

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

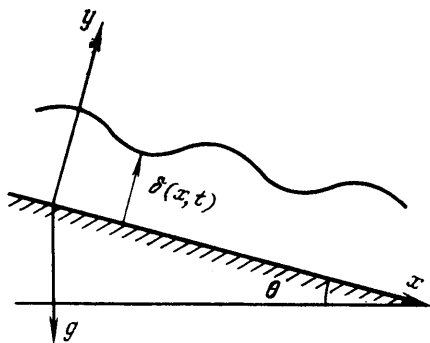
В. А. ЕЛЮХИН, Л. А. КАЛИМУЛИНА

(Челябинск)

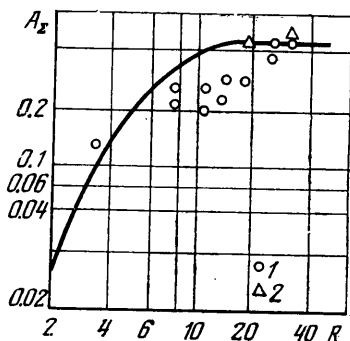
Изучение волновых течений тонких слоев жидкости со свободной поверхностью, обычно ограничивается исследованием периодического течения [1, 2] и нелинейной устойчивости [3-6] однородной жидкой пленки к возмущениям типа монохроматической волны. При наличии в пленке жидкости градиентов температуры или концентрации растворенных веществ на ее поверхности возникают силы поверхностной вязкости и термокапиллярные силы, изменяющие положение границ устойчивости и параметры нелинейного волнового движения.

В данной работе исследовано нелинейное развитие возмущений, принадлежащих непрерывной конечной полосе волновых чисел, на поверхности тонкого плоского слоя жидкости, движущегося по наклонной поверхности под действием сил тяжести, касательного напряжения на поверхности раздела, поверхностной вязкости и термокапиллярных сил. В рамках нелинейного параболического уравнения неконсервативных систем проанализировано нелинейное взаимодействие мод возбужденного волнового пакета и найдена граница возникновения модуляционной неустойчивости монохроматической волны.

1. По плоскости, наклоненной под углом  $\theta$  к горизонтальной поверхности, под действием сил тяжести и касательного напряжения  $\tau$  на поверхности раздела движется слой вязкости жидкости толщиной  $\delta$  (фиг. 1). Решая задачу о нелинейном развитии возмущений на поверхности жидкой



Фиг. 1



Фиг. 2

пленки методом узких полос [3, 7], проведем растяжение осей  $x$  и  $t$ , записав уравнения и краевые условия с необходимой степенью точности в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial u_+}{\partial t_+} + \epsilon_1 u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \epsilon_1 v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} = \\ = -\epsilon_1 \frac{\partial p_+}{\partial x_+} + F_x + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} + \epsilon_1^2 \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} \right) \end{aligned}$$

$$(1.1) \quad \varepsilon_1^2 \frac{\partial v_+}{\partial t_+} + \varepsilon_1^2 u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \varepsilon_1^2 v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} =$$

$$= -\frac{\partial p_+}{\partial y_+} + F_v + \frac{1}{R} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} + \varepsilon_1^3 \frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} \right)$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} = 0$$

$$(1.2) \quad y=0: u_+ = v_+ = 0$$

$$(1.3) \quad y=\delta: \frac{1}{R} \frac{\partial u_+}{\partial y_+} = -\varepsilon_1^2 \frac{1}{R} \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \varepsilon_1 N \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} +$$

$$+ 4\varepsilon_1^2 \frac{\partial u_+}{\partial x_+} \frac{\partial \delta}{\partial x_+} + \varepsilon_1 M \frac{\partial \delta}{\partial x_+} + \tau_+$$

$$(1.4) \quad p_+ = \frac{2}{R} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \varepsilon_1 \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta}{\partial x_+} \right) - \sigma_+ \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_+^2}, \quad v = \frac{\partial \delta}{\partial t} + u \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

$$u_+ = \frac{u}{u_0}, \quad v_+ = \frac{v}{u_0}, \quad x_+ = \frac{x}{h_0}, \quad y_+ = \frac{y}{h_0}, \quad t_+ = \frac{tu_0}{h_0}, \quad R = \frac{u_0 R_0 \rho}{\mu},$$

$$M = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_{y=\delta} \frac{1}{\rho u_0^2}, \quad N = \frac{k+\varepsilon}{\rho u_0 h_0^2}, \quad \sigma_+ = \frac{\sigma}{\rho u_0^2 h_0}, \quad p_+ = \frac{p}{\rho u_0^2},$$

$$\tau_+ = \frac{\tau}{\rho u_0^2}, \quad F_x = \frac{h_0 g \sin \theta}{u_0^2}, \quad F_y = -\frac{h_0 g \cos \theta}{u_0^2}$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $k, \varepsilon$  — коэффициенты поверхностной вязкости. Индекс +, отмечающий безразмерные величины, в дальнейшем опущен. Динамические граничные условия на поверхности жидкой пленки (1.3), (1.4), учитывающие влияние процессов теплопереноса, получены из уравнений количества движения «ньютоновского» поверхностного слоя жидкости [8].

Разложив неизвестные функции  $u, v, p$  в ряд по малому параметру  $\varepsilon_1$ , решим систему (1.1) с краевыми условиями методом возмущений, выразив  $u, v, p$  через толщину пленки. Записывая безразмерную толщину пленки  $\delta$  в виде  $\delta = 1 + \psi$ , где  $\psi$  — отклонение толщины пленки от стационарного состояния, и подставляя  $u$  и  $v$ , найденные по трем первым приближениям, в кинематическое граничное условие (1.4) придем к уравнению

$$(1.5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_5 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_6 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} +$$

$$+ a_7 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + a_8 \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_9 \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{10} \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ a_{11} \psi \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_{12} \psi^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_{14} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

$$a_1 = -1/3 R \sigma^{-19} /_{80} R^4 F_x^2 N^{-19} /_{80} R^4 F_x N \tau^{-1} /_2 R^2 M N^{-1} /_4 R^2 F_y N$$

$$a_2 = -R F_x^{-2} /_3 R \tau^{-1} /_2 R^2 F_x N^{-1} /_{28} R^3 F_x^3 -^{149} /_{2016} R^5 F_x^2 \tau -$$

$$-^2 /_{15} R^3 M \tau^{-5} /_{56} R^3 F_x F_y^{-11} /_{288} R^5 F_x \tau^2 -^7 /_{72} R^3 F_y \tau^{-2} /_{15} R^3 F_x M$$

$$a_3 = -^2 /_{15} R^3 F_x^2 -^2 /_{15} R^3 F_x \tau^{-1} /_3 R F_y^{-1} /_2 R M, \quad a_4 = -R F_x - R \tau$$

$$\begin{aligned}
 a_5 &= -2RF_x - R\tau, \quad a_6 = -RF_y - RM^{-2}/_3R^3F_x\tau^{-4}/_3R^3F_x^2, \\
 a_7 &= a_6, \quad a_8 = -RF_x, \quad a_9 = -RF_y - RM^{-4}/_3R^3F_x\tau - 2R^3F_x^2, \\
 a_{10} &= 2a_9, \quad a_{11} = -R\sigma^{-57}/_{40}R^4F_xN\tau^{-133}/_{80}R^4F_x^2N - \\
 &\quad -R^2F_yN^{-3}/_2R^2MN, \quad a_{12} = -R\sigma^{-57}/_{16}R^4F_x^2N - \\
 &\quad -^{399}/_{80}R^4F_x^2N^{-3}/_2R^2F_yN^{-3}/_2R^2MN \\
 a_{13} &= -R\sigma^{-13}/_5R^4F_xN\tau^{-247}/_{60}R^4F_x^2N - 2R^2F_yN^{-1}/_2R^2MN \\
 a_{14} &= -2R\sigma - 13R^4F_xN\tau^{-247}/_{10}R^4F_x^2N - 6R^2F_yN - R^2MN
 \end{aligned}$$

Уравнение (1.5) отличается от аналогичных уравнений, полученных в [3, 4, 6], наличием членов, отражающих влияние процессов тепломассопереноса, наклона твердой поверхности, касательного напряжения на поверхности раздела.

2. Анализ нелинейной устойчивости тонкого слоя жидкости обычно ограничивается исследованием устойчивости системы к возмущениям типа монохроматической волны [3-6]. В закритической области, однако, становятся неустойчивыми моды, принадлежащие некоторой непрерывной полосе спектра волновых чисел, в результате чего одномерное возмущение может быть представлено в виде

$$(2.1) \quad \psi = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} F(k) \exp i(kx - \omega t) dk$$

где  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ,  $2\Delta k$  — ширина полосы волновых чисел,  $F(k)$  — фурье-компонента разложения,  $k_0$  — центр волнового пакета. Предполагая неустойчивость слабой ( $\omega_i = \varepsilon^2 \omega_i^0 = 0(\varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ) и ширину полосы волновых чисел малой ( $\Delta k = 0(\varepsilon)$ ), запишем (2.1) с точностью до членов третьего порядка малости по  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad \psi &= A \exp i(k_0 x - \omega(k_0) t) \\
 A &= \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} F(k_0 + \delta k) \exp \left\{ i \left[ \delta k x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \delta k t - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0} (\delta k)^2 t - \varepsilon^2 \omega_i^0 t \right] \right\} d\delta k
 \end{aligned}$$

Из (2.2) видно, что комплексная амплитуда  $A$  является функцией «медленных» переменных  $x_1 = \varepsilon x$ ,  $t_1 = \varepsilon t$ ,  $t_2 = \varepsilon^2 t$ . Представление волнового пакета в виде квазигармонической волны с медленно меняющимися амплитудой и фазой позволяет методом возмущений найти нелинейное параболическое уравнение огибающей волны, которое дает возможность исследовать нелинейное взаимодействие мод волнового пакета в процессе роста возмущений. Исследуя методом многомасштабных разложений поведение системы (1.5) в закритической области вблизи границы устойчивости ( $\omega_i = a_1 k^4 - a_3 k^2 = 0(\varepsilon^2)$ ) при действии возмущений из непрерывной полосы волновых чисел шириной  $\varepsilon_2$ , введем разложения

$$(2.3) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_2^n \psi_n, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Подставляя (2.3) в (1.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon_2$ , в результате решения уравнений трех первых приближений по-

лучим

$$\psi = A(x_1, t_1, t_2) \exp [i(kx_0 - \omega_r t_0)] + \bar{A}(x_1, t_1, t_2) \exp [-i(kx_0 - \omega_r t_0)] + B_1 A^2 \exp [2i(kx_0 - \omega_r t_0)] + \bar{B}_1 \bar{A}^2 \exp [-2i(kx_0 - \omega_r t_0)] + D_1 A^3 \exp [3i(kx_0 - \omega_r t_0)] + \bar{D}_1 \bar{A}^3 \exp [-3i(kx_0 - \omega_r t_0)]$$

$$B_1 = B_{1r} + iB_{1i} = \{ [(-a_6 k^2 - a_7 k^2 + a_{11} k^4 + a_{13} k^4) (-16a_1 k^4 + 4a_3 k^2) + a_5 k (8a_2 k^3 - 2a_4 k - 2\omega_r)] [(-16a_1 k^4 + 4a_3 k^2)^2 + (8a_2 k^3 - 2a_4 k - 2\omega_r)^2]^{-1} \} + i \{ [a_5 k (-16a_1 k^4 + 4a_3 k^2) + (-a_6 k^2 - a_7 k^2 + a_{11} k^4 + a_{13} k^4) (-8a_2 k^3 + 2a_4 k + 2\omega_r)] [(-16a_1 k^4 + 4a_3 k^2)^2 + (8a_2 k^3 - 2a_4 k - 2\omega_r)^2]^{-1} \}$$

$$D_1 = D_{1r} + iD_{1i} = \{ [B_{1r} (-a_6 - 4a_6 k^2 - 4a_7 k + 16a_{11} k^4 + a_{11} + 8a_{13} k^3 + 2a_{13} k) - B_{1i} (2a_5 k + a_5) + (-a_9 - a_{10} + a_{12} + a_{14})] \times \\ \times (9a_3 k^2 - 81a_1 k^4) + [B_{1i} (-a_6 - 4a_6 k^2 - 4a_7 k + 16a_{11} k^4 + a_{11} + 8a_{13} k^3 + 2a_{13} k) + B_{1r} (2a_5 k + a_5) + a_5] (-3a_4 k + 27a_2 k^3 - 3\omega_r) \} [ (9a_3 k^2 - 81a_1 k^4)^2 + (-3a_4 k + 27a_2 k^3 - 3\omega_r)^2 ]^{-1} + \\ + i \{ [B_{1i} (2a_5 k + a_5) + a_5] (9a_3 k^2 - 81a_1 k^4) - [B_{1r} (-a_6 - 4a_6 k^2 - 4a_7 k + 16a_{11} k^4 + a_{11} + 8a_{13} k^3 + 2a_{13} k) - B_{1i} (2a_5 k + a_5) + (-a_9 - a_{10} + a_{12} + a_{14})] (-3a_4 k + 27a_2 k^3 - 3\omega_r) \} [ (9a_3 k^2 - 81a_1 k^4)^2 + (-3a_4 k + 27a_2 k^3 - 3\omega_r)^2 ]^{-1}$$

$$\omega_r = a_2 k^3 - a_4 k$$

где  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{D}_1$  — комплексно-сопряженные с  $A$ ,  $B_1$ ,  $D_1$ .

Уравнение для комплексной амплитуды  $A$  огибающей волны находится в третьем приближении из условия ограниченности решения на масштабе  $x_0, t_0$

$$(2.4) \quad \frac{\partial A}{\partial t_2} - (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \gamma A - (\beta_1 + i\beta_2) A^2 \bar{A}$$

$$\alpha_1 = -6a_1 k^2 + a_3, \quad \alpha_2 = 3a_2 k, \quad \gamma = a_1 k^4 - a_3 k^2$$

$$\beta_1 = -[B_{1r} (-5a_6 k^2 + 4a_7 k^2 + 17a_{11} k^4 - 10a_{13} k^4) - a_5 k B_{1i} + (-3a_9 k^2 + a_{10} k^2 + 3a_{12} k^4 - a_{14} k^4)]$$

$$\beta_2 = -[a_5 k B_{1r} + B_{1i} (-5a_6 k^2 + 4a_7 k^2 + 17a_{11} k^4 - 10a_{13} k^4) + a_5 k]$$

Аналогичное (2.4) нелинейное параболическое уравнение получено в [9] для взрывной неустойчивости плоского течения Пуазейля. Уравнение (2.4) отличается от известного нелинейного параболического уравнения консервативных систем физики плазмы и гидродинамики [10, 11] наличием не равных нулю коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma$ , что является следствием неконсервативности исследуемой системы.

Подставляя монохроматическое возмущение  $A = a(t_2) \exp i\varphi(t_2)$  в (2.4), после разделения действительной и мнимой частей получим систему двух уравнений, решение которой имеет вид

$$(2.5) \quad a^2 = \frac{\exp 2\gamma t_2}{C_1 + (\beta_1/\gamma) \exp 2\gamma t_2}, \quad \varphi = - \int \beta_2 a^2 dt_2 + C_2$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные, зависящие от начального возмущения. Фазовая скорость и амплитуда периодического течения равны

$$(2.6) \quad C = \frac{\omega_r}{k} + \frac{\beta_2 a^2}{k}, \quad a^2 = \frac{\gamma}{\beta_1}$$

Полная амплитуда периодического недиспергирующего ( $a_2=0$ ) течения  $A_z = [(1+\psi_{\max}) - (1-\psi_{\min})][(1+\psi_{\max}) + (1-\psi_{\min})]^{-1}$  для волновых чисел, имеющих в линейном приближении максимальную скорость роста, при  $\tau = F_y = M = N = 0$  приведена на фиг. 2 в сравнении с экспериментальными данными (1 — работа [12], 2 — [13]). Соотношения (2.5) позволяют проанализировать влияние поверхностной вязкости и неоднородности поверхностного натяжения на нелинейную устойчивость тонкого слоя жидкости. Поверхностная вязкость существенно уменьшает скорость роста возмущений и амплитуду волн периодического течения. Увеличение поверхностной вязкости уменьшает также фазовую скорость. Влияние поверхностной вязкости сильно падает с ростом длины волны. Неоднородность поверхностного натяжения, обусловленная процессами тепломассопереноса, оказывает существенное влияние на устойчивость при малой скорости течения пленки ( $R < 10$ ). Наличием этого типа неустойчивости объясняется образование сухих пятен в парогенераторах при дисперсно-кольцевом режиме течения двухфазной среды. Положительные градиенты температуры, реализующиеся при обтекании жидкой пленки высокотемпературным потоком газа, стабилизируют течение. В пленках сложного состава неоднородность поверхностного натяжения оказывает определяющее влияние на устойчивость, вызывая, в частности, переход пленочной конденсации бинарных паров в капельную [14].

3. Исследуя устойчивость вышедшей на режим предельных циклов монохроматической волны к возмущениям из боковой полосы волновых чисел

$$A = a \exp [iQt_2] + [d_1(t_2) \exp (ik_2x) + d_2(t_2) \exp (-ik_2x)] \times \\ \times \exp (-iQt_2)$$

$$a = \sqrt{\gamma/\beta_1} \quad Q = \beta_2 a^2$$

в линейном приближении найдем, что условие возникновения модуляционной неустойчивости имеет вид

$$(3.1) \quad \operatorname{Re} alH > 0$$

$$H = -\gamma - \alpha_1 k_2^2 \pm \sqrt{\gamma^2 - k_2^4 \alpha_2^2 - 2k_2^2 \alpha_2 \gamma \beta_2 / \beta_1}$$

В случае  $\operatorname{Re} alH < 0$  возбужденные в боковой полосе моды затухают. Для жидкой пленки, находящейся на горизонтальной поверхности под действием термокапиллярных сил, выполняется принцип смены устойчивости ( $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ), в результате чего после достижения амплитудой несущей волны предельного значения  $a$  модуляционная неустойчивость возникнуть не может. Если же несущая волна находится в процессе роста, то численный анализ уравнения (2.4) при  $\operatorname{Re} alH < 0$  показывает, что возбуждение в боковой полосе возмущений и нелинейное взаимодействие между ними приводят к появлению мод на комбинированных волновых числах. В последующие моменты времени амплитуды всех мод растут.

При подходе амплитуды одной из мод к своему предельному значению нелинейное взаимодействие вызывает уменьшение амплитуд остальных мод, в результате чего в системе устанавливается монохроматическая волна, параметры которой зависят от величины линейной скорости роста возмущений и соотношения между амплитудами в начальный момент времени. Установление монохроматической волны в системе с кубичной нелинейностью является следствием конкуренции мод [15]. Существование для неконсервативных систем областей устойчивости, в которых  $\operatorname{Re} alH < 0$ , существенно отличает их от консервативных систем, для которых существуют только области модуляционной неустойчивости и нейтральной устойчивости [16].

При выполнении условия (3.1) возбуждаемые в боковой полосе моды растут, нелинейное взаимодействие между ними приводит к возникновению и росту мод на комбинированных волновых числах, в результате чего происходит быстрое заполнение спектра возбужденного волнового пакета и хаотизация общей картины роста и взаимодействия возмущений.

Поступила 9 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости, 1, 2. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. Benney D. J. Long waves on liquid films. J. Math. and Phys., 1966, vol. 45, No. 2.
4. Gjevik B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 8.
5. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической неустойчивости. Науч. тр. НИИ механ. МГУ, 1973, № 25.
6. Nakaya C. Equilibrium states of periodic waves on the fluid film down a vertical wall. J. Phys. Soc. Japan, 1974, vol. 36, No. 3.
7. Иванюков Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
8. Slattery J. C. Momentum and moment — of momentum balances moving surfaces. Chem. Engng Sci., 1964, vol. 19, No. 1.
9. Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, No. 3.
10. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
11. Кадошцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.
12. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости, 3. ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
13. Jones L. O., Whitaker S. An experimental study of falling liquid films. A. J. Ch. E. Journal, 1966, vol. 12, No. 3.
14. Ford J. D., Missen R. W. On the conditions for stability of falling films subject to surface tension disturbances; the condensation of binary vapors. Canad. J. Chem. Engng., 1968, vol. 46, No. 5.
15. Haken H. Statistical theory of self-organizing structures. In: Statist. Phys. Proc. Int. Conf., Budapest, 1975. Budapest, Akad. Kiado, 1976.
16. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves. J. Phys. Soc. Japan, 1972, vol. 33, No. 3.