МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1979

УДК 532.529:
533.697.4

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

В. П. СТУЛОВ

(Москва)

Рассматривается движение двухфазной среды при малой вязкости несущей компоненты. Используются уравнения, полученные в [1], с добавлением тензора вязких напряжений в жидкости. Метод пограничного слоя [2] позволяет получить асимптотические уравнения для пристеночной области. Эти уравнения имеют различный вид в зависимости от характерных значений безразмерных определяющих параметров.

1. Вывод и обоснование уравнений движения многофазных систем являются одним из трудных вопросов современной механики. Обычно эти уравнения получаются на основе представления о взаимодействующих и взаимопроникающих сплошных средах; при этом система частиц заменяется континуумом. Подобные уравнения с помощью законов сохранения массы и импульса получены, например, в [3] в частном случае двухфазной среды. После специального усреднения по объемам, содержащим достаточно большое количество частиц, уравнения принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0,\qquad \frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_s\mathbf{V}_s=0$$

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right]=\operatorname{div}(E-R)-\mathbf{F}$$

$$\rho_s\left[\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+(\mathbf{V}_s\cdot\nabla)\mathbf{V}_s\right]=\operatorname{div}(E_s-R_s)+\mathbf{F}\tag{1.1}$$

$$\mathbf{F}=\alpha(\rho)(\mathbf{V}-\mathbf{V}_s)+\rho_sC(\rho)\frac{d}{dt}(\mathbf{V}-\mathbf{V}_s)+\frac{\rho_s}{\rho_s^\circ}\operatorname{div}(E-R)$$

$$\mathbf{E}=-pU+\sigma,\ E_s=-p_sU+\sigma_s,\ \ (\rho_s/\rho_s^\circ)+(\rho/\rho^\circ)=1$$

Здесь E — усредненный тензор напряжений, R — тензор напряжений, учитывающий отличие локального поля скоростей от усредненного поля скоростей, $\mathbf{F}$ — сила взаимодействия фаз, U — единичный тензор, ρ° — физическая плотность фазы, индекс s относится к частицам, прочие обозначения общепринятые.

В уравнениях (1.1) сила взаимодействия фаз содержит три слагаемых. Первое описывает лобовое сопротивление частицы, которое при небольших относительных скоростях обтекания дается законом Стокса. Второе слагаемое соответствует присоединенной массе частицы, а третье учитывает воздействие крупномасштабных изменений напряжений в несущей фазе типа выталкивающей силы при наличии градиента давления. В [1], где рассматривается невязкая несущая фаза, вторым членом в силе $\mathbf{F}$ пренебрегается, а в третьем члене полагается $E=-pU$, $R\equiv0$. В данной работе относительно силы $\mathbf{F}$ принимаются те же допущения. Кроме того, как и в [1], предполагается, что среда частиц является разреженной, т. е. $E_s = R_s = 0$, а локальное поле скоростей жидкости слабо отличается от усредненного, т. е. $R=0$. Заметим, что вязкий тензор σ в третьем члене выражения для силы $\mathbf{F}$ опускается в силу недостаточной физической обоснованности этого слагаемого, хотя несущая фаза считается вязкой. Таким образом, в данной работе проводится изучение стационарного обтекания тел с помощью следующей системы уравнений:

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0,\quad \operatorname{div}\rho_s\mathbf{V}_s=0 \tag{1.2}$$

$$\rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=\operatorname{div}E-\mathbf{F},\quad \rho_s(\mathbf{V}_s\cdot\nabla)\mathbf{V}_s=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}=\alpha(\mathbf{V}-\mathbf{V}_s)-\frac{\rho_s}{\rho_s^\circ}\nabla p,\quad \frac{\rho_s}{\rho_s^\circ}+\frac{\rho}{\rho^\circ}=1$$

$$E=-pU+\sigma,\quad \alpha=4.5\mu/(a^2\rho_s^\circ)$$

Для компонент тензора вязких напряжений σ в (1.2) принимаются обычные формулы Навье — Стокса; μ — вязкость несущей фазы, a — радиус сферической частицы.

Будем рассматривать плоское движение среды, описываемой уравнениями (1.2), около твердых поверхностей. При постановке задачи следует учесть, что в общем случае обтекания в пренебрежении вязкостью несущей фазы контур обтекаемого тела не может служить одновременно линией тока несущей фазы и среды частиц. Это обстоятельство отмечено в [4]. Оно получает наглядное физическое истолкование, если уравнения (2.1) при $\sigma=0$ записать в естественной системе координат (линии тока s и нормали n) несущей фазы. Проекции на нормаль уравнений импульса принимают вид

$$w^2\frac{\partial\tau}{\partial s}+\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial n}+\alpha\frac{\rho_s}{\rho}w_s\sin(\tau-\tau_s)=0, \tag{1.3}$$

$$w\cos(\tau-\tau_s)\sin(\tau-\tau_s)\frac{\partial w_s}{\partial s}-w_s\sin^2(\tau-\tau_s)\frac{\partial w_s}{\partial n}-$$

$$-w_s^2\cos^2(\tau-\tau_s)\frac{\partial\tau_s}{\partial s}+w_s^2\sin(\tau-\tau_s)\cos(\tau-\tau_s)\frac{\partial\tau_s}{\partial n}-$$

$$-\frac{1}{\rho_s^\circ}\frac{\partial p}{\partial n}+\alpha w_s\sin(\tau-\tau_s)=0$$

Допустим, что на некоторой линии тока $n=\text{const}$ имеет место $\tau=\tau_s$, т. е. она является одновременно линией тока несущей фазы и частиц. Из (1.3) получим

$$w^2\frac{\partial\tau}{\partial s}+\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial n}=0,\quad w_s^2\frac{\partial\tau}{\partial s}+\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial n}=0 \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) удовлетворяются одновременно лишь в двух случаях: либо $\rho^\circ w^2=\rho_s^\circ w_s^2$, либо $\partial\tau/\partial s=\partial p/\partial n=0$, т. е. рассматриваемый участок линии тока является прямолинейным. Иначе говоря, в общем случае криволинейной обтекаемой поверхности условие непроницаемости для среды частиц не может быть удовлетворено решениями системы (1.2). По-видимому, указанная особенность сохранится и при малой вязкости несущей фазы.

Пусть однородный поток двухфазной смеси со скоростью V_∞ натекает на твердую поверхность. Перейдем к безразмерным переменным, принимая в качестве масштабов следующие величины: для x, y — характерную длину задачи l, для $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_s$ — величину V_∞, для ρ, $\rho_s - \rho^\circ$, для $p - \rho^\circ V_\infty^2$. Уравнения (1.2) запишем в криволинейной системе координат (xy), образованной контуром тела x и нормалью к нему y в некоторой точке O

$$
\begin{gathered}
\frac{R}{R+y}\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\rho v}{R+y}=0,\qquad \frac{R}{R+y}\frac{\partial\rho_s u_s}{\partial x}+\frac{\partial\rho_s v_s}{\partial y}+\frac{\rho_s v_s}{R+y}=0\\
\frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial u}+\frac{uv}{R+y}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}(u-u_s)=-\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}+\\
+\frac{1}{\rho}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{(R+y)^2}+\right.\\
\left.+\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{vRR'}{(R+y)^3}+\frac{yRR'}{(R+y)^3}\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{1}{\rho}\frac{1}{3\,\mathrm{Re}}\left[\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\right.\\
\left.+\frac{R}{R+y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{R}{(R+y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{vRR'}{(R+y)^3}+\frac{yRR'}{(R+y)^3}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\
\frac{R}{R+y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{u^2}{R+y}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}(v-v_s)=\\
=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial v}{\partial y}+\right.\\
\left.+\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{v}{(R+y)^2}+\frac{uRR'}{(R+y)^3}+\frac{yRR'}{(R+y)^3}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\\
+\frac{1}{\rho}\frac{1}{3\,\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{R}{R+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{R}{(R+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{v}{(R+y)^2}\right]\\
\frac{R}{R+y}u_s\frac{\partial u_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial u_s}{\partial y}+\frac{u_s v_s}{R+y}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u-u_s)=-b\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{R}{R+y}u_s\frac{\partial v_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial v_s}{\partial y}-\frac{u_s^2}{R+y}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(v-v_s)=-b\frac{\partial p}{\partial y}\\
\rho=1-b\rho_s,\qquad b=\frac{\rho^\circ}{\rho_s^\circ},\qquad \gamma=4.5\frac{l^2}{a^2}\frac{\rho^\circ}{\rho_s^\circ},\qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho^\circ l V_\infty}{\mu}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Здесь R — радиус кривизны тела в точке с координатами $(x, 0)$. Будем считать, что $R \sim dR/dx \sim 1$.

На бесконечности перед телом задаются скорость несущей фазы и частиц V_∞ и плотность частиц $\rho_{s\infty}$. На поверхности обтекаемого тела задаются условия непроницаемости и прилипания для несущей фазы

$$u=v=0,\ y=0 \tag{1.6}$$

Заметим, что недостатком данной постановки задачи является принятие закона Стокса во всей области течения вплоть до самой стенки. Некоторые данные, приведенные в книге [5], показывают, что при обтекании сферы вязкой жидкостью вблизи стенки сила взаимодействия изменяется. Кроме того, аппроксимация частиц неправильной формы сферами также ухудшается вблизи стенки, где частица попадает в поток с большим градиентом скорости. Поэтому приведенный ниже анализ можно рассматривать как начальное приближение; отмеченные здесь особенности требуют дальнейших исследований.

Получим асимптотическое решение поставленной задачи (1.5), (1.6) при $\mathrm{Re}\to\infty$. Здесь можно рассмотреть четыре различных случая.

2. Пусть $\mathrm{Re}\to\infty$. Обозначим $\varepsilon^2=1/\mathrm{Re}$. Уравнения (1.5) имеют малый параметр при старших производных. При $\varepsilon=0$ образуется невязка в граничном условии прилипания жидкости. Построим решение с точностью до членов порядка ε.

Гладкое решение в нулевом приближении описывается уравнениями (1.5) при $\varepsilon=0$. Они описывают движения жидкости и частиц, связанные между собой лишь за счет вытеснения жидкости из объема, занятого частицей. При $b=0$ движения фаз происходят полностью независимо, а траектории частиц – прямые линии.

Полное нулевое приближение будем искать в следующем виде:

$$u=u_e(x,y)+u^*(x,\eta),\quad v=v_e(x,y)+\varepsilon w^*(x,\eta),\quad \eta=y/\varepsilon \tag{2.1}$$

Путем анализа исходных уравнений (1.5) можно показать, что погранслойные поправки для остальных переменных течения тождественно равны нулю.

Подставляя (2.1) в (1.5), (1.6), переходя к переменной η, учитывая уравнения для гладкой части решения, разлагая гладкие функции в ряд по ε и отбрасывая члены порядка ε и выше, получаем систему уравнений и граничных условий для погранслойных поправок

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho_e(x,0)u^*]+\rho_e(x,0)\frac{\partial w^*}{\partial\eta}=0$$

$$[u_e(x,0)+u^*]\frac{\partial u^*}{\partial x}+u^*\frac{\partial u_e(x,0)}{\partial x}+ \tag{2.2}$$

$$+\left[w^*+\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}\right]\frac{\partial u^*}{\partial\eta}=\frac{1}{\rho_e(x,0)}\frac{\partial^2u^*}{\partial\eta^2}$$

$$u^*=-u_e(x,0),\quad w^*=0,\quad \eta=0;\quad u^*\to0,\quad \eta\to\infty \tag{2.3}$$

Здесь величина $\rho_e(x,0)$ соответствует гладкой части решения на стенке.

Для перехода к уравнениям пограничного слоя сделаем замену искомых функций

$$u^*(x,\eta)=u(x,\eta)-u_e(x,0),\quad w^*(x,\eta)=v(x,\eta)-\eta\,\partial v_e(x,0)/\partial y \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим

$$\frac{\partial[\rho_e(x,0)u]}{\partial x}+\rho_e(x,0)\frac{\partial v}{\partial\eta}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x}=\frac{1}{\rho_e(x,0)}\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}$$

Здесь и далее для переменных пограничного слоя используются те же обозначения, что и для переменных исходной задачи.

Эти уравнения описывают пограничный слой в несжимаемой жидкости с переменной плотностью $\rho_e(x,0)$ на внешней границе. Влияние частиц на структуру пограничного слоя проявляется в данном случае лишь через функцию $\rho_e(x,0)$.

3. Пусть $\mathrm{Re}\to\infty$, $\gamma\to\infty$ так, что $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. По-прежнему при $\varepsilon^2=1/\mathrm{Re}=0$ происходит вырождение исходной системы уравнений и образуется невязка в граничном условии прилипания жидкости. Уравнения гладкой части решения содержат член вида $(\gamma/\mathrm{Re})(V-V_s)$, т. е. вязкое взаимодействие между фазами имеет место во всем поле течения. Полное нулевое приближение к решению исходной задачи нужно искать в следующем виде:

$$\begin{gathered} u=u_e(x,y)+u^*(x,\eta),\quad v=v_e(x,y)+\varepsilon w^*(x,\eta),\quad p=p_e(x,y)\\ \rho=\rho_e(x,y),\quad u_s=u_{se}(x,y)+\varepsilon u_s^*(x,\eta),\quad v_s=v_{se}(x,y),\quad \rho_s=\rho_{se}(x,y) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Поправка для продольной компоненты скорости частиц u_s — малая величина, так как невязка для этой переменной отсутствует из-за отсутствия граничного условия. Кроме того, здесь подразумевается, что $v_{se}(x, 0) \neq 0$ в силу замечаний, сделанных при постановке задачи.

Применяя описанные выше преобразования, получим уравнения для погранслойных поправок

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho_e(x,0)u^*]+\rho_e(x,0)\frac{\partial w^*}{\partial \eta}=0$$

(3.2)
$$[u_e(x,0)+u^*]\frac{\partial u^*}{\partial x}+\left[\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+w^*\right]\frac{\partial u^*}{\partial \eta}+$$

$$+u^*\frac{\partial u_e(x,0)}{\partial x}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}(x,0)}{\rho_e(x,0)}u^*=\frac{1}{\rho_e(x,0)}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}$$

$$v_{se}(x,0)\frac{\partial u_s^*}{\partial \eta}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}u^*=0$$

Граничные условия для уравнений (3.2) имеют вид

$$u^*=-u_e(x,0),\quad w^*=0,\quad \eta=0$$
$$u^*\to 0,\quad u_s^*\to 0,\quad \eta\to\infty$$

Вначале из первых двух уравнений (3.2) определяются функции u^*, w^*. После этого функция u_s^* находится однократным интегрированием

$$u_s^*(x,\eta)=-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{1}{v\ (x\ 0)}\int_\eta^\infty u^*\,d\eta$$

Замена переменных приводит уравнения (3.2) к уравнениям пограничного слоя

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho_e(x,0)u]+\rho_e(x,0)\frac{\partial v}{\partial \eta}=0$$

(3.3)
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}(x,0)}{\rho_e(x,0)}[u-u_{se}(x,0)]=$$

$$=\frac{1}{\rho_e(x,0)}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$u_{se}(x,0)\frac{\partial u_{se}(x,0)}{\partial x}+v_{se}(x,0)\frac{\partial u_s}{\partial \eta}+b\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}[u-u_{se}(x,0)]=0$$

$$u^*(x,\eta)=u(x,\eta)-u_e(x,0),\quad w^*(x,\eta)=v(x,\eta)-\eta\partial v_e(x,0)/\partial y$$

$$u_s^*(x,\eta)=u_s(x,\eta)-\eta\partial u_{se}(x,0)/\partial y$$

Первые два уравнения (3.3) решаются независимо от последнего. Распределение u_s находится однократным интегрированием профиля скорости жидкости. Полученное решение справедливо в пределах пограничного слоя, так как при $y\to\infty$ интеграл расходится [1].

[1] Студент МГУ К. Я. Баскаков анализировал этот случай с учетом тензора вязких напряжений в выражении для силы взаимодействия F (1.1). Изменения уравнений (3.2) имеют непринципиальный характер, так как сводятся к некоторому изменению гладких коэффициентов во втором уравнении (3.2) и добавлению члена с $\partial^2 u^*/\partial\eta^2$ в третьем уравнении.

4. Пусть $\mathrm{Re}\to\infty$, $\gamma\to\infty$ так, что $(\gamma/\mathrm{Re})\to\infty$. Обозначим $\varepsilon=1/\mathrm{Re}$, $\gamma/\mathrm{Re}=1/\varepsilon$ (т. е. $\gamma=1/\varepsilon^2$). Преобразуем исходную систему уравнений, исключив из третьего и четвертого уравнений члены с вязким взаимодействием фаз с помощью пятого и шестого уравнений. Вводя в эти уравнения малый параметр ε, получим

$$(4.1)\quad \frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{R+y}+\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}+ +\frac{\rho_s}{\rho}\left(\frac{R}{R+y}u_s\frac{\partial u_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial u_s}{\partial y}+\frac{u_sv_s}{R+y}+b\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\varepsilon}{\rho}\Phi_x$$

$$\frac{R}{R+y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{u^2}{R+y}+\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\rho_s}{\rho}\left(\frac{R}{R+y}u_s\frac{\partial v_s}{\partial x}+ +v_s\frac{\partial v_s}{\partial y}-\frac{u_s^2}{R+y}+b\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\varepsilon}{\rho}\Phi_y$$

Здесь через Φ_x, Φ_y обозначена совокупность вязких членов.

Другие уравнения остаются прежними. Уравнения для гладкого решения получаются при $\varepsilon=0$

$$(4.2)\quad \frac{R}{R+y}\frac{\partial\rho_eu_e}{\partial x}+\frac{\partial\rho_ev_e}{\partial y}+\frac{\rho_ev_e}{R+y}=0,\qquad \frac{R}{R+y}\frac{\partial\rho_{se}u_e}{\partial x}+\frac{\partial\rho_{se}v_e}{\partial y}+\frac{\rho_{se}v_e}{R+y}=0$$

$$(\rho_e+\rho_{se})\left(\frac{R}{R+y}u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}+v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}+\frac{u_ev_e}{R+y}\right)+\frac{R}{R+y}\frac{\partial p_e}{\partial x}=0$$

$$(\rho_e+\rho_{se})\left(\frac{R}{R+y}u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}+v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}-\frac{u_e^2}{R+y}\right)+\frac{\partial p_e}{\partial y}=0,\qquad \rho_e=1-b\rho_{se}$$

Как показано в [1] уравнения (4.2) можно свести к уравнениям движения однофазной среды с плотностью $\rho_e+\rho_{se}$, постоянной вдоль каждой линии тока.

Из уравнений (1.5), (4.1) видно, что в нулевом приближении погранслойные поправки для компонент скорости жидкости и частиц тождественно совпадают. Поэтому полное нулевое приближение нужно искать в следующем виде:

$$u=u_e(x,y)+u^*(x,\eta),\quad v=v_e(x,y)+\sqrt{\varepsilon}w^*(x,\eta)$$

$$\rho=\rho_e(x,y)+\rho^*(x,\eta),\quad \rho_s=\rho_{se}(x,y)+\rho_s^*(x,\eta),\quad \eta=y/\sqrt{\varepsilon}$$

Обычные преобразования дают уравнения для погранслойных поправок

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_e(x,0)\rho^*+\rho_e(x,0)u^*+\rho^*u^*]+\left(\rho^*+\eta\frac{\partial\rho^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+ +\rho_e(x,0)\frac{\partial w^*}{\partial\eta}+\frac{\partial\rho^*w^*}{\partial\eta}=0$$

$$(4.3)\quad \frac{\partial}{\partial x}[u_e(x,0)\rho_s^*+\rho_{se}(x,0)u^*+\rho_s^*u^*]+\left(\rho_s^*+\eta\frac{\partial\rho_s^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+ +\rho_{se}(x,0)\frac{\partial w^*}{\partial\eta}+\frac{\partial\rho_s^*w^*}{\partial\eta}=0$$

$$(\rho^*+\rho_s^*)u_e(x,0)\frac{\partial u_e(x,0)}{\partial x}+[\rho_e(x,0)+\rho^*+$$

$$+\rho_{se}(x,0)+\rho^*]\left[(u_e(x,0)+u^*)\frac{\partial u^*}{\partial x}+u^*\frac{\partial u_e(x,0)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left(w^*+\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}\right)\frac{\partial u^*}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial^2u^*}{\partial\eta^2},\qquad \rho^*=-b\rho_s^*$$

Замена переменных приводит уравнения (4.3) к уравнениям пограничного слоя

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial\eta}=0,\qquad \frac{\partial\rho_s u}{\partial x}+\frac{\partial\rho_s v}{\partial\eta}=0$$

(4.4)

$$(\rho+\rho_s)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x}-\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$$

$$\rho=1-b\rho_s,\ u_s=u,\ v_s=v$$

$$u^*(x,\eta)=u(x,\eta)-u_e(x,0),\qquad w^*(x,\eta)=v(x,\eta)-\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}$$

$$\rho^*(x,\eta)=\rho(x,\eta)-\rho_e(x,0),\ \rho_s^*(x,\eta)=\rho_s(x,\eta)-\rho_{se}(x,0)$$

Систему (4.4) также можно привести к виду, соответствующему описанию движения однофазной среды с плотностью $\rho+\rho_s$.

5. В рассмотренных выше случаях неявно предполагалось, что нормальная составляющая скорости частиц на стенке в гладком решении отлична от нуля. Если это условие не выполняется, то решение, приведенное в п. 3, следует пересмотреть, так как при $v_{se}(x,0)=0$ из третьего уравнения (3.2) получаем $u^*\equiv0$. Из уравнений (1.4) вытекает, что в общем случае условие $\tau_e=\tau_{se}$ влечет за собой $\partial\tau_e/\partial s=0$, т. е. течение происходит около прямолинейного участка стенки. При подходящих условиях в начальном сечении на прямолинейном участке может реализоваться условие $\tau_e=\tau_{se}$, т. е. $v_{se}=0$. Простейшим течением такого типа, очевидно, является продольное обтекание пластины однородным двухфазным потоком; гладкое решение в этом случае соответствует постоянным значениям параметров.

Итак, пусть $\mathrm{Re}\to\infty$, $\gamma\to\infty$ так, что $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$ и $v_{se}=0$ при $y=0$. Полное нулевое приближение следует искать в виде:

$$u=u_e(x,y)+u^*(x,\eta),\qquad v=v_e(v,y)+\varepsilon w^*(x,\eta)$$

(5.1)

$$p=p_e(x,y),\qquad \rho=\rho_e(x,y)+\rho^*(x,\eta)$$

$$u_s=u_{se}(x,y)+u_s^*(x,\eta),\qquad v_s=v_{se}(x,y)+\varepsilon w_s^*(x,\eta)$$

$$\rho_s=\rho_{se}(x,y)+\rho_s^*(x,\eta)$$

Обычные преобразования исходных уравнений (1.5) при $R\to\infty$ дают уравнения для погранслойных поправок. Напомним, что при построении уравнений нулевого приближения отбрасываются все члены порядка ε и выше

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_e(x,0)\rho^*+\rho_e(x,0)u^*+\rho^*u^*]+$$

$$+\left(\rho^*+\eta\frac{\partial\rho^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+\rho_e(x,0)\frac{\partial w^*}{\partial\eta}+\frac{\partial\rho^*w^*}{\partial\eta}=0$$

(5.2)

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_{se}(x,0)\rho_s^*+\rho_{se}(x,0)u_s^*+\rho_s^*u_s^*]+$$

$$+\left(\rho_s^*+\eta\frac{\partial\rho_s^*}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y}+\rho_{se}(x,0)\frac{\partial w_s^*}{\partial\eta}+\frac{\partial\rho_s^*w_s^*}{\partial\eta}=0$$

$$[u_e(x,0)+u^*]\frac{\partial u^*}{\partial x}+\left[\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+w^*\right]\frac{\partial u^*}{\partial\eta}+u^*\frac{\partial u_e(x,0)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\rho_{se}(x,0)+\rho_s{}^*}{\rho_e(x,0)+\rho^*}-\frac{\rho_{se}(x,0)}{\rho_e(x,0)}\right][u_e(x,0)-u_{se}(x,0)]+$$

$$+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}(x,0)+\rho_s{}^*}{\rho_e(x,0)+\rho^*}(u^*-u_s{}^*)=\frac{1}{\rho_e(x,0)+\rho^*}\frac{\partial^2u^*}{\partial\eta^2}$$

$$[u_{se}(x,0)+u_s{}^*]\frac{\partial u_s{}^*}{\partial x}+\left[\eta\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y}+w_s{}^*\right]\frac{\partial u_s{}^*}{\partial\eta}+$$

$$+u_s{}^*\frac{\partial u_{se}(x,0)}{\partial x}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u^*-u_s{}^*)=0,\qquad \rho^*=-b\rho_s{}^*$$

Граничные условия для u^*, w^* совпадают с (2.3). Для остальных переменных граничные условия состоят в требовании, чтобы ρ^*, $u_s{}^*$, $\rho_s{}^*$ имели вид локальной функции, а $w_s{}^*$ – локальной функции плюс константа. Разумеется, следует поставить граничные условия на все искомые функции в начальном сечении прямолинейного участка.

Отметим, что число искомых функций превышает на единицу число уравнений (5.2). Недостающее уравнение следует получить из четвертого и шестого уравнений (1.5), все члены которых на функциях (5.1) имеют порядок ε.

Разумеется, чтобы сделать строгое суждение о построении приближенного решения исходной задачи, необходимо указать итерационный процесс построения любого члена разложения, доказать сходимость этого процесса и оценить близость к точному решению [2]. Чтобы понять необходимость использования в нулевом приближении уравнений, дающих малую невязку на произвольных функциях (5.1), обратимся к анализу первого приближения. Напомним, что в течении однофазной жидкости проекция уравнения импульса на ось y в первом приближении содержит лишь поправку для давления; остальные члены выражаются через уже известные поправки (и гладкие функции) нулевого приближения [6]. Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемой задаче с той существенной разницей, что теперь имеется два уравнения такого типа с единым давлением для двух фаз. Исключение давления из этих двух уравнений дает недостающую связь на поправки нулевого приближения.

Чтобы убедиться в этом, запишем решение исходной задачи в первом приближении

$$u=u_e+u^*+\varepsilon u_{1e}+\varepsilon u_1{}^*,\qquad v=v_e+\varepsilon v^*+\varepsilon v_{1e}+\varepsilon^2w_1{}^*$$
$$p=p_e+\varepsilon p_{1e}-\varepsilon^2p_1{}^*,\qquad \rho=\rho_e+\rho^*+\varepsilon\rho_{1e}+\varepsilon\rho_1{}^*$$
$$u_s=u_{se}+u_s{}^*-\varepsilon u_{s1e}+\varepsilon u_{s1}{}^*,\qquad v_s=v_{se}+\varepsilon v^*{}_s+\varepsilon v_{s1e}+\varepsilon^2w_{s1}{}^* \tag{5.3}$$
$$\rho_s=\rho_{se}+\rho_s{}^*+\varepsilon\rho_{s1e}+\varepsilon\rho_{s1}{}^*$$

Проекции уравнений импульса жидкости и частиц на ось y в нулевом и первом приближениях для гладкой части решения имеют вид

$$u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}+v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}}{\rho_e}(v_e-v_{se})=-\frac{\partial p_e}{\partial y}$$

$$u_e\frac{\partial v_{1e}}{\partial x}+u_{1e}\frac{\partial v_e}{\partial x}+v_e\frac{\partial v_{1e}}{\partial y}+v_{1e}\frac{\partial v_e}{\partial y}+$$

$$+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}}{\rho_e}\left[v_{1e}-v_{s1e}+\left(\frac{\rho_{s1e}}{\rho_{se}}-\frac{\rho_{1e}}{\rho_e}\right)(v_e-v_{se})\right]=\frac{\partial p_{1e}}{\partial y} \tag{5.4}$$

$$u_{se}\frac{\partial v_{se}}{\partial x}+v_{se}\frac{\partial v_{se}}{\partial y}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(v_e-v_{se})=-b\frac{\partial p_e}{\partial y}$$

$$u_{se}\frac{\partial v_{s1e}}{\partial x}+u_{s1e}\frac{\partial v_{se}}{\partial x}+v_{se}\frac{\partial v_{s1e}}{\partial y}+v_{s1e}\frac{\partial v_{se}}{\partial y}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(v_{1e}-v_{s1e})=-b\frac{\partial p_{1e}}{\partial y}$$

Подставляя (5.3) в четвертое и шестое уравнения (1.5) и делая обычные преобразования с учетом уравнений (5.4), получим главные части этих уравнений (члены порядка ε) в следующем виде (после сокращения на ε):

(5.5)
$$[u_e(x,0)+u^*]\frac{\partial v^*}{\partial x}+\left[\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}+v^*+v_{1e}(x,0)\right]\frac{\partial v^*}{\partial \eta}+$$
$$+\left[\eta\frac{\partial^2 v_e(x,0)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v_{1e}(x,0)}{\partial x}\right]u^*+\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}v^*+$$
$$+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\rho_{se}(x,0)+\rho_s^*}{\rho_e(x,0)+\rho^*}-\frac{\rho_{se}(x,0)}{\rho_e(x,0)}\right]\left[\eta\left(\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+(v_{1e}(x,0)-v_{s1e}(x,0))\right]+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_{se}(x,0)+\rho_s^*}{\rho_e(x,0)+\rho^*}(v^*-v_s^*)=$$
$$=-\frac{\partial p_1^*}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho_e(x,0)+\rho^*}\left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial \eta}\right)\right]$$
$$[u_{se}(x,0)+u_s^*]\frac{\partial v_s^*}{\partial x}+\left[\eta\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y}+v_s^*+v_{s1e}(x,0)\right]\frac{\partial v_s^*}{\partial \eta}+$$
$$+\left[\eta\frac{\partial^2 v_{se}(x,0)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v_{s1e}(x,0)}{\partial x}\right]u_s^*+\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y}v_s^*-$$
$$-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(v^*-v_s^*)=-b\frac{\partial p_1^*}{\partial \eta}$$

Легко видеть, что если оба уравнения (5.5) отнести к первому приближению, то получим два уравнения для одной неизвестной p_1^*. При этом главная часть одного из исходных уравнений (1.5) не обратится в нуль, т. е. нельзя строить приближенное решение всей задачи. Таким образом, исключая $\partial p_1^*/\partial\eta$ из уравнений (5.5), получаем недостающее уравнение для системы (5.2).

Замена переменных

(5.6)
$$u^*=u-u_e(x,0),\qquad w^*=v-\eta\frac{\partial v_e(x,0)}{\partial y}$$
$$\rho^*=\rho-\rho_e(x,0),\qquad u_s^*=u_s-u_{se}(x,0)$$
$$w_s^*=v_s-\eta\frac{\partial v_{se}(x,0)}{\partial y},\qquad \rho_s^*=\rho_s-\rho_{se}(x,0)$$

позволяет привести уравнения (5.2) к уравнениям пограничного слоя

(5.7)
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial \eta}=0,\qquad \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x}+\frac{\partial \rho_s v_s}{\partial \eta}=0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}(u-u_s)=-\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$u_s\frac{\partial u_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial u_s}{\partial \eta}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u-u_s)=-b\frac{\partial p_e(x,0)}{\partial x},\qquad \rho=1-b\rho_s$$

Недостающее уравнение пограничного слоя получим с помощью формул (5.6) из уравнений (5.5), исключив из них величину $\partial p_1^*/\partial\eta$. Получим

(5.8)
$$u_s\frac{\partial v_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial v_s}{\partial \eta}-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(v-v_s)=b\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}(v-v_s)\right]-$$
$$-\frac{b}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right]$$

Отмеченные здесь трудности формулировки уравнений пограничного слоя двухфазной среды на пластине (или прямолинейном участке обтекаемой поверхности) находят отражение в литературе в том смысле, что отсутствует единая точка зрения на замыкание уравнений. Так, в [7] предполагается, что плотности в пограничном слое постоянны; тогда отпадает необходимость в дополнительном уравнении (5.8). В [8] двухфазная среда рассматривается при условии $b=0$ и система уравнений замыкается уравнением (5.8) (при $b=0$), совпадающим в этом случае с проекцией на ось y уравнения импульса частиц. В [9] предполагается, что запаздывание поперечной компоненты скорости частиц в пограничном слое на пластине отсутствует, т. е. $v\equiv v_s$; в этом случае необходимость в уравнении (5.8) отпадает. Наконец, в книге [10] аналог уравнения (5.8) при $b=0$ также не рассматривается.

Автор благодарит А. Н. Крайко за обсуждение работы.

Поступила 30 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
3. *Anderson T. B., Jackson R.* A fluid mechanical description of fluidized beds. Industr. and Engng Chem. Fundament., 1967, vol. 6, No. 4.
4. *Рахматулин Х. А., Мамадалиев Н. А.* Двухскоростная теория обтекания тонкого профиля. ПМТФ, 1969, № 4.
5. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
6. *Чудов Л. А.* Высшие приближения в пограничном слое. В сб. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. вып. 2. М., МГУ, 1971.
7. *Chiu H. H.* Boundary layer flow with suspended particles. Princeton Univ. Dept. Aeronaut. Engng Rept., 1962, No. 620.
8. *Singleton R. E.* The compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate. Z. angew. Math. und Phys., 1965, Bd 16, Nr 4.
9. *Marble F. E.* Dynamics of a gas containing small solid particles. Combust. and Propuls. Oxford – London – New York – Paris, Pergamon Press, 1963.
10. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.