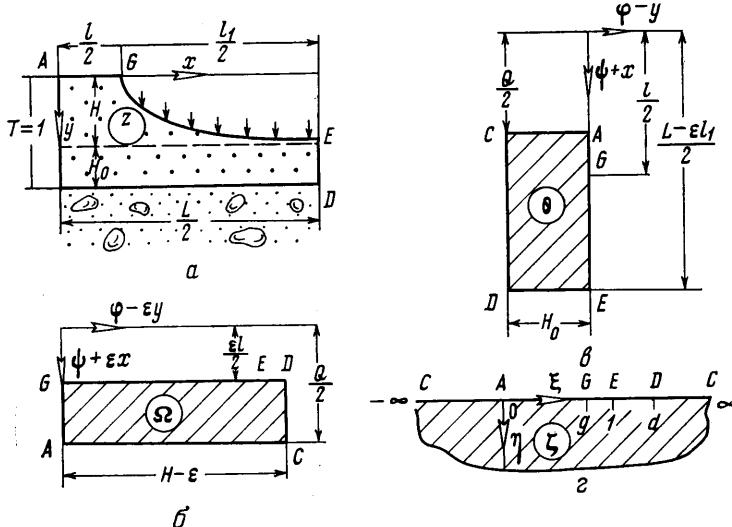


**О РЕЖИМЕ ГРУНТОВЫХ ВОД В ОРОШАЕМОМ ПОЧВЕННОМ СЛОЕ  
С НИЖЕЛЕЖАЩИМ СИЛЬНОПРОНИЦАЕМЫМ НАПОРНЫМ ГОРИЗОНТОМ**

В. Н. ЭМИХ

(Новосибирск)

Решается задача о плоской безнапорной установившейся фильтрации из системы равноудаленных каналов одинаковой ширины через почвенный слой в нижележащий напорный горизонт при равномерной инфильтрации (испарения) на свободную поверхность. Устанавливается однозначная разрешимость системы уравнений относительно двух неизвестных параметров отображения. Аналитически исследован



Фиг. 1

характер зависимости фильтрационного расхода из канала от интенсивности инфильтрации и величины подпора.

На фиг. 1, а схематично изображен один из полупериодов плоского безнапорного течения грунтовых вод из систем равноудаленных каналов одинаковой ширины  $l$  (с малой глубиной воды) через почвенный слой мощности  $T$  в нижележащий сильно-проницаемый напорный горизонт при равномерной инфильтрации интенсивности  $\varepsilon$  между каналами. Для построения решения введем, следуя [1], функцию  $\Omega = \omega + iz$ , где  $\omega = \phi + i\psi$  и  $z = x + iy$  – комплексный потенциал и комплексная координата, отнесенные соответственно к  $\kappa T$  и  $T$  ( $x$  – коэффициент фильтрации почвенного слоя). Примем  $\omega|_{z=0} = 0$ ,  $\phi|_{z=0} = H = \text{const}$ ,  $\psi|_{z=0} = Q/2$  ( $Q$  – искомый фильтрационный расход из канала на единицу его длины). Рассмотрим далее функцию Н. Е. Жуковского  $\theta = \omega + iz$ . Отображая области функций  $\Omega$  и  $\theta$  (фиг. 1, б, в) на полу平面  $\text{Im } \xi \geq 0$  (фиг. 1, г), найдем ( $F$  – эллиптический интеграл первого рода)

$$(1) \quad \Omega = \frac{(H-\varepsilon)\sqrt{d}}{2K(\lambda'_g)} \int_g^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-g/\xi)(d-\xi)}} + i \frac{\varepsilon l}{2} =$$

$$= \frac{H-\varepsilon}{K(\lambda'_g)} F \left( \arcsin \frac{\sqrt{1-g/\xi}}{\lambda'_g}, \lambda'_g \right) + i \frac{\varepsilon l}{2}$$

$$(2) \quad \theta = i \frac{H_0 \sqrt{d}}{2K(\lambda')} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(d-\xi)}} + i \frac{Q}{2} = i \frac{H_0}{K(\lambda')} F(\arcsin \sqrt{\xi}, \lambda) + i \frac{Q}{2}$$

$$(3) \quad \lambda'_g = \sqrt{1-\lambda_g^2}, \quad \lambda_g = \lambda \sqrt{g}, \quad \lambda = \sqrt{1/d}, \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad K(k) = F(\pi/2, k)$$

Последовательно полагая в (2)  $\xi=g$ ,  $\theta=il/2$  и  $\xi=1$ ,  $\theta=i(L-ei)/2$  ( $L$  – расстояние между соседними каналами,  $l_1=L-l$ ), получим

$$(4) \quad l = q + \frac{2\alpha F}{K'}, \quad q = \frac{Q-ei}{1-e}, \quad \alpha = \frac{H_0}{1-e}$$

$$(5) \quad L = q + \frac{2\alpha K}{K'}, \quad F=F(\arcsin\sqrt{g}, \lambda), \quad K=K(\lambda), \quad K'=K(\lambda')$$

Вычтем (4) из (5); тогда полученное равенство совместно с (5) образует следующую систему уравнений относительно параметров  $g$  и  $\lambda$ :

$$(6) \quad f_l(g, \lambda)=2\alpha(K-F)/K'-l_1=0, \quad f_L(g, \lambda)=q+2\alpha K/K'-L=0$$

Величина  $q$  определяется на основании (1) выражением

$$(7) \quad q=2\beta K_g/K_g', \quad \beta=1-\alpha, \quad K_g=K(\lambda_g), \quad K_g'=K(\lambda_g')$$

Выясним вопрос о разрешимости системы (6) при фиксированных значениях величин  $L$ ,  $l$ ,  $H$  и  $e$  ( $0 < L < \infty$ ,  $0 < l \leq L$ ,  $0 < H < 1$ ,  $0 \leq e < H$ ). С использованием свойств эллиптических интегралов [2] найдем

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_l}{\partial g} &= -\frac{\alpha}{\lambda_g' K' \sqrt{g-(1-g)}}, & \frac{\partial f_l}{\partial \lambda} &= \frac{\pi \alpha}{\lambda \lambda'^2 K'^2} \Lambda_0 \left( \arcsin \frac{\sqrt{1-g}}{\lambda_g'}, \lambda' \right) \\ \frac{\partial f_L}{\partial g} &= \frac{\pi \beta}{2g \lambda_g'^2 K_g^2}, & \frac{\partial f_L}{\partial \lambda} &= \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\alpha}{\lambda'^2 K'^2} + \frac{\beta}{\lambda_g'^2 K_g'^2} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $E$  – эллиптический интеграл второго рода.

Из первого равенства (6) получаем ( $sn$  – эллиптическая функция Якоби [2])

$$(9) \quad g=g_l(\lambda)=sn^2(u, k), \quad u=K-l_1 K'/2\alpha$$

Согласно (8) функция  $g_l(\lambda)$  монотонно возрастает от 0 до 1 в промежутке  $[\lambda_{0l}, 1]$ , причем

$$(10) \quad K(\lambda_{0l})/K(\lambda_{0l}')=l_1/2\alpha$$

С помощью зависимости (9) сведем второе равенство (6) к уравнению относительно параметра  $\lambda$ . Существование в интервале  $(\lambda_{0l}, 1)$  единственного корня этого уравнения обеспечивается следующими соотношениями, вытекающими из равенств (6) – (10)

$$f_L[g_l(\lambda_{0l}), \lambda_{0l}]=-l, \quad f_L[g_l(1), 1]=\infty; \quad df_L/d\lambda>0$$

Фактически же корень  $\lambda$  содержится заведомо в более узком интервале, чем  $(\lambda_{0l}, 1)$ . В самом деле, второе равенство (6) определяет в силу (8) функцию  $g_L(\lambda)$ , монотонно убывающую от 1 до 0 в промежутке  $[\lambda_{0l}, \lambda_1]$

$$(11) \quad 2K(\lambda_{0l})K^{-1}(\lambda_{0l}')=L, \quad 2K(\lambda_1)K^{-1}(\lambda_1')=L_a^{-1}$$

Поэтому с учетом вышесказанного получим

$$(12) \quad \lambda \in (\lambda_{0l}, \lambda_1), \quad \lambda_0=\max(\lambda_{0l}, \lambda_{0L})$$

В такой постановке задачи вместе с параметрами  $q$  и  $\lambda$  согласно (7) и (4) однозначно определяется и фильтрационный расход из канала  $Q$ , величину которого можно оценить исходя из (4):  $Hl < Q < l$ .

Оценка сверху, эквивалентная неравенству  $q < l$ , следует непосредственно из (4) и отражает наличие подпора со стороны нижележащего горизонта ( $H_0 > 0$ ). Нижняя оценка основана на следующем неравенстве:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{K_g}{K_g'} - \frac{F}{K'} &= \frac{1}{K' K_g'} \left[ \int_0^1 \frac{K' du}{\sqrt{(1-u^2)(1-g\lambda u^2)}} - \int_0^1 \frac{\sqrt{g} K_g' du}{\sqrt{(1-gu^2)(1-g\lambda^2 u^2)}} \right] = \\ &= \frac{1}{K' K_g'} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-g\lambda^2 u^2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda'^2y^2)}} - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{(1-gu^2)(1-\lambda_g'^2y^2)}} \left[ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right] > 0$$

В силу (13), (4) и (7) получим  $l < 2K_g/K_g'$ ,  $\beta l < q$ , что равносильно неравенству  $Hl < Q$ . С физической точки зрения оно отражает превышение  $Q$  над расходом  $Hl$  при одномерной фильтрации (при разности напоров  $H$ ), связанное с растеканием в стороны.

Проследим теперь за поведением расхода  $Q$  с изменением каждой из величин  $\alpha$  и  $H_0$ , фиксируя при этом остальные физические параметры задачи.

Согласно (5) имеем

$$Q = L - el_1 - 2H_0 \frac{K}{K'}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -l_1 - 2H_0 \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{K}{K'} \right) \frac{d\lambda}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} = \\ = -l_1 - \frac{\pi \alpha^2}{\lambda \lambda'^2 K'^2} \frac{d\lambda}{d\alpha}$$

Дифференцируя уравнения (6) полным образом по  $\alpha$ , найдем

$$(14) \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{D_\lambda}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_l}{\partial g} & \frac{\partial f_l}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_L}{\partial g} & \frac{\partial f_L}{\partial \lambda} \end{vmatrix}, \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_l}{\partial g} & -\frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_L}{\partial g} & -\frac{\partial f_L}{\partial \alpha} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} = \frac{l_1}{\alpha} = 2 \frac{K-F}{K'}, \quad \frac{\partial f_L}{\partial \alpha} = 2 \left( \frac{K}{K'} - \frac{K_g}{K_g'} \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial \epsilon} = -\frac{U}{\lambda \lambda'^2 K'^2 D}, \quad U = \lambda \lambda'^2 K'^2 l D + \pi \alpha^2 D_\lambda$$

Используя соотношения (14), (8), (13) и свойства функции  $\Lambda_0$  [2], преобразуем выражение для  $U$

$$U = \frac{\partial f_l}{\partial g} \left( \lambda \lambda'^2 K'^2 l_1 \frac{\partial f_L}{\partial \lambda} - \pi \alpha^2 \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial f_L}{\partial g} \left( \pi \alpha^2 \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} - \lambda \lambda'^2 K'^2 l_1 \frac{\partial f_l}{\partial \lambda} \right) = \\ = \frac{\alpha}{\lambda_g' K' \sqrt{g(1-g)}} \left[ 2\pi \alpha^2 \left( \frac{K}{K'} - \frac{K_g}{K_g'} \right) - \pi \lambda'^2 K'^2 l_1 \left( \frac{\alpha}{\lambda'^2 K'^2} + \frac{\beta}{\lambda_g'^2 K_g'^2} \right) \right] + \\ + \frac{\pi^2 \alpha \beta l_1}{g \lambda_g'^2 K_g'^2} \left[ 1 - \Lambda_0 \left( \arcsin \frac{\sqrt{1-g}}{\lambda_g'}, \lambda' \right) \right] = \frac{2\pi \alpha^3}{\lambda_g' K' \sqrt{g(1-g)}} \left( \frac{F}{K'} - \frac{K_g}{K_g'} \right) + \\ + \frac{\pi^2 \alpha \beta l_1}{g \lambda_g'^2 K_g'^2} \left[ \Lambda_0 \left( \arcsin \sqrt{g}, \lambda' \right) - \frac{2K'}{\pi} \sqrt{\frac{1-\lambda_g'^2}{1-g}} \sqrt{g} \right] < 0$$

Так как  $D < 0$  в силу (8), то  $\partial Q / \partial \epsilon < 0$ .

Используя этот результат и вновь исходя из выражения для  $Q$ , с учетом (6) получим (при фиксированных величинах  $L$ ,  $l$  и  $\epsilon$ )

$$\frac{\partial Q}{\partial H_0} - 2 \frac{K}{K'} - 2H_0 \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{K}{K'} \right) \frac{d\lambda}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} = -2 \frac{F}{K'} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon} < 0$$

Итак, инфильтрация играет ту же роль подпора по отношению к фильтрации из канала, что и величина  $H_0$ ; влияние обоих этих факторов проявляется через параметр  $\alpha$ . В пределе при  $\epsilon \rightarrow H$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) согласно (7) имеем  $q=0$ ,  $Q=Hl$ . Из соотношения  $\text{Re } \Omega = \varphi - \epsilon y = (1-\epsilon)y$ , выполняющегося вдоль  $GE$ , и из (1) следует, что в указанном предельном случае кривая депрессии выходит на поверхность земли:  $y=0$ , на  $GE$ . Область  $\Omega$  вырождается при этом в точку  $G$ , и в результате имеем  $\omega = iH(l/2-z)$ , что

соответствует одномерному течению сквозь почвенный слой вниз по вертикали с приведенной скоростью  $H$ .

Другой частный случай ( $l=0, Q=0$ ) также связан с вырождением функции  $\Omega$ . При этом в силу условия  $\phi|_{CD}=H$  имеем  $\omega=\omega_0=-iez+H-e$  — нисходящую фильтрацию с приведенной скоростью  $e$  и горизонтальной свободной поверхностью на уровне

$$(15) \quad y_0=\beta=(H-e)/(1-e)=H-e(1-e)H_0$$

Замечая, что фильтрационный расход такого одномерного потока в полосе  $|x|\leq l$  составляет  $el$ , видим, что добавление к нему величины  $q(1-e)=Q-el$  обеспечивает затопление земли при  $|x|\leq l$  с возникновением рассматриваемого двумерного течения. Его комплексный потенциал  $\omega$  складывается (с точностью до постоянной) из потенциала  $\omega_0$  и функции  $\Omega$ .

С точки зрения мелиорации важен вопрос о влиянии указанных дополнительных фильтрационных потерь из каналов на уровень грунтовых вод между последними. Основываясь на зависимостях

$$(16) \quad z=\frac{i(\Omega-\theta)}{1-e}, \quad \omega=\frac{\Omega-e\theta}{1-e}$$

которые совместно с (1) и (2) дают решение задачи, получим следующее параметрическое уравнение кривой депрессии

$$(17) \quad x=\frac{l}{2}+\frac{\alpha}{K'}[F(\arcsin\sqrt{\zeta}, \lambda)-F(\arcsin\sqrt{g}, \lambda)], \quad y=y_0-\Delta y$$

$$\Delta y=\frac{\beta}{K'_g}F\left[\arcsin\frac{\sqrt{1-\lambda^2\zeta}}{\lambda_g'}, \lambda_g'\right]$$

Величина  $\Delta y$  характеризует степень подтопления. Для точки  $E$ , находящейся посередине между каналами, получаем

$$(18) \quad \Delta y_E=\beta F[\arcsin(\lambda'/\lambda_g'), \lambda_g']/K_g'$$

Оценим величину  $\lambda_g'$ . На основании равенств (4), (5) и (10) имеем

$$(2x-l)/l_1 < F(\arcsin\sqrt{\zeta}, \lambda)/K < 2x/L$$

Обращение этих соотношений представим в виде ( $dn$  — эллиптическая функция Якоби [2])

$$(19) \quad dn\left(\frac{2xK}{L}, \lambda\right) < \sqrt{1-\lambda^2\zeta} < dn\left[\frac{(2x-l)K}{l_1}, \lambda\right]$$

Из первого неравенства при  $\zeta=g$ ,  $x=l/2$  получим

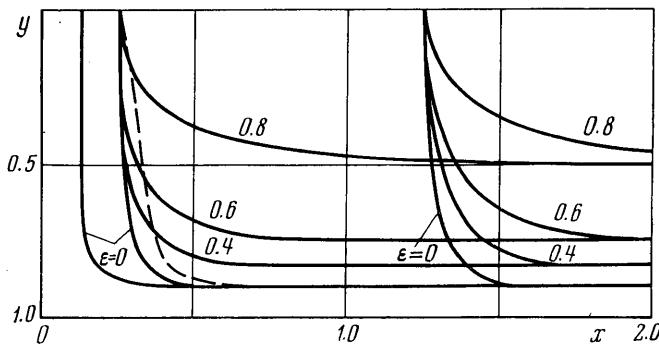
$$(20) \quad \lambda_g' > dn(lK/L, \lambda)$$

Согласно (10)–(12) нижняя граница  $\lambda_0$  значений  $\lambda$  быстро приближается к единице с возрастанием величин  $L$  и  $l_1$  и с убыванием  $\alpha$  (последний фактор связан, в первую очередь, с ослаблением подпора  $H_0$  со стороны нижележащего горизонта). Соответственно этому имеем [2]

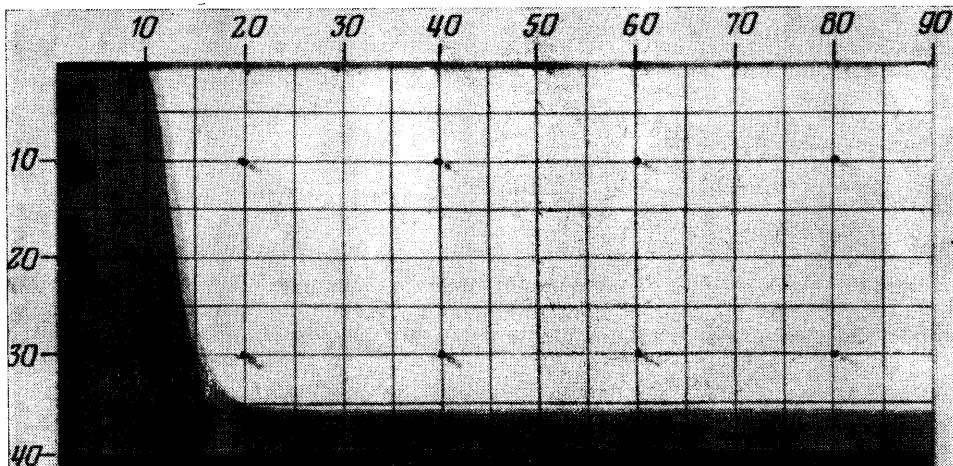
$$(21) \quad \lambda' < \lambda_0'; \quad \lambda_0' \approx 4\exp(-\pi l^*/2), \quad l^* = \max(L/2, l_1/2\alpha)$$

Как видно из (21), случай малых значений  $\lambda'$  реализуется в широком диапазоне изменения определяющих физических параметров и заслуживает поэтому более детального анализа.

Согласно (18), (20) и с учетом равенства  $dn(K/2; \lambda)=\sqrt{\lambda}'$  [2] заключаем, что если  $l < L/2$ , то  $\lambda_g' > \sqrt{\lambda}'$ ,  $\Delta y_E = O(\sqrt{\lambda}')$ . Из (7) и (4) имеем  $K_g/K_g' < l/2\beta$ . Как оценка для  $\lambda_g'$  это соотношение нагляднее, а при малых  $l$  и точнее, чем использованная выше оценка (20). Из него, в частности, следует, что  $\lambda_g'=O(1)$ ,  $\Delta y_E=O(\lambda')$  для каналов, не слишком широких по сравнению с естественной глубиной грунтовых вод (см. (15)). Считая далее это условие выполненным и учитывая (21), видим, что при расстояниях между каналами, в несколько раз превышающих мощность почвенного слоя, и при малом подпоре влияние каналов на уровень грунтовых вод посередине между ними практически не проявляется. Более того, даже при  $x=1/2l+1/4l_1$  в силу второго неравенства (19) имеем  $\sqrt{1-\lambda^2\zeta} < dn(K/2, \lambda)=\sqrt{\lambda}'$ , и согласно (17)  $\Delta y=O(\lambda')$ , т. е. подтопление из канала пренебрежимо мало и на таком расстоянии. Высказанные



Фиг. 2



Фиг. 3

ное отражает близость рассматриваемого случая к схеме одиночного канала, исследованной ранее в [3].

Определим зону влияния канала как такую его окрестность, в пределах которой выполняется неравенство  $\Delta y > \delta$ , где  $\delta$  – заданное малое (но практически измеримое) превышение уровня грунтовых вод над естественным уровнем  $y_0 = \beta(\lambda' \ll \delta \ll 1)$ . Оценим ширину указанной зоны  $R = x_\delta - l/2(x_\delta = x|_{y=y_0+\delta})$ . Исходя из первого уравнения (17), находим

$$(22) \quad R < \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\zeta - \sqrt{g}}}{1 - \sqrt{g}\zeta} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left[ \frac{1-g}{1-\zeta} \left( \frac{1+\sqrt{\zeta}}{1+\sqrt{g}} \right)^2 \right] < R^* = \\ = \frac{2\alpha}{\pi} \ln \left( 2 \sqrt{\frac{1-g}{1-\zeta}} \right)$$

Далее, используя последнее равенство (17) при  $\Delta y = \delta$  и соотношение  $K_g'/\beta > 2K_g/l$ , следующее из (7) и (4), имеем

$$\frac{1-g}{1-\zeta} = \frac{1-\lambda^2 g}{1-\lambda^2 \zeta} \left[ 1 + O \left( \frac{\lambda'}{\delta^2} \right)^2 \right] \approx \\ \approx \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\delta K_g'/\beta, \lambda_g')} < \frac{1}{\operatorname{sn}^2(2\delta K_g/l, \lambda_g')} < \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\delta\pi/l, \lambda_g')}$$

Возвращаясь к (22), при малых значениях  $\delta l/l$  получим

$$(23) \quad R < R^*, \quad R^* \approx (2\alpha/\pi) \ln(2l/\pi\delta)$$

Здесь, как и при оценке величины  $\Delta y$ , первостепенную роль играет напор в нижележащем горизонте. Уменьшение его (например, посредством вертикального дренажа) приводит, таким образом, к сокращению зоны подтопления из каналов на фоне общего понижения уровня грунтовых вод в покровном слое.

На фиг. 2 изображены кривые депрессии, рассчитанные по уравнениям (17) при  $L=5$ ,  $H=0.9$ ,  $l=0.25$ ,  $0.5$  и  $2.5$ ; для двух последних значений  $l$  варьировалась величина  $\epsilon$ . Прерывистой линией представлена кривая, зафиксированная при моделировании течения в щелевом лотке для  $l=0.5$  (фиг. 3). Отклонение экспериментальной

Таблица 1

$\epsilon$	$l=2.5$			$l=0.5$		
	$g$	$y_E$	$Q$	$g$	$y_E$	$Q$
0	0.7599	0.9000	2.3293	$0.189 \cdot 10^{-3}$	0.9000	0.4983
0.2	0.7670	0.8750	2.3271	$0.254 \cdot 10^{-3}$	0.8750	0.4978
0.4	0.7785	0.8333	2.3235	$0.413 \cdot 10^{-3}$	0.8333	0.4974
0.6	0.8001	0.7496	2.3161	$0.106 \cdot 10^{-2}$	0.7500	0.4959
0.8	0.8543	0.4875	2.2941	0.0111	0.4996	0.4865

кривой от расчетной обусловлено влиянием на течение в лотке капиллярных сил, вызывающих дополнительное растекание в стороны, и в меньшей степени наличием некоторого конечного слоя глицерина над входом в щель.

Для тех расчетных вариантов, в которых отличие  $\lambda$  от единицы улавливалось ЭВМ, параметры  $g$  и  $\lambda$  предварительно вычислялись из системы (6); в остальных же случаях из второго уравнения (6) при  $\lambda=1$  определялся параметр  $g$ .

Отметим, что для всех указанных значений  $\epsilon$  величина параметра  $\lambda$  с точностью до  $10^{-3}$  равна единице и в табл. 1 не указывается.

В табл. 1 приведены результаты расчетов величин  $y_E$  и  $Q$ .

Таблица 2

$H$	$l=0.25$			$l=0.5$		
	$\delta \cdot 10^3$	$R$	$R^*$	$\delta \cdot 10^3$	$R$	$R^*$
0.5	2.48	1.318	1.325	4.36	1.287	1.366
0.7	2.51	0.792	0.793	4.87	0.784	0.798
0.9	2.50	0.264	0.264	5.02	0.263	0.264

Здесь же приведены результаты расчета при следующих значениях определяющих параметров  $l=0.25$ ,  $\epsilon=0$ :

$$g=0.241 \cdot 10^{-8}, \quad y_E=0.900, \quad Q=0.250$$

Значения  $Q$  отражают отмеченный выше характер зависимости  $Q(\epsilon)$ .

В табл. 2 приводятся значения величины  $R$ , соответствующие некоторым расчетным точкам депрессионных кривых, и ее приближенные значения  $R^*$ , вычисленные по формуле (23).

Из сравнения величин  $R$  и  $R^*$  видно, что при относительно малых значениях  $l$  и  $H_0$  приближенная формула (23) для  $R^*$  с высокой точностью определяет и саму величину  $R$ .

Полученное решение и основанные на нем результаты сохраняют силу и при  $\epsilon < 0$ , т. е. при наличии испарения со свободной поверхности, равномерно распределенного по горизонтали.

Автор благодарит Н. С. Колодея за помощь при расчетах и моделировании.

Поступила 8 II 1978

## ЛИТЕРАТУРА

- Нумеров С. И. Об одном способе решения фильтрационных задач при наличии инфильтрации или испарения жидкости со свободной поверхности. Изв. Всесоюз. науч.-исслед. ин-та гидротехники, 1948, т. 38.
- Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin, Springer — Verlag, 1971.
- Нумеров С. И. О фильтрации из каналов деривационных ГЭС и ирригационных систем. Изв. Всесоюз. науч.-исслед. ин-та гидротехники, 1947, т. 34.

УДК 532.64

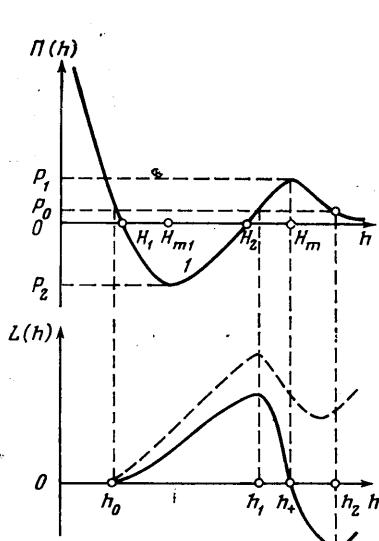
## СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ НЕПЛОСКИХ СЛОЕВ ЖИДКОСТЕЙ

В. М. СТАРОВ

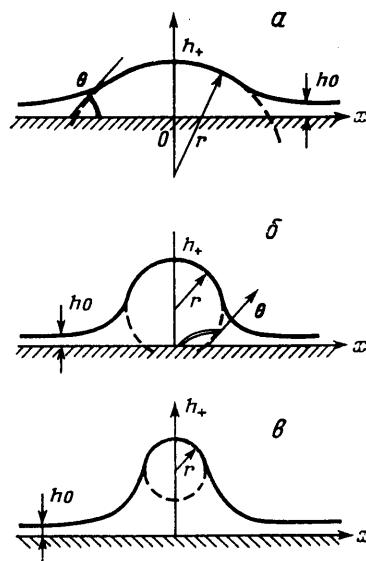
(Москва)

Начиная с работ Б. В. Дерягина [1, 2], который ввел понятие расклинивающего давления тонких слоев жидкости, много работ [3] посвящено вопросам существования и устойчивости тонких плоских пленок. В [4] впервые сделана попытка рассмотрения совместного действия расклинивающего давления и кривизны поверхности пленки вдали от мениска и показана возможность образования в тонких щелевых порах волнистых равновесных пленок наряду с плоскими.

В настоящей работе рассматриваются тонкие пленки жидкости на плоской твердой подложке. Показано, что в случае немонотонных (*S*-образных) изотерм раскли-



Фиг. 1



Фиг. 2

нивающего давления  $\Pi(h)$  кроме устойчивых плоских пленок  $h_0 = \text{const}$  при некоторых ограничениях могут существовать и быть устойчивыми волнообразные пленки и единичные выпуклости; на плоских пленках эти выпуклости ниже всюду будут называться каплями. Для упрощения далее в работе рассматриваются тонкие слои, толщина которых будет меняться лишь в одном направлении.

1. Равновесные капли. Поверхность любого неплоского слоя  $h(x)$  описывается уравнением [4]

$$(1.1) \quad \sigma h''(1+h'^2)^{-3/2} + \Pi(h) = RTv_m^{-1} \ln(p_s/p) = P_0$$