

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТА ПРИ ИНЖЕКЦИИ ЖИДКОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ

М. Г. АЛИШАЕВ

(Мазачкала)

Наибольшее распространение в приближенных расчетах температурного поля пласта при инъекции жидкости получила схема Ловерье учета потерь тепла в кровлю и подошву. Согласно этой схеме [1-3] теплопроводность горных пород учитывается лишь в одном перпендикулярном пласту направлении и полагается равной нулю в направлениях простирания пласта. Очевидно, схема Ловерье занижает потери тепла в кровлю и подошву (вносятся тепловые экраны), и потому расчетные значения температур в пласте должны получаться несколько выше действительных.

Применение схемы Ловерье оправдано лишь при относительно больших скоростях фильтрации, когда теплоперенос в основном определяется ее конвекцией вместе с жидкостью по пласту и последующим кондуктивным проникновением в непроницаемые (глинистые) горные породы.

Широкую известность получила также и формула Ловерье для определения температурного поля пласта при закачке жидкости с постоянной интенсивностью в галерею. При выводе этой формулы теплопроводностью пласта по направлению движения жидкости пренебрегалось, а поперек пласта теплопроводность принималась бесконечной, учет потерь тепла в кровлю и подошву проводился по упомянутой выше схеме. Формула Ловерье совпадает с (1.9), если положить $\tau = x/u$. В [4] впервые было обращено внимание на характер расхождения опытных данных с формулой Ловерье, в [5] указано на возможность ее применения для осесимметричного течения. В [6] дано обобщение формулы Ловерье с учетом кондуктивной теплопроводности пласта в направлении движения жидкости (решение выписывается в квадратурах) и получено несколько лучшее согласие с опытом. Расхождение с экспериментом вблизи зоны нагнетания все же остаются, но благодаря простоте и удобству применения формула Ловерье и ее различные обобщения вошли во многие исследования [7] по расчету характеристик неизотермического вытеснения нефти водой.

Ниже выписывается аналог формулы Ловерье для плоского стационарного фильтрационного течения, в котором вязкость и проницаемость не зависят от температуры. Приводится пример температурного поля, создаваемого дублетом. Небольшим видоизменением схемы Ловерье выводится одно замкнутое приближенное дифференциальное уравнение для определения пластовой температуры, которое позволяет избавиться от решения контактной задачи теплопроводности. На примере решения модельной задачи показывается приемлемость указанного дифференциального уравнения для расчета процесса неизотермического вытеснения. Наконец, проводится более точный анализ потерь тепла в кровлю и подошву и устанавливаются границы применимости схемы Ловерье.

1. Пусть в однородном тонком пласте мощностью h создано стационарное фильтрационное течение однородной жидкости, причем на контуре питания (или в нагнетательной скважине) температура закачиваемой пластовой жидкости T_b постоянна. Примем теплопроводность горных пород по направлению равной нулю, теплофизические свойства кровли и подошвы одинаковыми и пренебрежем мощностью пласта (схема сосредоточенной емкости [1]), вводя среднюю по ее мощности температуру. Тогда для определения температурного поля горной породы будем иметь уравнение со следующим граничным условием при $z=0$ (пласт):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad z > 0 \\ c_* \frac{\partial T}{\partial t} + c_0 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{2\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

начальным условием $T(x, y, z, 0) = T_0$ и условием на контуре нагнетания $T(x, y, 0, t) = T_B$. Здесь c, c_*, c_0 — объемные теплоемкости горной породы, пласта и пластовой жидкости, λ — коэффициент теплопроводности горных пород, u, v — компоненты скорости, зависящие лишь от координат x, y (считаются известными).

Для изображения L по Лапласу от $(T - T_0)$ уравнение (1.1) имеет ограниченное при $z = +\infty$ решение

$$(1.2) \quad L = A(x, y, s) e^{-(z/a)\sqrt{s}}, \quad a = \sqrt{\lambda/c}$$

где $A(x, y, s)$ — произвольная функция.

Подставив (1.2) в (1.1), получим уравнение

$$(1.3) \quad u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} = - \left(\frac{c_* s}{c_0} + \frac{2\lambda\sqrt{s}}{ac_0 h} \right) A$$

Потребуем теперь, чтобы новая переменная τ удовлетворяла условию

$$(1.4) \quad u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{dA}{d\tau}$$

Переменная τ соответствует времени движения псевдочастицы по линии тока (фактическое время движения частицы есть $m\tau$, m — пористость).

Учитывая, что при $z=0$ и $\tau=0$ на контуре нагнетания температура жидкости постоянна и равна T_B , а соответствующее изображение по Лапласу есть $(T_B - T_0)/s$, из (1.3) и (1.4) можно получить

$$(1.5) \quad A(x, y, s) = \frac{T_B - T_0}{s} \exp \left[- \left(\frac{c_* s}{c_0} + \frac{2\lambda\sqrt{s}}{ac_0 h} \right) \tau \right]$$

Применив обращение к (1.2) и (1.5) [8], получим обобщенную формулу Ловерье

$$(1.6) \quad \frac{T - T_0}{T_B - T_0} = \operatorname{erfc} \left(\frac{z + 2\lambda\tau/c_0}{2a\sqrt{t - c_*\tau/c_0}} \right)$$

в которой правая часть считается равной нулю при $t < c_*\tau/c_0$. Параметр τ имеет смысл времени, затраченного на достижение данной точки (x, y) линией отмеченных псевдочастиц от контура нагнетания. Например, в случае галереи $\tau = x/u$, для осесимметричного течения $\tau = \pi r^2/Q$.

Формула показывает, что в общем случае при плоской фильтрации, если течение стационарно, изотермы совпадают с линиями отмеченных частиц. Чтобы воспользоваться (1.6), нужно иметь значения τ как функции x, y . Можно, например, задаваться значениями τ и определить положение линии отмеченных псевдочастиц (изотерму) из уравнений

$$(1.7) \quad \frac{dx}{d\tau} = u(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = v(x, y)$$

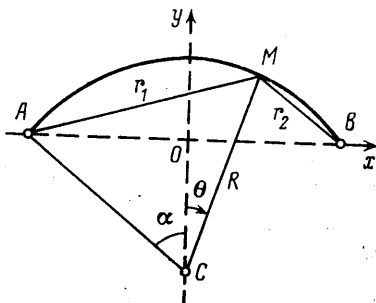
пользуясь стандартной процедурой Рунге — Кутты.

Приведем нетривиальный пример, когда время τ находится в элементарных функциях.

2. Пусть плоское стационарное течение образовано парой скважин одной и той же интенсивности Q . Обозначим расстояние между скважинами $2l$, поместим нагнетательную скважину в точку $(-l, 0)$, эксплуатационную — в точку $(l, 0)$. Комплексный потенциал такого течения есть

$$(2.1) \quad W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+l}{z-l}$$

линиями тока служат дуги окружностей [9], проходящие через точки $A(-l, 0)$ и $B(l, 0)$, значение функции тока ψ в каждой точке $M(x, y)$ линейно связано с центральным углом α (фиг. 1), опирающимся на линию тока — дугу AMB . Для верхней



Фиг. 1

полуплоскости $\psi = (\alpha - \pi)Q/2\pi$. Из фиг. 1 видно, что имеют место соотношения

$$(2.2) \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{l}{R} \right), \quad \theta = \arcsin \left(\frac{x}{R} \right), \quad r_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}, \quad \pm OC = \frac{x^2 - l^2 + y^2}{2y}, \quad R^2 = l^2 + OC^2$$

Расстояние по дуге, равное $(\alpha + \theta)R$, псевдочастица пройдет за время (скорость частицы равна скорости фильтрации)

$$(2.3) \quad \tau = \int_{-\alpha}^{\theta} \frac{ds}{|W'(z)|} = \int_{-\alpha}^{\theta} \frac{d\theta^2}{d\varphi}$$

Выразим потенциал φ как функцию угла θ . Из фиг. 1 очевидно, что

$$(2.4) \quad r_1 = 2R \sin \frac{\alpha + \theta}{2}, \quad r_2 = 2R \sin \frac{\alpha - \theta}{2}, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sin^{1/2}(\alpha + \theta)}{\sin^{1/2}(\alpha - \theta)}$$

Найдем отсюда $d\varphi/d\theta$, подставим в (2.3) и вычислим интеграл

$$(2.5) \quad \tau = \frac{2\pi l^2}{Q \sin^2 \alpha} [\sin \alpha + \sin \theta - (\alpha + \theta) \cos \alpha]$$

Формулы (2.2) и (2.5) решают вопрос определения температурного поля пласта для пары скважин при тепловой инжекции. Они теряют смысл лишь на главной линии тока, когда $\alpha = 0$ (при $\alpha \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow -Q/2$). Но на этой линии

$$(2.6) \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{l+x}{l-x}, \quad \tau = \int_{-a}^x \frac{dx}{u} = \frac{\pi}{3Ql} (2l^3 + 3l^2x - x^3)$$

Интересно отметить, что эксплуатационная скважина оказывается особой точкой для температуры. Значение температуры в этой точке при $z=0$ зависит от линии тока, ибо каждая линия тока несет свою температуру. Вдоль линии тока AB , где $\psi = -Q/2$, время $\tau = \tau_{\min} = 4\pi l^2/3Q$ и температура будет определяться формулой, по-

лучаемой из (1.5) при $z=0$ и $\tau=\tau_{\min}$. Вдоль линии же тока $\psi=0$ время $\tau=\infty$ и температура остается равной пластовой.

Время движения τ псевдочастицы вдоль линии тока от нагнетательной скважины до эксплуатационной найдется из (2.5) при $\theta=\alpha$

$$(2.7) \quad \tau = \frac{4\pi l^2 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{Q \sin^3 \alpha}$$

Здесь значения второй дроби при $\alpha=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 3\pi/4$ равны соответственно 1/3, 0,38, 0,43, 0,53, 1, 1,68. Критическую линию тока, на которой начнется рост температуры в данный момент времени t в эксплуатационной скважине, можно найти из уравнения $c_*\tau/c_0=t$, где τ берется из (2.7). Оно определит α_{\max} . За температуру в эксплуатационной скважине можно принять среднее по всем линиям тока значение температуры

$$(2.8) \quad \frac{T-T_0}{T_B-T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \operatorname{erfc} \left(\frac{\lambda\tau(\alpha)}{ahc_0\sqrt{t-c_*\tau/c_0}} \right) d\alpha$$

Если бы на контуре нагнетания была задана не температура, а количество импульсно вводимого тепла (скажем, в скважину в момент времени $t=0$ вводится тепло $c_0(T_B-T_0)Q\Delta t$, а при $t>0$ закачивается жидкость снова с пластовой температурой), то в (1.5) перед экспонентой присутствовал бы множитель $(T_B-T_0)\Delta t$ и в качестве решения вместо (1.6) было бы получено

$$(2.9) \quad \frac{T-T_0}{T_B-T_0} = \frac{\gamma\Delta t}{2t'\sqrt{\pi t'}} e^{-\gamma^2/4t'}, \quad \gamma = \frac{z}{a} + \frac{2\lambda\tau}{ac_0h}$$

$$t' = t - \frac{c_*\tau}{c_0}, \quad T = T_0 \quad (t' < 0)$$

Здесь τ также определяется формулами (2.5) и (2.7). Каждому значению соответствует момент времени, когда пластовая температура достигает максимума. Этот временной максимум достигается при $t'=\gamma^2/6$ на каждой линии тока, причем

$$(2.10) \quad \frac{T_{\max}-T_0}{T_B-T_0} = \frac{3\sqrt{6}}{e\sqrt{\pi e}} \left(\frac{ahc_0}{2\lambda t} \right)^2 \Delta t$$

Обычно реализуемые пластовые условия близки к следующим: $h=10$ м, $Q=50$ м³/сутки, $l=200$ м, $\lambda=1$ ккал/м·час·град, $c_0=1000$ ккал/м³·град, $c=773$ ккал/м³·град, $c_*=985$ ккал/м³·град. Вычисления показывают, что $\tau_{\min}=3360$ суток, $\gamma^2=8000$ суток. Если закачка горячей воды проводилась в течение полугодия ($\Delta t=183$ суток), то максимум температуры возле эксплуатационной скважины по главной линии тока составит 0,021 (T_B-T_0) , причем этот максимум будет достигнут через 5600 суток. Вода же при пористости 25% прибудет в эксплуатационную скважину через 840 суток.

Этот пример показывает, что тепловое воздействие на пласт малоэффективно. На меру эффективности воздействия теплового импульса указывает максимум температуры, реализуемый в пласте (2.10). Для центральной точки (0,0) этот максимум можно выразить формулой

$$(2.11) \quad \frac{T_{\max}-T_0}{T_B-T_0} = 0.0058 \frac{\Delta t}{\lambda c} \left(\frac{c_0 h Q}{l^2} \right)^2$$

Существенного повышения эффективности теплового воздействия горячей водой можно добиться лишь за счет уменьшения расстояний между скважинами.

3. Приведенные выше решения носят познавательный характер, ибо с ростом температуры вязкость жидкости уменьшается и режим течения со временем меняется. Сохранить стационарность не удастся для любой геометрии течения. Получим ниже приближенное дифференциальное уравнение для определения осредненной по мощности пластовой температуры, упростив несколько схему Ловерье.

Формулу (1.2) можно использовать для получения потерь тепла в кровлю и подошву. Представим для $z=0$ производную изображения $\partial L/\partial z$ в

виде свертки

$$(3.1) \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\sqrt{\frac{cs}{\lambda}} A(x, y, s) = -s \sqrt{\frac{c}{\lambda s}} L(x, y, 0, s)$$

Пользуясь теоремой обращения, имеем

$$(3.2) \quad \frac{2\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{2\sqrt{\lambda c}}{h} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{T(x, y, 0, \tau) - T_0}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau$$

Замена в (1.1) правой части по (3.2) приводит к интегродифференциальному уравнению, неудобному для численного решения, так как требуется запоминание пластовой температуры в промежуточные моменты времени. Заменяем интеграл (3.2) его асимптотическим приближением.

При монотонном изменении пластовой температуры основной вклад в величину интеграла (3.2) вносят значения подынтегральной функции в моменты времени, близкие к t . Разложим $T(x, y, 0, \tau)$ в точке t в ряд по степеням $t-\tau$, подставим в (3.2), проинтегрируем и продифференцируем

$$(3.3) \quad -\frac{2\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2\sqrt{\lambda c}}{h\sqrt{\pi t}} \left(T - T_0 + t \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{t^2}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \dots \right)$$

Отбросим здесь все члены высших порядков и удержим лишь первые два члена. Тогда из (1.1) будем иметь для определения пластовой температуры с приближенным учетом теплопотерь в кровлю и подошву единое уравнение

$$(3.4) \quad \left(c_* + \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\lambda c t}{\pi}} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + c_0 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\lambda c}{\pi t}} (T - T_0) = 0$$

Таким образом, применение и упрощение схемы Ловерье привело к переменной объемной теплоемкости пласта (растущей как \sqrt{t} за счет прогревания окружающих пласт пород) и схеме Ньютона с переменным (обратно пропорциональным \sqrt{t}) коэффициентом теплообмена. Уравнение (3.4) и его разновидности для неоднородной жидкости очень удобны для разностной аппроксимации, ибо позволяют избавиться от решения температурной задачи для накрывающих пород.

Чтобы оценить погрешность, вносимую приближенным характером уравнения (3.4), рассмотрим одномерную задачу о нагреве галереи при нагнетании жидкости с постоянной скоростью. Сопоставим формулу Ловерье с решением (3.4) для $x > 0$, $t > 0$ и краевых условий $T(x, 0) = T_0$, $T(0, t) = T_B$.

Запишем уравнение (3.4) в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c_0 u \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{T - T_0}{T_B - T_0} = \frac{c_*^2 \theta(x, t)}{(c_* + \beta \sqrt{t})^2}$$

$$\xi = \frac{2}{\beta} \sqrt{t} - \frac{2c_*}{\beta^2} \ln \left(1 + \frac{\beta \sqrt{t}}{c_*} \right)$$

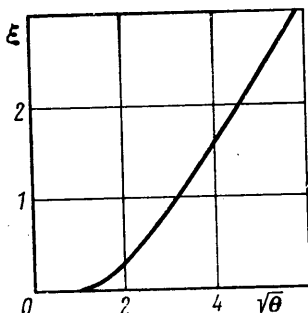
Общее решение этого уравнения [10] — произвольная функция аргумента $\xi - x/c_0 u$. Следовательно, решение имеет вид

$$(3.5) \quad \frac{T - T_0}{T_B - T_0} = \frac{\theta(\xi - x_*)}{(1 + \eta)^2}, \quad \xi = \eta - \ln(1 + \eta)$$

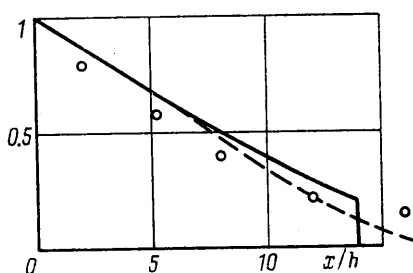
$$x_* = \frac{\beta^2 x}{2c_* c_0 u}, \quad \eta = \frac{\beta \sqrt{t}}{c_*}, \quad \beta = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda c}{\pi}}$$

Здесь θ — произвольная функция, определяемая по начальным и граничным данным.

Полагая $t=0$ (тогда $\eta=0$, $\xi=0$, $T=T_0$), найдем, что $\theta(-x_*)=0$, т. е. функция θ обращается в нуль для отрицательных значений аргументов.



Фиг. 2



Фиг. 3

Это означает, что существует фронт тепла, перед которым температурные возмущения отсутствуют.

Полагая $x=0$ (тогда $x_*=0$, $T=T_B$), будем иметь

$$(3.6) \quad \theta(\xi) = (1+\eta)^2, \quad \xi = \sqrt{\theta} - 1 - \ln \sqrt{\theta}$$

На фиг. 2 изображен график зависимости $\theta(\xi)$.

Из (3.5) следует, что фронт тепла движется согласно закону $x_* = \xi = \eta + \ln(1+\eta)$, скачок температуры на фронте убывает с течением времени

$$\frac{T_* - T_0}{T_B - T_0} = \left(1 + \frac{2}{c_* h} \sqrt{\frac{\lambda c t}{\pi}} \right)^{-1}$$

Для сопоставления результатов расчетов по формуле Ловерье с решением (3.5) и (3.6) были приняты условия опытов работ [4, 5]: $h=0.25$ м, $u=0.316$ м/час, $\lambda=1$ ккал/м·час·град, $c=773$ ккал/м³·град, $c_*=985$ ккал/м³·град, $\lambda_*=3$ ккал/м³·град. Вычисления дают связь с безразмерными параметрами $\eta=1.295\sqrt{t}$, $x_*=2.54x$, где t в час, x в м. На фиг. 3 приведено сопоставление экспериментальных данных с расчетом по формуле Ловерье и решением (3.5) в момент времени 140 мин. Из сопоставления видно, что принятые упрощения не намного «испортили» схему Ловерье, отклонения составили не более 5% абсолютной разности температур.

4. Представляет интерес более точный анализ потерь тепла в кровлю и подошву пласта с учетом теплопроводности горных пород в горизонтальном направлении. Выпишем точное решение температурной задачи для полупространства при произвольном законе изменения температуры на кровле пласта, найдем точное выражение для потока тепла в горный массив и попытаемся упростить его при некоторых предположениях так, чтобы получить более точную и приемлемую для счета замену схемы Ловерье.

Пусть пласт накрыт однородным массивом теплопроводности λ и температуропроводности a . Если $\theta(x, y, t)$ — температура на кровле пласта, а температура горного массива в начальный момент времени принята рав-

ной нулю, то в любой точке горного массива температура определится формулой [11]

$$(4.1) \quad T(x, y, z, t) = \\ = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta \int_0^t \frac{z\vartheta(\xi, \eta, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^3(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau$$

Сделаем в этой формуле замены переменных

$$(4.2) \quad \xi = x + 2a\sqrt{t-\tau}\xi_1, \quad \eta = y + 2a\sqrt{t-\tau}\eta_1, \quad \tau = t - z^2/4a^2u^2$$

и представим решение в форме

$$(4.3) \quad T = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{z/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} \vartheta\left(x + \frac{z\xi_1}{u}, y + \frac{z\eta_1}{u}, t - \frac{z^2}{4a^2u^2}\right) e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} d\xi_1 d\eta_1$$

Вычислим производную по координате z , приняв во внимание постоянство пластовой температуры в начальный момент времени

$$(4.4) \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{z/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\vartheta_{\xi} \frac{\xi_1}{u} + \vartheta_{\eta} \frac{\eta_1}{u} - \right. \\ \left. - \vartheta_{\tau} \frac{z}{2a^2u^2}\right) e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} d\xi_1 d\eta_1$$

Устремив z к нулю и возвращаясь к переменной τ , получим

$$(4.5) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\vartheta_{\tau} - \frac{a\xi_1\vartheta_{\xi} + a\eta_1\vartheta_{\eta}}{\sqrt{t-\tau}}\right) e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} d\xi_1 d\eta_1$$

Эта формула дает точное выражение потерь тепла. Если принять в ней производные ϑ_{τ} , ϑ_{ξ} , ϑ_{η} независящими от координат ξ и η , то получится схема Ловерье (3.2).

В случае инъекции тепла в пласт производные ϑ_{ξ} , ϑ_{η} на линиях нагнетания терпят разрывы и могут обращаться в бесконечность. Выражение (4.5) можно преобразовать по формуле Грина (S — площадь, Γ — контур)

$$(4.6) \quad \iint_S e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} (\xi_1\vartheta_{\xi} + \eta_1\vartheta_{\eta}) d\xi_1 d\eta_1 = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\vartheta_{\eta} d\xi_1 - \vartheta_{\xi} d\eta_1) e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} + \\ + a\sqrt{t-\tau} \iint_S e^{-\xi_1^2 - \eta_1^2} (\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta}) d\xi_1 d\eta_1$$

Если в качестве области интегрирования принять всю плоскость, то в качестве границ следует брать множество Γ ; контуров, каждый из которых охватывает нагнетательную скважину (x_i, y_i) , ибо формулой (4.6) можно пользоваться лишь в предположении непрерывности вторых производных.

водных

$$(4.7) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\sqrt{\lambda c}}{\pi \sqrt{\pi}} \left\{ \sum_i \int_0^t \frac{1}{4(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \int_{\Gamma_i} (\vartheta_{\eta} d\xi - \vartheta_{\xi} d\eta) + \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \iint_{-\infty}^{\infty} (\vartheta_{\tau} - a^2 \Delta \vartheta) e^{-\xi^2 - \eta^2} d\xi_1 d\eta_1 \right\}, \quad r_i^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$$

Заменяем теперь формулу (4.7) приближенной. Контурные интегралы вокруг нагнетательных скважин определяют мощности кондуктивных источников тепла $N_i = -2\pi \lim_{r_i \rightarrow 0} (r_i \partial \vartheta / \partial r_i)$, а двойной интеграл можно заменить его асимптотическим значением $\pi(\vartheta_{\tau} - a^2 \Delta \vartheta)$ при $t \rightarrow \tau$. Тогда поток в кровлю приближенно можно выразить в виде

$$(4.8) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\sqrt{\lambda c}}{4\pi \sqrt{\pi}} \sum_i \int_0^t \frac{N_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau + \sqrt{\lambda c} \int_0^t \frac{\vartheta_{\tau} - a^2 \Delta \vartheta}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau$$

По сравнению со схемой Ловерье здесь добавились два члена. Сумма учитывает призабойные потери тепла возле скважин, а член с $a^2 \Delta \vartheta$ обусловлен теплопроводностью горных пород по простираюнию пласта. В случае галереи, если нагнетание происходит в точке $x=0$, формулу (4.5) можно упростить и методом спуска получить

$$(4.9) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\pi} \int_0^t \frac{\vartheta_x(0, \tau)}{t-\tau} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau + \sqrt{\frac{\lambda c}{\pi}} \int_0^t \frac{\vartheta_{\tau} - a^2 \Delta \vartheta}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

Так как при закачке горячей воды $\vartheta_x(0, \tau) < 0$, то первый член дает призабойные потери — это слагаемое существенно лишь для малых x . Вогнутость температурного профиля (фиг. 3) означает, что $\vartheta_{xx} > 0$. Последний член в (4.9) будет уменьшать потери тепла вблизи фронта. Но интегрально для всей области $0 < x < \infty$ потери тепла по формуле (4.9) и по формуле Ловерье остаются одинаковыми. Схема Ловерье занижает потери тепла вблизи точек нагнетания и завышает вдали. Применение ее к решению задач оправдано, если это искажение потерь тепла значительно меньше общего количества вводимого в пласт тепла.

Интегрируя первое слагаемое в (4.9) по x от 0 до ∞ , а затем вычисляя интеграл по времени, заменив $\vartheta_x(0, \tau)$ по формуле (1.6), получим оценку призабойных потерь

$$(4.10) \quad -\frac{\lambda}{\pi} \int_0^t \frac{\vartheta_x(0, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \frac{2a\sqrt{\pi}}{2} d\tau = \frac{2\lambda^2(T_B - T_0)}{\pi u h c_0} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} = \frac{2\lambda^2(T_B - T_0)}{u h c_0}$$

Количество тепла, вводимое в пласт в единицу времени, составляет $uhc_0(T_B - T_0)$. Их отношение дает

$$(4.11) \quad 2 \left(\frac{\lambda}{uhc_0} \right)^2 = \frac{2}{\text{Pe}^2}, \quad \text{Pe} = \frac{uhc_0}{\lambda}$$

где Pe — число Пекле. Очевидно, применение схемы Ловерье оправдано, если выполнено условие $\text{Pe} > 10$. Тогда искажение в оттоке не превышает 2% общего количества тепла.

Поступила 9 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн Л. И. Температурные поля в нефтяных пластах. М., «Недра», 1972.
2. Раковский Н. Л., Цыпкина О. Э. Температурное поле и тепловые потери слоисто-неоднородного пласта при нагнетании теплоносителя. Изв. АН ССРС, МЖТ, 1973, № 2.
3. Lauvirier H. A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. Appl. Sci. Res., Sec. A., 1955, vol. 5, No. 2-3.
4. Молофеев Г. Е. Экспериментальное изучение нагрева пласта при закачке горячей воды. Изв. вузов, Нефть и газ, 1958, № 12.
5. Шейнман А. Б., Молофеев Г. Е., Сергеев А. И. Воздействие на пласт теплом при добыче нефти. М., «Недра», 1969.
6. Авдонин Н. А. О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при тепловой инъекции. Изв. вузов, Нефть и газ, 1964, № 3.
7. Расчеты неизотермической нефтеотдачи многослойных пластов. Уч. зап. Латв. ун-та им. П. Стучки, 1970, т. 123.
8. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965.
9. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
10. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., «Наука», 1966.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.