

**КОНЦЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ НАЧАЛЬНОЙ ОБВОДНЕННОСТИ**

П. М. ГУСЕЙНОВ, П. А. ЯНИЦКИЙ

(Баку, Тюмень)

Изучается характер возрастания водонасыщенности на выходе из достаточно длинного образца (концевой эффект [1, 2]) без учета взаимодействия с фронтом вытеснения и в случае, когда исходная водонасыщенность  $S_0$  незначительно превышает неснижаемую водонасыщенность  $S_*$ . Применяется процедура построения асимптотических разложений по малому параметру  $\mu = S_0 - S_*$ . Проведено сравнение полученного разложения и численного решения. Хорошее соответствие приведенных результатов указывает на правильность выбранного подхода к построению асимптотики.

**1. Постановка задачи.** Уравнение Рапопорта — Лиса, описывающее одномерное линейное вытеснение нефти водой в однородной пористой среде, после приведения к безразмерному виду имеет вид (например, [1])

$$(1.1) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \varphi'(S) \frac{\partial S}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi(S) f_1(S) J'(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0$$

$$x = \frac{x'}{L}, \quad t = \frac{wt'}{Lm}$$

$$\varphi(S) = \frac{\mu_0 f_2(S)}{\mu_0 f_2(S) + f_1(S)}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{mk}}{\mu_1 L w}$$

Здесь  $S$  — насыщенность воды,  $\theta$  — статический угол смачивания,  $m$  — пористость,  $\sigma$  — межфазное натяжение,  $k$  — абсолютная проницаемость пласта,  $f_i$  — относительная фазовая проницаемость,  $\mu_i$  — вязкость ( $i=1$  соответствует нефти,  $i=2$  — воде),  $J(S)$  — безразмерная функция Леверетта,  $x'$  — размерная пространственная координата,  $t'$  — размерное время,  $L$  — характерная длина,  $w$  — суммарная скорость фильтрации,  $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$  — относительная вязкость.

Величина  $S$  изменяется в пределах от  $S_*$  до  $S^*$ . Будем предполагать, что функции  $\varphi(S)$  и  $\psi(S) = -f_1(S) J'(S)$  определены и непрерывны на замкнутом отрезке  $[S_*, S^*]$ , и имеет место следующее представление:

$$(1.2) \quad \varphi(S) = (S - S_*)^n \varphi^0(S)$$

где  $\varphi^0(S)$  — положительная и достаточно гладкая функция на интервале  $[S_*, S^*]$ ;  $n \geq 1$ .

Кроме того, функции  $\varphi$  и  $\psi$  строго монотонны на интервале  $(S_*, S^*)$ :  $\varphi'(S) > 0$ ,  $\psi'(S) < 0$  при  $S_* < S < S^*$ , при этом существует единственная точка перегиба  $S^\circ$  функции  $\varphi(S)$

$$\varphi'(S^\circ) = 0, \quad S_* < S^\circ < S^*$$

Считаем, что в начальный момент  $t=0$  задано равномерное распределение насыщенности

$$(1.3) \quad S(x, 0) = S_0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

На границах  $x=0$  (входное сечение) и  $x=1$  (выходное сечение) заданы условия непротекания соответственно нефти и воды

$$(1.4) \quad S(0, t) = S^*, \quad x=0$$

$$(1.5) \quad \varphi(S) \left[ 1 - \varepsilon \psi(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right] = 0, \quad x=1$$

Вследствие условия (1.5) на выходе из образца происходит накопление воды (концевой эффект, см. [1]).

Решение задачи (1.1) при  $\varepsilon=0$  известно. Оно представляется кусочно-непрерывной функцией [1, 2]. При малом  $\varepsilon$  разрыв заменяется узкой переходной зоной. При удалении от точки разрыва капиллярный эффект убывает по экспоненциальному закону. Из результатов, изложенных ниже, следует, что концевой эффект, порожденный граничным условием (1.5), имеет аналогичный характер.

**2. Асимптотический анализ. Нулевое и первое приближение.** Уравнение (1.1) запишем в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ K(s) \frac{\partial s}{\partial \eta} + F(s) \right] = \mu^n \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

$$s = S - S_*, \quad s^* = S^* - S_*, \quad \psi_1(s) = \psi(S)$$

$$K(s) = \varphi(S) \psi(S), \quad F(s) = \varphi(S), \quad F^o(s) = \varphi^o(S)$$

$$\eta = (1-x) / \varepsilon, \quad \tau = \mu^n t / \varepsilon$$

Приняв  $\mu > 0$  за малый параметр, сформулируем основную задачу: в полуплоскости  $\Omega (0 \leq \eta \leq \infty, 0 \leq \tau \leq \tau_0)$  найти решение уравнения (2.1) при условиях

$$(2.2) \quad s(\eta, 0) = \mu$$

$$(2.3) \quad F(s) \left[ \psi_1(s) \frac{\partial s}{\partial \eta} + 1 \right] = 0, \quad \eta=0$$

$$(2.4) \quad \lim s = \mu, \quad \lim (\partial^l s / \partial \eta^l) = 0, \quad l=1, 2, \dots, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Соотношение (1.2) в новых обозначениях примет вид

$$(2.5) \quad F(s) = s^n F^o(s)$$

Следствием уравнения (2.1) и условий (2.2) – (2.4) является интегральное соотношение

$$(2.6) \quad \int_0^{\infty} [s(\eta, \tau) - \mu] d\eta = F^o(\mu) \tau$$

Решение задачи (2.1) – (2.4) будем искать в виде асимптотического ряда по степеням  $\mu$ , выбирая в качестве уравнения для нулевого приближения  $s_0(\eta, \tau)$  уравнение (2.1) при  $\mu=0$ . Из (2.1) с учетом (2.4) получим

$$(2.7) \quad K(s_0) \partial s_0 / \partial \eta + F(s_0) = F(\mu)$$

Добавим к (2.7) условие (2.6)

$$(2.8) \quad \int_0^{\infty} [s_0(\eta, \tau) - \mu] d\eta = F^{\circ}(\mu) \tau$$

При этом невязка, порожденная нулевым приближением  $s_0(\eta, \tau)$ , в граничном условии (2.3) равна  $F(\mu)$  и, следовательно, имеет порядок  $O(\mu^n)$ . Полагая

$$\omega(s_0, \mu) = [F(s_0) - F(\mu)] / (s_0 - \mu) K(s_0)$$

перепишем уравнение (2.7) в виде

$$(2.9) \quad ds_0 / (s_0 - \mu) = -\omega(s_0, \mu) d\eta$$

Из отмеченных выше свойств функций  $\varphi(S)$ ,  $\psi(S)$  нетрудно вывести грубую оценку

$$(2.10) \quad \omega(s_0, \mu) \geq \omega_0 > 0$$

где  $\omega_0$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\mu$ .

Отметим некоторые свойства нулевого приближения  $s_0(\eta, \tau)$ :

а) любое решение уравнения (2.9) экспоненциально стремится к  $\mu$  при  $\eta \rightarrow \infty$

$$(2.11) \quad s_0 = (s^{\circ} - \mu) \exp\left(-\int_0^{\eta} \omega(s_0, \mu) d\xi\right) + \mu \leq (s^{\circ} - \mu) \exp(-\omega_0 \eta) + \mu,$$

$$s^{\circ} = s_0(0, \tau)$$

б) решение задачи (2.9), (2.8) при  $\eta=0$  принимает значение  $s^{\circ}$ , удовлетворяющее соотношению

$$(2.12) \quad \int_{\mu}^{s^{\circ}} \frac{d\tau}{\omega(\tau, \mu)} = \int_0^{\infty} [s_0(\eta, \tau) - \mu] d\eta = F^{\circ}(\mu) \tau$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$(2.13) \quad ds^{\circ} / d\tau = F^{\circ}(\mu) \omega(s^{\circ}, \mu)$$

в) при всех  $0 \leq \eta < \infty$  справедливо равенство

$$(2.14) \quad \frac{\partial s_0}{\partial \tau} = F^{\circ}(\mu) \frac{s_0 - \mu}{s^{\circ} - \mu} \omega(s_0, \mu)$$

Формула (2.14) получается дифференцированием по  $\tau$  следующего из (2.9) и (2.13) тождества

$$(s_0 - \mu) - (s^{\circ} - \mu) \exp\left(-\omega(\mu, \mu) \eta + \int_{s^{\circ} - \mu}^{s_0 - \mu} \frac{\omega(\sigma, \mu) - \omega(\mu, \mu)}{(\sigma - \mu) \omega(\sigma, \mu)} d\sigma\right) = 0$$

При рассмотрении образования концевго эффекта выделяются три стадии: начальная, средняя и поздняя (поздней стадии соответствует время, близкое к прорыву воды через выходное сечение).

Предлагаемая асимптотика описывает квазистационарный процесс, соответствующий средней стадии, при этом для невязки, порождаемой нулевым приближением, нетрудно получить оценку

$$\mu^n \partial s_0 / \partial \tau \sim \mu^n$$

Для начальной стадии, в которой существенную роль играют нестационарные эффекты, и для поздней стадии, в которой при  $s^\circ \rightarrow s^*$  в граничном условии (2.3) возникает особенность, описанный выше подход неприменим.

Ограничимся построением первого приближения, следующие члены разложения могут быть выписаны аналогично.

Полагая  $s = s_0 + \mu^n s_1 + \mu^{2n} s_2 + \dots$  и пользуясь тейлоровскими разложениями  $K(s)$ ,  $F(s)$ , выпишем уравнение для первого приближения

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ K(s_0) \frac{\partial s_1}{\partial \eta} + K_0(s_0) s_1 \right] = \frac{\partial s_0}{\partial \tau}, \quad K_0(s_0) = K(s_0) \frac{\partial s_0}{\partial \eta} - F'(s_0)$$

Интегральное соотношение (2.6) с учетом (2.8) примет следующий вид:

$$(2.16) \quad \int_0^\infty s_1(\eta, \tau) d\eta = 0$$

Интегрируя (2.15) по  $\eta$  при условиях (2.4) и принимая во внимание (2.9), (2.14), получим уравнение

$$K(s_0) \frac{\partial s_1}{\partial \eta} + K_0(s_0) s_1 = -F^\circ(\mu) \frac{s_0 - \mu}{s^\circ - \mu}$$

общее решение которого есть

$$(2.17) \quad s_1 = \frac{K(s^\circ)}{K(s_0)} \exp(-f(\eta)) \left[ s_k^1 - F^\circ(\mu) \int_0^\eta \frac{s_0 - \mu}{s^\circ - \mu} \exp f(\xi) d\xi \right]$$

$$s_k^1 = \frac{F^\circ(\mu)}{K(s^\circ)} \int_0^\infty \frac{\exp(-f(\eta))}{K(s_0)} \left( \int_0^\eta \frac{s_0 - \mu}{s^\circ - \mu} \exp f(\xi) d\xi \right) \times$$

$$\times d\eta \left[ \int_0^\infty \frac{\exp(-f(\eta) d\eta)}{K(s_0)} \right]^{-1}$$

$$f(\xi) = \int_0^\xi \frac{F'(s_0(x, \tau))}{K(s_0(x, \tau))} dx$$

Учитывая асимптотическое поведение  $s_0(x, \tau)$  при  $x \rightarrow \infty$ , ограниченность и положительность  $F'(s_0)$ ,  $K(s_0)$ , нетрудно заключить, что любое решение уравнения (2.15) экспоненциально стремится к нулю при  $\eta \rightarrow \infty$ .

Нулевое приближение вычисляется следующим методом: задается некоторый момент времени  $\tau$ , при этом суммарный поток воды  $Q_0$  в силу (2.8) равен  $F^\circ(\mu)\tau$ . При произвольном значении  $s^\circ(\tau)$  уравнение (2.7) решается методом Эйлера (предиктор — корректор) с ошибкой аппрокси-

магии  $O(h^2)$  (на интервале изменения  $\eta$  от 0 до  $\eta_0$ , где  $\eta_0$  — достаточно большое число). С помощью квадратурной формулы трапеций вычисляется

$$Q = \int_0^{\eta_0} [s_0(\eta, \tau) - \mu] d\eta$$

Рассматривая разность  $\Delta = Q_0 - Q$ , проводим коррекцию значения  $s^0(\tau)$ . Процесс вычисления  $s_0(\eta, \tau)$  продолжается до тех пор, пока  $\Delta$  не станет меньше  $10^{-5}$ . Полученное решение  $s_0(\eta, \tau)$  использовалось при нахождении функции  $s_1(\eta, \tau)$ . Метод решения уравнения (2.15) совместно с интегральным условием (2.16) аналогичен описанному выше.

3. Сравнение с численным решением. Уравнение Рапопорта — Лиса (1.1) с начальным условием (1.3) численно решалось на отрезке  $x_* \leq x \leq 1$ , где  $x_* = 1 - \eta_0 \varepsilon$ . В точке  $x = x_*$  задавалось граничное условие, аналогичное (2.4)

$$(3.1) \quad S(x_*, t) = S_0$$

Вместо граничного условия (1.5) использовалось эквивалентное ему интегральное соотношение

$$(3.2) \quad \int_{x_*}^1 (S - S_0) dx = \varphi(S_0) t$$

Опишем численный метод. На оси  $x$  вводится равномерная сетка  $x_i = ih$  с шагом  $h$ . Шаг по времени обозначается  $\Delta t$ .

В расчетах применялась неявная разностная схема, линейная относительно значений функции  $S$  на верхнем временном слое. Значения коэффициентов  $\varphi'(S)$ ,  $f_1(S)$ ,  $J'(S)$  вычислялись по значениям насыщенности  $S$  на предыдущем временном слое. Уравнение (1.1) в конечных разностях имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} + \varphi'(S_i^n) \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} + \\ & + \frac{\varepsilon}{h} \left[ f_1(S_{i+1/2}^n) J'(S_{i+1/2}^n) \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} - \right. \\ & \left. - \varphi(S_{i-1/2}^n) f_1(S_{i-1/2}^n) J'(S_{i-1/2}^n) \frac{S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}}{h} \right] = 0 \end{aligned}$$

Конвективный член  $\varphi'(S) \partial S / \partial x$  аппроксимировался односторонним разностным отношением. Погрешность аппроксимации используемой схемы есть  $O(h) + O(\Delta t)$ .

При решении системы алгебраических уравнений применялся метод прогонки [3], модифицированный с учетом интегрального соотношения (3.2).

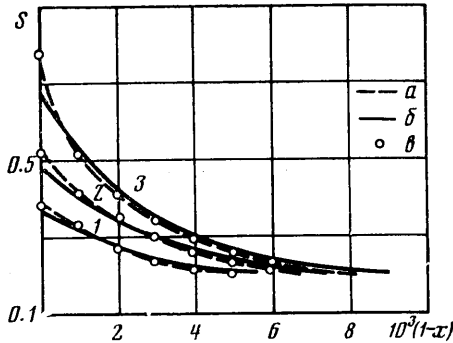
В численных экспериментах использовались следующие функции и параметры:

$$\begin{aligned} f_1(S) &= (0.9 - S)^2, & f_2(S) &= (S - 0.1)^2, & J(S) &= 0.9 - S \\ \mu_0 &= 5, & \varepsilon &= 0.05, & \mu &= 0.1, & n = 1, & x = 0.99 \end{aligned}$$

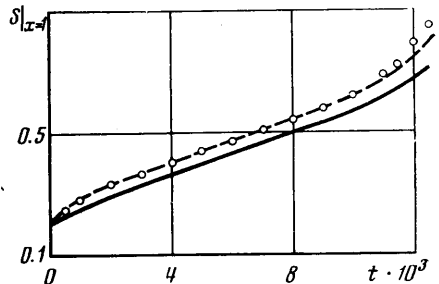
Формулы для фазовых проницаемостей и функции капиллярного давления заимствованы из [4].

На фиг. 1, 2 сопоставлены графики первого приближения (а) и нулевого приближения (б) с результатами численного решения задачи (в).

Графики 1, 2, 3 на фиг. 1 изображают поведение насыщенности вблизи выходного сечения ( $0 \leq 1-x \leq 10^{-2}$ ) соответственно в моменты времени  $t = 0.004, 0.008, 0.012$ . С помощью расчетов эмпирическим путем установлено, что во всем интервале времени  $10^{-3} \leq t \leq 1.2 \cdot 10^{-2}$  расхождение между сеточным и асимптотическим решениями становится заметнее при  $x \rightarrow 1$  и достигает максимального значения при  $x=1$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Временное поведение численного и приближенных решений в выходном сечении показано на фиг. 2. Главный вклад в асимптотику в указанном интервале времени вносит нулевое приближение, что вполне согласуется с физической интерпретацией уравнения (2.7), описывающего распределение насыщенности в условиях постоянства и малости скорости вытесняющей фазы

$$w_1 = \mu^n w F^0(\mu)$$

Следующее приближение учитывает линейное замедление скорости, вызванное накоплением воды вблизи выходного сечения, и практически полностью описывает решение исходной задачи.

Расчеты подтвердили предположение о непригодности полученного разложения в конечной стадии процесса, когда насыщенность  $S$  на выходе из образца приближается к  $S^*$ .

Авторы выражают глубокую признательность Л. А. Чудову за ценные указания при обсуждении работы.

Поступила 6 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.
3. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
4. Королев А. В., Шалимов Б. В., Швидлер М. И. Численное решение одномерных и двумерных задач фильтрации несмешивающихся жидкостей с учетом гравитационных и капиллярных сил. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1975.