МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1979

УДК 532.5

УДАР ПРОНИЦАЕМОГО КОНТУРА, ОБТЕКАЕМОГО С ОТРЫВОМ СТРУЙ

М. Т. БЕКУЛОВ

(Нальчик)

В работах по теории удара о несжимаемую жидкость рассматривается удар сплошных тел о невозмущенную или возмущенную жидкость. Так, в [1] изучен удар сплошного контура при обтекании с отрывом струй. В данной работе рассматривается удар проницаемого контура, обтекаемого с отрывом струй. Конкретный расчет проведен для проницаемой пластинки. Для этого случая вычислен импульс сил, действовавших на пластинку при ударе, и рассчитана присоединенная масса.

1. Пусть точки проницаемого контура, обтекаемого установившимся потоком несжимаемой жидкости с отрывом струй по схеме Кирхгофа, внезапно приобрели нормальную скорость V_n. Примем, что положительная нормаль к контуру направлена внутрь жидкости, V_n – произвольная известная функция длины дуги обтекаемого контура. Кроме того, будем считать известными v_∞ – скорость набегающего потока, L – длину контура, ρ – плотность жидкости и закон проницания жидкости через контур.

Из общей теории удара в несжимаемой жидкости известно [2], что при ударе возникает дополнительное течение, обладающее потенциалом скоростей φ, связанным с импульсивным давлением p_i соотношением

$$p_i = -\rho\varphi \tag{1.1}$$

На свободной поверхности, где $p_i=0$, и на контуре, через который жидкость может проникать, имеем

$$\varphi = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n - v_n \tag{1.3}$$

Здесь v_n – нормальная скорость дополнительного, вызванного ударом потока жидкости, проникающей через контур, задается законом проникания жидкости через контур при ударе.

Решение задачи сводится к нахождению гармонической во всей области течения функции φ, удовлетворяющей граничным условиям (1.2) и (1.3).

2. Будем предполагать, что установившееся обтекание проницаемого контура известно. Положим, что последняя задача решена в верхней полуплоскости переменного параметра u, т. е. известна функция $z=x+iy=z(u)$, осуществляющая конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость u. В плоскости z ось x направлена вдоль скорости набегающего потока, а начало координат совпадает с критической точкой контура. В плоскости u обтекаемому контуру соответствует отрезок $[a, b]$, а свободным поверхностям – лучи $(-\infty, -a]$ и $[b, \infty)$ действительной оси.

Поскольку перемещением частиц за время удара пренебрегается, то функция $z(u)$ будет одинаковой для установившегося течения и для течения, возникшего в результате удара. Поэтому задача о нахождении комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$ возмущенного движения может решаться в плоскости u. Граничные условия (1.2) и (1.3) можно переписать в плоскости u в виде

$$\operatorname{Re}\frac{dw}{du} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{du} = -(V_n - v_n)\left|\frac{dz}{du}\right| \tag{2.2}$$

Введем аналитическую всюду в верхней полуплоскости u функцию

$$f(u)=\frac{dw}{du}\sqrt{(u+a)(u-b)} \tag{2.3}$$

Действительную часть этой функции в плоскости u с помощью (2.1) и (2.2) на участках $(-\infty, -a]$, $[b, \infty)$ и на отрезке $[-a, b]$ можно представить соответственно в виде

$$\operatorname{Re} f(u)=0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Re} f(u)=(V_n-v_n)\left|\frac{dz}{du}\right|\sqrt{(a+u)(b-u)} \tag{2.5}$$

Пользуясь формулой Шварца для верхней полуплоскости и условиями (2.4) и (2.5), найдем функцию $f(u)$. Подставляя найденное значение $f(u)$ в (2.3), получим

$$\frac{dw}{du}\sqrt{(u+a)(u-b)}=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{b}[V_n(\xi)-v_n(\xi)]\left|\frac{dz}{d\xi}\right|\frac{\sqrt{(\xi+a)(b-\xi)}}{\xi-u}d\xi \tag{2.6}$$

Формула (2.6) дает общее решение поставленной задачи. При $v_n(\xi)\equiv 0$ решение (2.6) переходит в решение задачи об ударе непроницаемого контура [1].

3. В качестве примера рассмотрим прямой удар слабопроницаемой плоской недеформируемой пластинки длиной $2h$, обтекаемой симметричным потоком.

Воспользовавшись решением задачи об установившемся обтекании симметричным потоком слабопроницаемой пластинки, значение dz/du представим в виде [3]

$$\frac{dz}{du}=i\frac{2N}{v_\infty}(1+\sqrt{1-u^2})\left[1-k\rho v_\infty\left(1+\frac{\sqrt{1-u^2}}{\pi u}\ln\frac{1-u}{1+u}\right)\right] \tag{3.1}$$

$$N=\frac{8hv_\infty}{(\pi+4)^2}\int_0^1(1+\sqrt{1-\xi^2})\left[1+k\rho v_\infty\left(1+\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi}\ln\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right]d\xi \tag{3.2}$$

Здесь k – малый параметр – считается известным.

Закон проницания жидкости через пластинку при ударе можно задавать в виде

$$v_n=k_ip_i \tag{3.3}$$

Коэффициент пропорциональности k_i зависит только от пропускной способности пластинки и его можно считать известным. Положим k_i настолько малым, что величиной v_n^2 можно пренебречь при достаточно больших значениях p_i. Проведем линеаризацию по параметрам k и k_i. Из (1.1), (1.3), (3.3) следует, что потенциал скорости φ – функция параметра k_i. Тогда из (1.1) следует, что величина p_i – также функция k_i. Видно, что первый член разложения функции $p_i(k_i)$ по степеням k_i представляет собой импульсное давление p_i° при ударе непроницаемой пластинки. Очевидно, что для вычисления v_n с указанной выше точностью достаточно в (3.3) вместо p_i подставить p_i°

$$v_n=k_ip_i^\circ \tag{3.4}$$

Для p_i° можно записать

$$p_i^\circ=-\rho\varphi^\circ \tag{3.5}$$

где φ° – потенциал скоростей при ударе непроницаемой пластинки.

Из решения задачи об ударе непроницаемой пластинки [1]

$$\frac{dw}{du}=\frac{4hV_n}{i\pi(\pi+4)}\left[\sqrt{u^2-1}\ln\frac{u+1}{u-1}-(2+\pi)\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}+\pi\right]$$

после интегрирования и разделения действительных и мнимых частей при $-1\leqslant u\leqslant 1$ получим

$$\varphi^\circ=\operatorname{Re} w^\circ=-\frac{4hV_n}{\pi(\pi+4)}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1-u^2)^3}+(2+\pi)\sqrt{1-u^2}\right] \tag{3.6}$$

Здесь при вычислении интеграла проведена замена $\ln(u+1)/(u-1)$ на $2u$. Из (3.4) – (3.6) имеем

$$v_n = k_i \rho \frac{4hV_n}{\pi(\pi+4)} \left[\frac{2}{3} \sqrt{(1-u^2)^3} + (2+\pi)\sqrt{1-u^2} \right] \tag{3.7}$$

Для определенности допустим, что $V_n = V = \text{const} > 0$. Это соответствует прямому удару пластинки в направлении отрицательной оси x. Благодаря симметрии течения можно положить $a=b=1$. Заменяя u на ξ, подставим (3.1) и (3.7) в (2.6). После приближенного вычисления интеграла получим

$$\frac{dw}{du} = \frac{4hV}{i\pi(\pi+4)} \left(1 - k_i \rho h \frac{4}{3\pi} \frac{8+3\pi}{\pi+4} \right) \times \tag{3.8}$$

$$\times \left[\sqrt{u^2-1} \ln \frac{u+1}{u-1} - (2+\pi) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} + \pi \right]$$

Формула (3.8) совместно с (3.1) дает решение поставленной задачи. Видно, что если $k=k_i=0$, то (3.8) и (3.1) дают решение задачи об ударе непроницаемой пластинки. Если $k=0$, а $k_i \neq 0$, то решение соответствует удару пластинки, которая становится проницаемой только во время удара.

4. Вычислим импульс сил J_x, действовавших на пластинку при ударе, в случае, когда $k=0$, а $k_i \neq 0$.

Учитывая, что при $u=\pm 1$ имеем $\varphi=0$, получим

$$J_x = \int_{-h}^{h} p_i \, dy = -\rho \int_{-h}^{h} \varphi \, dy = \rho \int_{-1}^{1} y \frac{d\varphi}{du} du = \tag{4.1}$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \operatorname{Im} z(u) \operatorname{Re} \frac{dw}{du} du$$

Из (3.1) и (3.2) имеем

$$z(u) = i \frac{2h}{\pi+4} (2u + u\sqrt{1-u^2} + \arcsin u) \tag{4.2}$$

Подставляя значения $\operatorname{Re} dw/du$ и $\operatorname{Im} z(u)$ из (3.8) и (4.2) в (4.1), получим после интегрирования

$$J_x = \rho (2h)^2 0.4224 (1 - k_i \rho h \cdot 1.036) V \tag{4.3}$$

Из (4.3) видно, что присоединенная масса m_1 при ударе проницаемой пластинки, обтекаемой по схеме Кирхгофа, равна

$$m_1 = \rho (2h)^2 0.4224 (1 - k_i \rho h \cdot 1.036) \tag{4.4}$$

Присоединенная масса m при ударе непроницаемой пластинки, обтекаемой по схеме Кирхгофа, равна [1]

$$m = \rho (2h)^2 \cdot 0.4224 \tag{4.5}$$

Для отношения m_1/m из (4.4) и (4.5) имеем

$$\frac{m_1}{m} = 1 - k_i \rho h \cdot 1.036 \tag{4.6}$$

Поступила 7 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
3. *Бекулов М. Т.* Линеаризованная задача об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй. Сборник научных работ аспирантов. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1965, вып. 1.