МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1979

УДК 532.58.013.2

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ТОНКОЕ ТЕЛО ПРИ ЕГО НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Ю. З. АЛЕШКОВ

(Ленинград)

В [1] решена задача о вычислении волнового сопротивления тонкого тела, движущегося с переменной скоростью в жидкости бесконечной глубины. При таких же условиях в [2] рассмотрена задача об определении воздействия жидкости на тело, движущееся с постоянной скоростью без качки, после того как оно испытало действие начального возмущения. Методы, которые использовались для решения этих задач, существенно зависели от того факта, что глубина жидкости была бесконечной.

Ниже приводится решение названных задач для случая жидкости конечной глубины. Система осей координат xyz выбрана таким образом, что плоскость xy является горизонтальной, совпадающей со свободной поверхностью в ее невозмущенном состоянии, ось z направлена вертикально вверх. Жидкость считается идеальной, несжимаемой, а ее движение – безвихревым.

1. Рассмотрим сначала задачу о движении тела с ускорением вдоль горизонтальной прямой. Требуется определить потенциал скорости Φ – гармоническую функцию, удовлетворяющую следующим граничным и начальным условиям:

$$\Phi_{tt}-2V\Phi_{tx}-\dot{V}\Phi_x+V^2\Phi_{xx}+g\Phi_z=0 \quad (z=0)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=V\cos(n,x), \qquad (x,y,z)\in S_0$$

$$\Phi_z=0 \ (z=-H), \ \Phi=\Phi_t=0 \ (z=0,\ t=0)$$

где $V=V(t)$ – скорость движения тела вдоль оси x; g – ускорение силы тяжести; H – глубина жидкости; n – внешняя нормаль к поверхности тела S_0.

Пусть уравнение поверхности S_0 имеет вид $y=f(x,\ z)$ $(y>0)$, $y=-f(x,z)$ $(y<0)$.

В случае тонкого тела условием на поверхности будет

$$[\Phi_y]=-2Vf_x,\ (x,\ z)\in S$$

где S – проекция тела S_0 на диаметральную плоскость; знак $[\Phi_y]$ есть разрыв Φ_y.

Следуя [1], рассмотрим функцию Φ_1, представленную в виде потенциала простого слоя, распространенного на S с плотностью $\delta=\delta(x,\ z,\ t)$

$$\Phi_1=\iint\limits_S\frac{\delta(\xi,\zeta,t)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}$$

Согласно свойствам производной потенциала простого слоя имеем [3]

$$\Phi_{1y}|=-2\pi\delta, \qquad \Phi_{1y}|=2\pi\delta, \qquad \delta=\frac{V}{2\pi}f_x(x,z), \qquad (x,z)\in S$$

Представим функцию Φ в виде

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\varphi(x,y,z,t),\qquad \Phi_2=-\iint\limits_{S}\frac{\delta(\xi,\zeta,t)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x+\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}$$

где $\varphi=\varphi(x, y, z, t)$ — гармоническая функция, не имеющая в слое $|x|<\infty$, $|y|<\infty$, $-H\leqslant z\leqslant 0$ особенностей.

Так как $[\Phi_y]=[\Phi_{1y}]$, $[\Phi_{2y}]=0$, $(x, z)\in S$, а $[\Phi_y]=[\Phi_{1y}]=[\Phi_{2y}]=0$, $(x, z)\notin S$, то $[\varphi_y]=0$ на плоскости $y=0$.

В силу четности функций Φ, Φ_1, Φ_2 по y функция φ тоже четна. Так как φ_y непрерывна при $y=0$, то получаем $\varphi_y=0$ $(y=0)$.

Так как при $z=0$ имеют место равенства $\Phi_1=-\Phi_2$, $\Phi_{1z}=\Phi_{2z}$, то граничное условие имеет вид

$$\varphi_{tt}-2V\varphi_{tx}-\dot V\varphi_x+V^2\varphi_{xx}+g\varphi_z=$$
$$=\frac{gV}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{S}f_x(\xi,\zeta)\frac{d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}\qquad(z=0)$$

С помощью функции φ условие на дне запишется следующим образом:

$$\varphi_z=-\frac{V}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{S}f_x(\xi,\zeta)\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}\Bigg]d\xi\,d\zeta\qquad(z=-H)$$

Функцию φ будем искать в виде

$$\varphi=\frac{g}{\pi}\iint\limits_{S}f_x(\xi,\zeta)\,\sigma(\xi,\zeta;x,y,z,t)\,d\xi\,d\zeta$$

причем функция $\sigma=\sigma(\xi, \zeta; x, y, z, t)$ должна удовлетворять условиям

(1.1) $$\sigma_{tt}-2V\sigma_{tx}-\dot V\sigma_x+V^2\sigma_{xx}+g\sigma_z=V\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}\qquad(z=0)$$

(1.2) $$\sigma_z=\frac{V}{2g}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}\Bigg]\qquad(z=-H)$$

Воспользуемся следующими представлениями:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(H+\zeta)^2}}=\int\limits_0^\infty e^{-k(H+\zeta)}J_0(kr)\,dk,\qquad r=\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$$

(1.3)

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}=\int\limits_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kr)\,dk$$

$$J_0(kr)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\{ik[(x-\xi)\cos\theta+y\sin\theta]\}\,d\theta$$

где $J_0(k,r)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

где $J_0(k, r)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Теперь условия (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$\sigma_{tt}-2V\sigma_{tx}-\dot V\sigma_x+V^2\sigma_{xx}+g\sigma_z=V\int\limits_0^\infty e^{k\zeta}J_0(kr)k\,dk \qquad (z=0)$$

$$\sigma_z=\frac{V}{g}\int\limits_0^\infty e^{-kH}\operatorname{sh}k\zeta J_0(kr)k\,dk \qquad (z=-H)$$

Функцию $\sigma=\sigma(\xi, \zeta; x, y, z, t)$ будем искать в виде

$$\sigma=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}[A(\xi,\zeta,k,\theta,t)e^{kz}+B(\xi,\zeta,k,\theta,t)e^{-kz}]\times$$

$$\times\exp\{ik[(x-\xi)\cos\theta+y\sin\theta]\}\,dk\,d\theta$$

Из условия при $z=-H$ получаем

$$B=Ae^{-2kH}-\frac{V}{g}e^{-2kH}\operatorname{sh}k\zeta$$

Теперь выражение для функции σ примет вид

$$\sigma=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[2Ae^{-kH}\operatorname{ch}k(z+H)-\frac{V}{g}\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}\right]\times$$

$$\times\exp\{ik[(x-\xi)\cos\theta+y\sin\theta]\}\,d\theta\,dk$$

Из условия при $z=0$ получаем следующее уравнение для A:

$$A''-2Vik\cos\theta A'-(\dot Vik\cos\theta+V^2k^2\cos^2\theta-gk\operatorname{th}kH)A=$$

$$=\frac{kV}{2}\frac{e^{k(H+\zeta)}}{\operatorname{ch}kH}+\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{2g}\frac{e^{-kH}}{\operatorname{ch}kH}(\ddot V-3V\dot Vik\cos\theta-V^3k^2\cos^2\theta-gkV)$$

Это уравнение подстановкой $A=f(\beta, t)$ приводится к виду

$$\beta''+\omega^2\beta=f(t),\qquad A=\beta\exp\left\{ik\cos\theta\int\limits_0^t V(t)\,dt\right\} \tag{1.4}$$

$$\omega^2=gk\operatorname{th}kH,\quad f(t)=\gamma(t)\exp\left\{-ik\cos\theta\int\limits_0^t V(t)\,dt\right\}$$

$$\gamma(t)=\frac{kV}{2}\frac{e^{k(H+\zeta)}}{\operatorname{ch}kH}+\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{2g}\frac{e^{-kH}}{\operatorname{ch}kH}(\ddot V-3V\dot Vik\cos\theta-V^3k^2\cos^2\theta-gkV)$$

Решение уравнения (1.4) с нулевыми начальными данными имеет вид

$$\beta=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

При нулевых начальных данных для β будут иметь место нулевые начальные данные для A. Таким образом

$$A=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t\gamma(\tau)\exp\left\{ik\cos\theta\int\limits_\tau^t V(t)\,dt\right\}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Используя это выражение для A, получим

$$\Phi\Big|_{y=0}=\iint\limits_S f_x(\xi,\zeta)\left\{\frac{V}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}}\right]+\right.$$

$$+\frac{g}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[2\frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{\omega e^{kH}}\int\limits_0^t\gamma(\tau)\sin\omega(t-\tau)J_0\left[k\left(x-\xi+\int\limits_\tau^t V(t)\,dt\right)\right]d\tau-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{V}{g}\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}J_0[k(x-\xi)]\right]dk\right\}d\xi\,d\zeta$$

Для вычисления силы волнового сопротивления в случае тонкого тела имеет место формула

$$R=-2\rho\iint\limits_S(\Phi_t-V\Phi_x)\Big|_{y=0}f_x(x,z)\,dx\,dz$$

Окончательный результат следующий:

$$R=-\rho\frac{\dot V}{\pi}\iint\limits_S f_x(x,z)\,dx\,dz\iint\limits_S f_x(\xi,\zeta)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}}\right]d\xi\,d\zeta-$$

$$-\frac{2\rho}{\pi}\iint\limits_S f_x(x,z)\,dx\,dz\iint\limits_S f_x(\xi,\zeta)\left\{\int\limits_\tau^\infty\left[2g\frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{e^{kH}}\times\right.\right.$$

$$\times\int\limits_0^t\gamma(\tau)\cos\omega(t-\tau)J_0\left[k\left(x-\xi+\int\limits_0^t V\,dt\right)\right]d\tau-$$

$$\left.\left.-(\dot V J_0[k(x-\xi)]-V^2kJ_0'[k(x-\xi)])\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}\right]dk\right\}d\xi\,d\zeta$$

2. Рассмотрим вторую задачу о продольном неустановившемся движении тонкого тела. Пусть твердое тело движется вдоль горизонтальной прямой с постоянной скоростью V, возбуждая соответствующее волновое движение жидкости; в начальный момент на тело действует возмущение, которое приводит тело и жидкость в дополнительное колебательное движение. Требуется определить потенциал скорости для этого движения жидкости и ее воздействие на тело.

Задача о движении тела с постоянной скоростью без качки решена в [1].

Имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\Delta\Phi_j=0\qquad(j=3,5),\qquad\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t^2}-2V\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t\,\partial x}+V^2\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}+g\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}=0\qquad(z=0),\qquad\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}=0\qquad(z=-H)$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}=U_j(t)F_j(x,z),\quad y\to-0,\qquad\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}=-U_j(t)F_j(x,z),\quad y\to+0$$

$$\Phi_j=\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}=0\quad(z=0,\ t=0);\quad F_3=f_z,\quad F_5=(z-z_*)f_x-(x-x_*)f_z$$

где x_*, z_* — координаты центра тяжести тела.

Значение $j=3$ соответствует вертикальной качке, а $j=5$ – килевой качке, причем U_3 – вертикальная скорость, U_5 – угловая скорость.

Решение задачи будем искать в виде

$$\Phi_j=\Phi_{j1}+\Phi_{j2}+\varphi_j(x,\,y,\,z,\,t)$$

$$\Phi_{j1}=\iint\limits_S \frac{\delta_j(\xi,\zeta,t)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}},\quad \Phi_{j2}=-\iint\limits_S \frac{\delta_j(\xi,\zeta,t)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+\zeta)^2}}$$

$$\delta_j=\frac{1}{2\pi}U_jF_j,\qquad \varphi_j=\frac{g}{\pi}\iint\limits_S F_j(\xi,\zeta)\,\sigma_j(\xi,\zeta;\,x,y,z,t)\,d\xi\,d\zeta$$

Гармоническая по переменным x, y, z функция σ_j должна удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\partial^2\sigma_j}{\partial t^2}-2V\frac{\partial^2\sigma_j}{\partial t\,\partial x}+V^2\frac{\partial^2\sigma_j}{\partial x^2}+g\frac{\partial\sigma_j}{\partial z}=U_j\int\limits_0^\infty e^{k\zeta}J_0(kr)\,k\,dk\qquad (z=0)$$

$$\frac{d\sigma_j}{\partial z}=\frac{1}{g}U_j\int\limits_0^\infty e^{-kH}\operatorname{sh}k\zeta J_0(kr)\,k\,dk\qquad (z=-H)$$

в которых, как и в первой задаче, использовались представления (1.3).

Аналогично предыдущему случаю из условий при $z=-H$ и $z=0$ получим

$$\sigma_j=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big\{2A_je^{-kH}\operatorname{ch}k(z+H)-$$

$$-\frac{U_j}{g}\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}\Big\}\exp\{ik[(x-\xi)\cos\theta+y\sin\theta]\}\,d\theta\,dk$$

$$A_j''+2Vik\cos\theta A_j'-(V^2k^2\cos^2\theta-gk\operatorname{th}kH)A_j=$$

$$=\frac{kU_j}{2}\frac{e^{k(\zeta+H)}}{\operatorname{ch}kH}-\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{2g}\frac{e^{-kH}}{\operatorname{ch}kH}[U_j(V^2k^2\cos^2\theta+gk)+2Vik\cos\theta\dot U_j-\ddot U_j]$$

В результате подстановки $A_j=\beta_j\exp\{ikV\cos\theta t\}$ придем к уравнению

$$\beta_j''+\omega^2\beta_j=\gamma_j(t)\exp\{-ikV\cos\theta t\},\qquad \omega^2=gk\operatorname{th}kH$$

$$\gamma_j(t)=\frac{k}{2}U_j\frac{e^{k(H+\zeta)}}{\operatorname{ch}kH}+[\ddot U_j-2Vik\cos\theta\dot U_j-(V^2k^2\cos^2\theta+gk)U_j]\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{2g}\frac{e^{-kH}}{\operatorname{ch}kH}$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\beta_j=\beta_j^\circ\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\dot\beta_j^\circ\sin\omega t+\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t\gamma_j(\tau)\exp\{-ik\cos\theta\tau\}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Отсюда получаем

$$A_j=\left(\beta_j^\circ\cos\omega t+\frac{\dot\beta_j^\circ}{\omega}\sin\omega t\right)\exp\{ikV\cos\theta t\}+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t\gamma_j(\tau)\exp\{ikV\cos\theta(t-\tau)\}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Следовательно

$$\sigma_j=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^t\frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{\omega e^{kH}}\gamma_j(\tau)\sin\omega(t-\tau)\exp\{ik[(x-\xi+V(t-\tau))\cos\theta+$$

$$+y\sin\theta]\}d\tau\,d\theta\,dk+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{2e^{-kH}\operatorname{ch}k(z+H)\left(\beta_j{}^\circ\cos\omega t+\frac{\dot\beta_j{}^\circ}{\omega}\sin\omega t\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp(ikV\cos\theta t)-\frac{U_j}{g}\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}\right\}\exp\{ik[(x-\xi)\cos\theta+y\sin\theta]\}d\theta\,dk$$

Постоянные $\beta_j{}^\circ$, $\dot\beta_j{}^\circ$ определим из начальных условий, которые для функции σ_j имеют вид $\sigma_j=\partial\sigma_j/\partial t=0$ $(z=0,\ t=0)$.

Эти равенства приводят к значениям

$$\beta_j{}^\circ=\frac{U_j{}^\circ}{2g}e^{-kH}\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{\operatorname{ch}kH},\qquad \dot\beta_j{}^\circ=(\dot U_j{}^\circ-ikV\cos\theta U_j{}^\circ)\frac{e^{-kH}}{2g}\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{\operatorname{ch}kH}$$

Далее непосредственно получаем

$$\Phi_j\Big|_{y=0}=\iint\limits_S F_j(\xi,\zeta)\left\{\frac{U_j}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}}\right]+\right.$$

$$+\frac{g}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[2\frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{\omega e^{kH}}\int\limits_0^t\gamma_j(\tau)\sin\omega(t-\tau)J_0[k(x-\xi+V(t-\tau))]d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{VU_j}{g}\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}J_0[k(x-\xi)]\right]dk+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-2kH}\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{\operatorname{ch}kH}\operatorname{ch}k(z+H)\times$$

$$\times\left[\left(U_j{}^\circ\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\dot U_j{}^\circ\sin\omega t\right)J_0[k(Vt+x-\xi)]-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{kV}{\omega}U_j{}^\circ\sin\omega tJ_0'[k(Vt+x-\xi)]\right]dk\right\}d\xi\,d\zeta$$

В выражение для гидродинамической силы и момента входит разность

$$\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}-V\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}=\iint\limits_S F_j(\xi,\zeta)\left\{\frac{\dot U_j}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}}\right]-\frac{VU_j}{2\pi}\left[-\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}+\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2]^{3/2}}\right]+$$

$$+\frac{g}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[2\frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{e^{kH}}\int\limits_0^t\gamma_j(\tau)\cos\omega(t-\tau)J_0[k(x-\xi+V(t-\tau))]d\tau-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\dot U_j}{g}J_0[k(x-\xi)]-\frac{VU_j}{g}kJ_0'[k(x-\xi)]\right)\operatorname{sh}k\zeta e^{-kz-2kH}\right]dk+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-2kH}\frac{\operatorname{sh}k\zeta}{\operatorname{ch}kH}\operatorname{ch}k(z+H)[(-\omega U_j{}^\circ\sin\omega t+\dot U_j{}^\circ\cos\omega t)J_0[k(Vt+x-\xi)]-$$

$$\left.-kVU_j{}^\circ\cos\omega tJ_0'[k(Vt+x-\xi)]dk\right\}d\xi\,d\zeta$$

Вертикальная сила ($j=3$) и килевой момент ($j=5$) определяются выражением

$$R_j = -2\rho \iint\limits_S \sum_{n=3,5} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - V \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right) \Bigg|_{y=0} F_j(x, z)\, dx\, dz$$

Заметим, что полученные результаты по воздействию жидкости на тонкое тело совпадают с соответствующими формулами работ [1, 2], где рассмотрены случаи бесконечно глубокой жидкости. В данной работе в формулы для гидродинамической нагрузки входит глубина жидкости, и по ним можно определить волновое сопротивление или килевой момент при движении тонкого тела в жидкости ограниченной глубины.

Поступила 10 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теоретическое исследование о волновом сопротивлении. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 319.
2. *Хаскинд М. Д.* Качка корабля на спокойной воде. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 1.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.– Л., Гостехтеоретиздат, 1946.