

**ИЗМЕНЕНИЕ ТОЛЩИНЫ НЕСЖИМАЕМОГО
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ**

Б. А. КАДЕР

(Москва)

На основе соображений размерности получена зависимость, определяющая изменение толщины турбулентного пограничного слоя, развивающегося в условиях сильного положительного или отрицательного градиента давления. Сравнение полученной формулы с имеющимися экспериментальными данными позволило определить значение входящей в нее универсальной постоянной. Предлагается интерполяционная зависимость, справедливая при любом не слишком резко изменяющемся распределении скорости на внешней границе турбулентного пограничного слоя. Результаты расчета по этой зависимости сравниваются с многочисленными опытными данными об изменении толщины турбулентных пограничных слоев.

Характерный поперечный размер пограничного слоя (в первую очередь, его толщина δ , определяемая по профилю средней скорости $U(y)$ с помощью условия $U(\delta) = -0.99U_\infty$, где U_∞ — скорость потенциального течения вне пограничного слоя, или же заменяющие δ интегральные характеристики типа толщины вытеснения δ^* или толщины потери импульса δ^{**}) является одной из важнейших характеристик течения жидкости вдоль стенки, непосредственно входящей во все основные расчетные формулы теории таких течений (в частности, во все известные формы «закона сопротивления», определяющего важный для многих приложений коэффициент трения). В случае ламинарного пограничного слоя этот размер может быть определен либо исходя из точного решения дифференциальных уравнений пограничного слоя (если имеется такое решение), либо же с помощью применения какого-либо из приближенных, но обладающих достаточно хорошей точностью методов решения тех же уравнений (см. [1, 2]). Для турбулентного же пограничного слоя положение существенно осложнено отсутствием замкнутой системы уравнений, описывающей такой слой. Поэтому в литературе (см., например, монографии [2–5], содержащие много дополнительных ссылок), как правило, приводятся лишь не очень точные и имеющие ограниченную область применимости чисто эмпирические соотношения, связывающие при заданных распределении внешней скорости $U_\infty(x)$ и начальных условиях в некотором «начальном» сечении $x=x_0$ какой-то характерный размер пограничного слоя (чаще всего δ^{**}) со значением продольной координаты x или же включающей x безразмерной комбинации $Re_x = U_\infty x / v$.

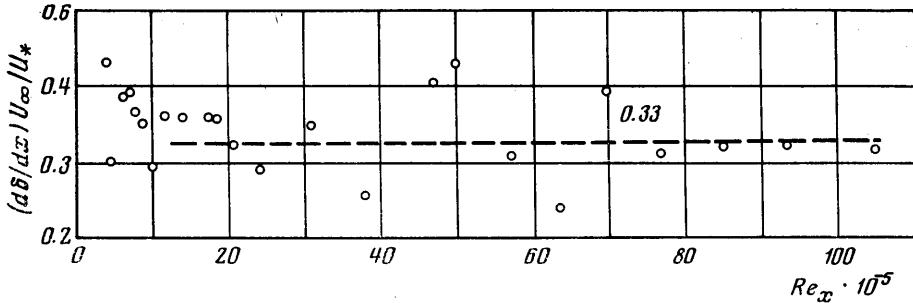
В данной статье развит иной подход к расчету толщины турбулентного пограничного слоя $\delta=\delta(x)$ для широкой совокупности распределений внешней скорости $U_\infty(x)$. Этот подход опирается, в первую очередь, на соображения размерности и подобия и может рассматриваться как обобщение вывода формулы для $\delta(x)$ в случае безградиентного течения с $U_\infty(x) = \text{const}$, содержащегося в книге [6] (см. также [3], § 5.6). Чтобы иметь возможность в полной мере использовать указанные соображения, будем рассматривать лишь двумерные установившиеся пограничные слои несжимаемой жидкости, текущей в направлении оси x вдоль стенки, совпадающей с плоскостью $y=0$. Эти слои будут предполагаться локально-равновесными в том смысле, что течение здесь успевает приспособиться к не слишком резкому изменению вдоль оси x внешней скорости U_∞ и продольного градиента давления dP/dx , и поэтому все его характеристики в фиксированном сечении $x=\text{const}$ могут зависеть лишь от значений U_∞ , dP/dx и δ (а также от определяемого законом сопротивления значения «скорости трения» $u_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$, где τ — напряжение трения на стенке, а ρ — плотность жидкости) при том же значении x . Отметим, что это допущение о «локальной равновесности» фактически используется почти во всех существующих методах расчета турбулентных пограничных слоев (в частности, во всех методах расчета, описанных в [2–5, 7]) и хорошо подтверждается имеющимися данными многочисленных измерений при весьма различных внешних условиях, в частности всеми данными, собранными во втором томе книги [7] (см., например, [8], где приведено также и условие, нужное для справедливости указанного допущения).

Напомним прежде всего вывод формулы для $\delta(x)$ при $U_\infty = \text{const}$ и $dP/dx = 0$, приведенный в [6]. Он исходит из того, что тангенс угла наклона относительно оси x границы турбулентного пограничного слоя пропорционален отношению средней вертикальной к средней горизонтальной скорости при $y=\delta$. В то время как средняя горизонтальная скорость практически не отличается от U_∞ , средняя вертикальная скорость во внешней части развитого турбулентного пограничного слоя v не зави-

сит от U_∞ и v и определяется лишь пульсационным движением. Если $dP/dx=0$, т. е. $U_\infty=\text{const}$, то она может зависеть лишь от u_* и δ , т. е. в силу соображений размерности должна быть пропорциональна u_* . Таким образом, при $dP/dx=0$

$$(1) \quad d\delta/dx = a(u_*/U_\infty), \quad \delta(x) = \delta(x_0) + a \int_{x_0}^x (u_*/U_\infty) dx$$

где a – универсальная постоянная порядка единицы, величина которой не изменяется при любых воздействиях на пограничный слой, изменяющих лишь величину u_* (таких, например, как изменение шероховатости стенки, растворение в жидкости небольших добавок полимеров и т. д.). Нетрудно указать и пути обобщения этой за-



Фиг. 1

висимости на случай пристеночных воздействий другой природы (таких, как вдув и отсос ограниченной интенсивности), но эти случаи здесь разбираться не будут.

Заметим, что при течении у гладкой стенки величина u_* лишь очень медленно изменяется с ростом координаты x (примерно пропорционально $x^{-1/4}$, см. [3], стр. 277), так что в первом приближении можно вообще вынести u_*/U_∞ из под знака интеграла в правой части второй формулы (1). Получаемый при этом простой результат будет справедлив также и при условии, что величина u_* не является строго постоянной, но пропорциональна некоторой степени x ; он может быть записан в виде

$$(2) \quad \delta(x) = \delta(x_0) + a_1(u_*/U_\infty)(x - x_0)$$

где значение безразмерного коэффициента a_1 лишь ненамного (на 7%, если $u_* \sim x^{-1/4}$) превышает значение a .

Для определения величины коэффициента a можно воспользоваться, например, данными типательных экспериментов Вигхардта (1400) и Белла (3000), приведенных в табличной форме во втором томе [7]. (В [7] можно найти также точные библиографические координаты этих и других экспериментальных работ, результаты которых будут широко использоваться в дальнейшем; на приводимых ниже ссылках будут всегда указываться номера, присвоенные соответствующим экспериментам в книге [7].) На фиг. 1 приведена зависимость безразмерного отношения $a = (U_\infty/u_*)d\delta/dx = (U_\infty/u_*)[\delta(x_{i+1}) - \delta(x_i)]/(x_{i+1} - x_i)$, где x_i и x_{i+1} – продольные координаты двух последовательных станций наблюдения, а угловые скобки здесь и ниже означают среднее арифметическое измеренных значений в точках x_i и x_{i+1} , от Re_x по данным двух указанных выше экспериментов. Несмотря на заметный разброс опытных точек, вызванный использованием грубого численного дифференцирования экспериментальных данных¹, собранные на фиг. 1 материалы в целом подтверждают, что величину a можно считать не зависящей от Re_x , т. е. принимающей постоянное значение (близкое к $1/3 \approx 0.33$).

Уместно отметить, что выписанные выше для случая пограничного слоя с $dP/dx=0$ формулы (1) и (2) неявно содержались уже в работе Кармана [9] (см. также [10]). Предположив, что в каждом сечении слоя профиль средней скорости описывается логарифмической формулой, Карман фактически исключил функцию $\delta(x)$

¹ Разброс точек, разумеется, существенно уменьшился бы, если бы функция $\delta(x)$, построенная по экспериментальным точкам, сначала сглаживалась и значения производной $d\delta/dx$ определялись по сглаженной кривой или же проверялось не первое, а второе соотношение (1). Однако принятый здесь метод проверки формул (1) кажется автору наиболее простым и объективным.

(не выписывая, впрочем, саму эту функцию) из интегрального уравнения импульсов:

$$(3) \quad d\delta^{**}/dx = (u_*/U_\infty)^2$$

и впервые получил универсальный закон трения безградиентного потока о пластине. Этот закон согласуется с формой закона трения, получаемой при суммировании при-стенного логарифмического закона и логарифмической формы закона дефекта ско-рости, лишь при условии, что $\delta(x) \sim u_*x/U_\infty$ (ср. [3], стр. 273–275).

В то же время другие подходы, основанные на предположении о полном подобии распределения скоростей в различных сечениях пограничного слоя (обычно задавае-мых при этом предположении степенными формулами), приводят в силу (3) к не-верной в применении к турбулентному пограничному слою зависимости вида $d\delta/dx \sim (u_*/U_\infty)^2$ (см. [2, 10]).

Укажем, что эта последняя зависимость выполняется для ламинарного погранич-ного слоя на плоской пластине, причем в этом последнем случае она также может быть получена из размерностных соображений. В самом деле, величина u_* в списке физических параметров, существенных для рассматриваемой задачи, здесь должна быть заменена коэффициентом вязкости ν , при ламинарном течении играющим су-щественную роль при всех значениях y в пределах пограничного слоя. Поэтому со-ображения размерности здесь указывают, что вертикальная скорость на границе пограничного слоя должна быть пропорциональна ν/δ , так что $d\delta/dx \sim \nu/U_\infty$. Сравни-вая последний результат с известной оценкой $\nu/\rho \sim \nu U_\infty/\delta$, т. е. $u_*^2 \sim \nu U_\infty/\delta$ (см. [1, 2]), сразу получаем указанное выше соотношение для $d\delta/dx$.

Перейдем теперь к рассмотрению турбулентных пограничных слоев при наличии продольного градиента давления $dP/dx \neq 0$ (вместо которого удобнее использовать кинематический коэффициент давления $\alpha = \rho^{-1}dP/dx$). Попытка применения к таким слоям предложенного Ландау и Лифшицем [6] соотношения $d\delta/dx \sim \nu/U_\infty$, где ν – средняя вертикальная скорость при $y=\delta$, была предпринята в [11]. Однако в этой работе дополнительно предполагалось, что $\nu \sim \delta(dU/dy)|_{y=0.4}$ и, кроме того, исполь-зовались некоторые весьма специальные («полуэмпирические») формулы для $U(y/\delta)$; множитель же пропорциональности в используемом соотношении для $d\delta/dx$ считался универсальным и определялся исходя из данных, относящихся к безградиентному пограничному слою с $\alpha=0$. Здесь будет использован другой подход, не требующий привлечения дополнительных специальных гипотез и физически необоснованных предположений, а опирающийся лишь на соображения размерности и подобия и на имеющиеся экспериментальные данные.

Начнем с более простого случая больших по абсолютной величине значений гра-диента давления $|\alpha|$ (укажем заранее, что реламинизированные, отрывные и очень близкие к отрыву течения рассматриваться не будут). При этом прежде всего надо определить, какие значения $|\alpha|$ должны считаться большими. Из размерных па-раметров u_* , α и δ , определяющих режим течения вне тонкого пристенного слоя непо-средственного влияния молекулярной вязкости (в случае гладкой стени) или ха-рактеристик шероховатости (в случае шероховатой стени), можно составить два независимых масштаба длины ($\delta_P = u_*^2/|\alpha|$ и δ) (ср. [8]). Естественно поэтому «боль-шими» считать такие значения $|\alpha|$, при которых $u_*^2/|\alpha| \ll \delta$.

Заметим, что в области $y \gg \delta_P$ непосредственное влияние масштаба δ_P уже не должно сказываться; иначе говоря, параметр u_* здесь оказывается преенебрежимо малым по сравнению с $(|\alpha|y)^{1/2}$, так что его ролью здесь можно в первом приближе-нии вообще пренебречь. Таким образом, при больших (в указанном смысле) значе-ниях $|\alpha|$ в пределах основной части внешней области течения (при $y \gg u_*^2/|\alpha|$) па-раметр u_* не будет играть заметной роли, т. е. структура пульсационного течения здесь будет определяться одними лишь значениями α и δ . Отсюда сразу вытекает, что средняя вертикальная скорость при $y=\delta$ в таких течениях должна быть пропор-циональна $(|\alpha|\delta)^{1/2}$.

Отметим еще, что элементарные физические соображения показывают, что за- медляющиеся турбулентные слои с $\alpha > 0$ будут становиться все более толстыми с ростом x , в то время как сильно ускоряющиеся слои (при больших по абсолютной величине отрицательных значениях α) будут уменьшаться по толщине. Поэтому полным аналогом уравнения (1), предложенного в [6] для безградиентных турбу-лентных пограничных слоев, в случае слоев с большим значением $|\alpha|$ будет урав-нение

$$(4) \quad \frac{d\delta}{dx} = b \frac{(|\alpha|\delta)^{1/2}}{U_\infty} \operatorname{sign} \alpha, \quad \delta(x) = \left\{ [\delta(x_0)]^{1/2} + \frac{b}{2} \int_{x_0}^x \frac{|\alpha|^{1/2}}{U_\infty} \operatorname{sign} \alpha dx \right\}^2$$

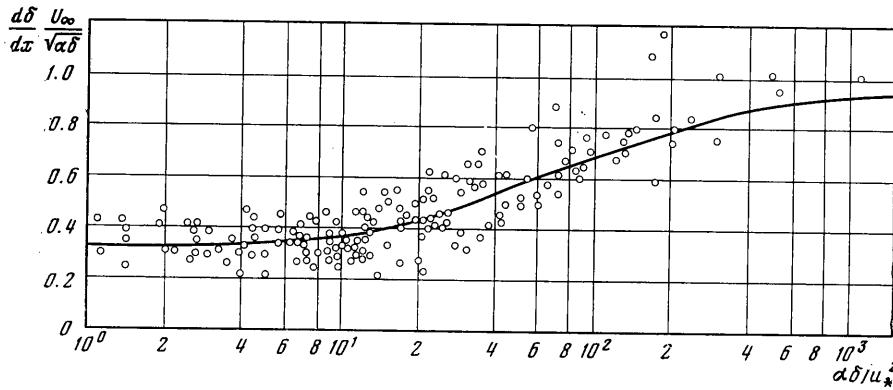
Здесь b – положительный числовой коэффициент порядка единицы (который, вообще говоря, может принимать разные значения для тормозящихся и ускоряющих-ся течений).

Отметим, что для случая больших положительных градиентов давления аналогичная (4) формула

$$(5) \quad d\Delta/dx = c\alpha\Delta/U_\infty^2$$

предлагалась Г. М. Бам-Зеликовичем [12], который считал, что под Δ здесь можно понимать любой из трех характерных размеров (δ , δ^* и δ^{**}) пограничного слоя, но сравнивал формулу (5) с экспериментальными данными лишь в предположении, что Δ это δ^{**} или δ^* .

Анализ многочисленных экспериментальных данных, собранных во втором томе книги [7], показывает, что при $\alpha > 0$ (т. е. при $c\delta/u_*^2 > 1$, фактически уже при $c\delta/u_*^2 \geq 50$) отношение $U_\infty^2/(c\delta)$ практически не меняется с изменением $c\delta/u_*^2$ (оно все время остается близким к 40). Поэтому при $\Delta = \delta$ и $c\delta/u_*^2 > 1$ результаты расчетов по формуле Г. М. Бам-Зеликова (5) не будут заметно отличаться от результатов



Фиг. 2

расчета по рекомендуемой формуле (4). Заметим еще, что при больших (в указанном смысле) значениях α отношения δ^*/δ и δ^{**}/δ , которые являются функциями от $c\delta/U_\infty^2$, с хорошей точностью могут считаться постоянными, а так как в силу уравнения (4) и условия $U_\infty^2/(c\delta) \approx \text{const}$ толщина δ здесь возрастает примерно линейно по x , то рост δ^* и δ^{**} здесь также будет примерно линейным.

В случае же, когда α принимает не очень большое значение (т. е. безразмерное отношение $c\delta/u_*^2$ недостаточно велико), величина u_* должна быть добавлена к числу размерных параметров, влияющих на характеристики пульсационного движения при $y \sim b$. Поэтому в силу соображений размерности средняя скорость возрастания толщины пограничного слоя (которая, очевидно, определяется турбулентным режимом пограничного слоя вблизи $y=b$) здесь описывается формулой вида $(|\alpha|\delta)^{1/2} \cdot (c\delta/u_*^2)$, где $b(s)$ — некоторая функция одного переменного $s=c\delta/u_*^2$. Так как $d\delta/dx$ равно отношению этой средней скорости возрастания δ к средней горизонтальной скорости $u=U_\infty$, то отсюда следует уравнение

$$(6) \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{(|\alpha|\delta)^{1/2}}{U_\infty} b \left(\frac{c\delta}{u_*^2} \right)$$

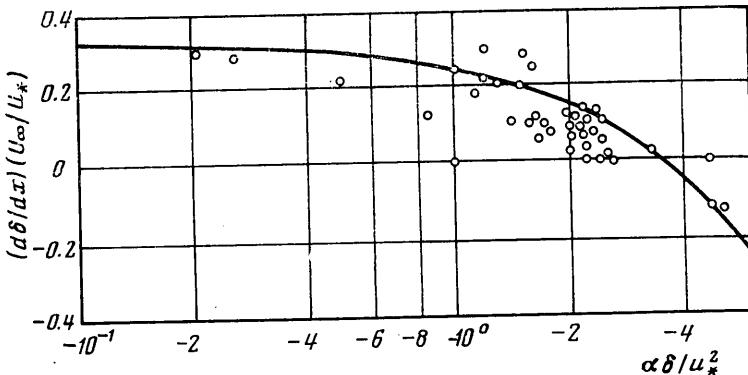
Функция $b(s)$ в силу (4) должна стремиться к некоторой положительной постоянной $b=b(\infty)$ при $s \rightarrow \infty$ и к какой-то отрицательной постоянной $b(-\infty)$ при $s \rightarrow -\infty$; с другой стороны, $b(s) \approx a|s|^{-1/2}$, $a \approx 1/3$ при $|s| \ll 1$ в силу формулы (1). В остальном поведение функции $b(s)$ может быть произвольным.

Отметим здесь, что если пренебречь деформацией профиля скоростей, то уравнение для расчета $d\delta/dx$ можно было бы получить, определив количество жидкости, втекающей в пограничный слой из области потенциального течения. Например, следуя идее, положенной в основу одного из наиболее простых и в то же время точных методов приближенного расчета турбулентного пограничного слоя — метода Хида (см. его статью в первом томе книги [7]), можно составить баланс массы в плоском пограничном слое длиной dx и, применяв к нему соображения, близкие к тем, которые приводят к уравнению (4), получить для случая большого $|\alpha|$ уравнение

$$(7) \quad d(U_\infty\delta)/dx = b_1(|\alpha|\delta)^{1/2} \operatorname{sign} \alpha$$

Однако анализ экспериментальных данных [7] показывает, что решение этого уравнения, имеющее более сложный, чем (4), вид, не приводит к лучшему согласию с опытными результатами.

Для определения вида функции $b(\alpha\delta/u_*^2)$ в законе (6) для случая течений с положительным градиентом давления были проанализированы собранные в [7] данные многочисленных экспериментальных работ о пристеночных течениях с $\alpha>0$. Несмотря на значительный разброс точек на фиг. 2, особенно заметный при больших значениях $\alpha\delta/u_*^2$ (для уменьшения этого разброса в некоторых случаях проводилось усреднение значений производной по соседним измерениям), из этой фигуры, представляющей собой зависимость $b=U_\infty(\alpha\delta)^{-1/4}d\delta/dx=\langle U_\infty(\alpha\delta)^{-1/4}\rangle[\delta(x_{i+1})-\delta(x_i)]/$



Фиг. 3

$/(x_{i+1}-x_i)$ от $s=\langle\alpha\delta/u_*^2\rangle$, видно, что значения $b(s)$ довольно тесно группируются около единой гладкой кривой.

С ростом s значение b , по-видимому, действительно стремится к постоянной (близкой к единице), которой оно, однако, достигает лишь при $\alpha\delta/u_*^2 \approx 10^3$. Следует, однако, иметь в виду, что при больших значениях $\alpha\delta/u_*^2$ течение всегда оказывается уже близким к отрыву, так что все измерения здесь (особенно это относится к u_*) не очень надежны.

В целом же в настоящее время для расчета $\delta(x)$ при всех положительных значениях $\alpha\delta/u_*^2$ можно предложить интерполяционную формулу

$$(8) \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{1+5(u_*^2/\alpha\delta)^{1/4}}{1+15(u_*^2/\alpha\delta)^{1/4}} \frac{(\alpha\delta)^{1/2}}{U_\infty}$$

которая при $\alpha\rightarrow 0$ переходит в закон (1), справедливый для безградиентного течения, при $\alpha\rightarrow\infty$ соглашается с асимптотическим законом (4) и удовлетворительно описывает имеющиеся эмпирические данные об изменении величины коэффициента b в области промежуточных значений параметра $\alpha\delta/u_*^2$ (см. фиг. 2).

Сложнее обстоит дело со случаем ускоряющихся течений. Сильные отрицательные градиенты давления, как давно известно, ламинаризируют течение в пограничном слое [13, 14] и увеличивают значение u_* . Поэтому в литературе (см., например, сводку наиболее надежных экспериментальных результатов, приведенную в [7]) практически отсутствуют данные, относящиеся к развитому турбулентному пограничному слою и характеризующиеся значениями $\alpha\delta/u_*^2 \leq -10$, что сильно затрудняет определение поведения функции $b(s)$ при больших отрицательных значениях аргумента. Оказалось, однако, что все собранные в [7] экспериментальные данные об изменениях толщины пограничного слоя при $\alpha<0$, которые графически представлены в немного модифицированной по сравнению с фиг. 2 форме на фиг. 3, хорошо описываются лишь немногим измененным по сравнению с (8) уравнением

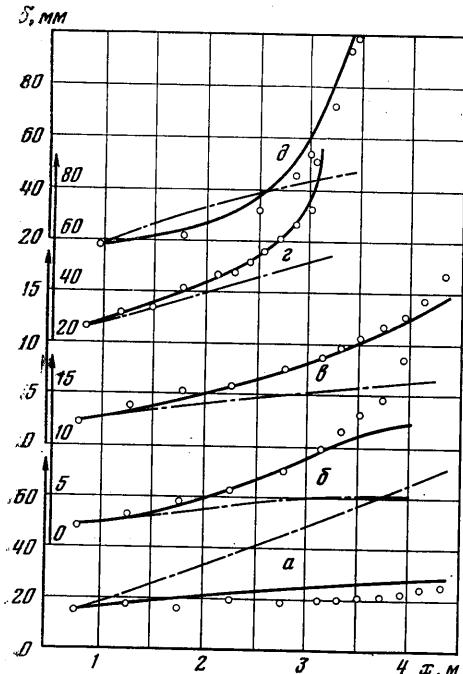
$$(9) \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{(|\alpha|\delta/u_*^2)^{1/4} \operatorname{sign} \alpha + 5 u_*}{(|\alpha|\delta/u_*^2)^{1/4} + 15} \frac{U_\infty}{U_\infty}$$

обращающимся при $\alpha>0$ в уравнение (8) и поэтому оказывающимся применимым и при $\alpha<0$, и при $\alpha>0$. Интересно отметить, что и это уравнение, и имеющиеся экспериментальные данные указывают, что при $\alpha\delta/u_*^2 \approx -3.6$ имеет место «квазикуэттовский» градиентный пограничный слой постоянной толщины δ .

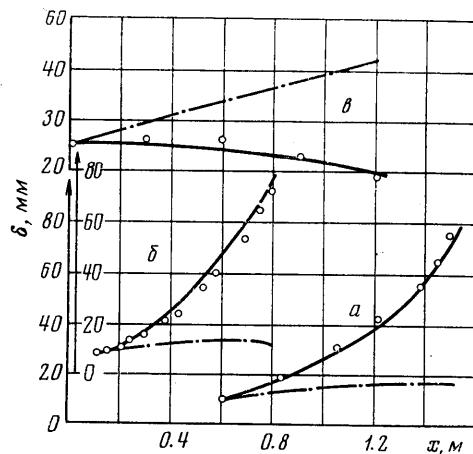
В рамках сделанных выше предположений формула (9) позволяет рассчитать изменение толщины пограничного слоя несжимаемой жидкости при произвольном

законе изменения скорости на его внешней границе. Для проверки этой зависимости были использованы данные многочисленных экспериментов, собранных в [7], и результаты двух весьма тщательных работ [15, 16], проведенных в самое последнее время. Расчеты, основанные на экспериментальных значениях $U_\infty(x)$, $\delta(x_0)$ и $u_*(x)$, показали, что предложенная зависимость с хорошей точностью (в подавляющем большинстве экспериментов отклонения не превышали 10%) соответствует всем опытным данным об изменениях толщины $\delta(x)$.

Некоторые результаты этих расчетов представлены на фиг. 4, 5, на которых вместе с экспериментальными значениями толщины пограничного слоя и расчетной кривой (сплошная линия) представлена также расчетная кривая $\delta_{fr}(x)$, вы-



Фиг. 4



Фиг. 5

численная по формуле (1) с использованием опытных значений $u_*(x)$ (штрихпунктирная линия). Эта достаточно представительная выборка экспериментальных данных включает в себя, в частности, классические эксперименты Людвига, Тилмана (1100, 1200, 1300), проведенные для ускоряющего (фиг. 4, а) течения, а также при сильных (фиг. 4, б) и умеренных (фиг. 4, е) значениях положительного градиента давления, в которых был, по-видимому, впервые отмечен факт справедливости логарифмического закона распределения средней скорости в градиентных течениях. В случае сильных градиентов давления, соответствующих случаю б на фиг. 4, экспериментальные значения $\delta(x)$, расположенные за сечением с продольной координатой $x=3.5$ м и, по-видимому, отвечающие уже отрывному течению, значительно отличаются от расчетной кривой.

На фиг. 4 приведены также опытные данные двух недавних работ [15, 16], не вошедших в книгу [7]. Из приведенных графиков можно заключить, что формула (9) хорошо описывает как экспериментальные результаты [15], относящиеся к случаю замедляющегося течения на пластине в условиях непрерывно увеличивающегося градиента давления (фиг. 4, е), так и данные [16], полученные в условиях знакопеременного по длине градиента давления (фиг. 4, б).

На фиг. 5, а сравниваются с расчетом экспериментальные данные Ньюмена (3500), измерившего функцию $\delta(x)$ для технически важного крылового профиля. На этой же фигуре приведены результаты опытов Фрейзера (5100) (фиг. 5, б) и Хердинга и Норбери (2800) (фиг. 5, е), в которых были достигнуты наибольшее и наименьшее из имеющихся в [7] экспериментальных значений $\alpha\delta/u_*^2$ (а именно 1440 и соответственно -5.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
4. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
5. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.
6. Ландау Л. Д., Лишиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
7. Computation of turbulent boundary layers. Proc. 1968 AFOSR-IFP Stanford Conf., vol. 1, 2. Stanford Univ. Press, 1969.
8. Кадер Б. А., Яглом А. М. Применение соображений подобия к расчету замедляющихся турбулентных пограничных слоев. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1.
9. Karman Th. von. Mechanische ahnlichkeit und turbulenz. Collected works of Th. von Karman, vol. 2. London. Butterworths Sci. Publ., 1956.
10. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
11. Hudimoto B. A method for the calculation of the turbulent boundary layer with pressure gradient. Mem. Fac. Engng Kyoto Univ., 1965, vol. 27, No. 4.
12. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
13. Sternberg J. The transition from a turbulent to a laminar boundary layer. 1954, U. S. Army Bal. Res. Lab. Aberdeen, Rep. 906.
14. Сергиенко А. А., Грецов В. К. Переход турбулентного пограничного слоя в ламинарный. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.
15. Samuel A. E., Joubert P. N. A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient. J. Fluid Mech., 1974, vol. 66, No. 3.
16. Simpson R. L., Strickland J. H., Barr P. W. Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation. J. Fluid Mech., 1977, vol. 79, No. 3.

УДК 532.517.4

КРИТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

К. Е. ДЖАУГАШТИН

(Ленинград)

На основе уравнений для одноточечных моментов второго порядка полей скорости и температуры, замкнутых с помощью полуэмпирических гипотез, исследован критический режим течения в стратифицированной среде.

Уравнения одноточечных моментов второго порядка полей скорости и температуры, приведенные в [1], позволяют исследовать влияние архимедовых сил на критический режим течения. Используем их для определения локального критического числа Рейнольдса при течении несжимаемой жидкости в горизонтальном направлении в среде с вертикальной стратификацией. Уравнения (2.1) в работе [1] с учетом замыкающих их соотношений при пренебрежении в них конвективными и диффузионными членами примут вид

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i u_j \rangle + \langle u_h u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_h} + \langle u_h u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_h} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + \\
 & + c_1 v \frac{\langle u_i u_j \rangle}{l^2} + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{F^{1/2}}{l} - \beta g (\delta_{2i} \langle t u_j \rangle + \delta_{2j} \langle t u_i \rangle) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i t \rangle + \langle u_h t \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_h} + \langle u_h u_i \rangle \frac{\partial T}{\partial x_h} + k_t \frac{\sqrt{E}}{l} \langle u_i t \rangle + \\
 & + c_{ut} v \frac{\langle u_i t \rangle}{l^2} - \delta_{2i} \beta g \langle t^2 \rangle = 0
 \end{aligned}$$