МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1979

УДК 532.517.4

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ И СЛАБЫЕ ЗАМЫКАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. А. ГОРОДЦОВ

(Москва)

В работах [1, 2] дан анализ автомодельного поведения свободных турбулентных течений при больших числа Рейнольдса. При этом под автомодельными (самоподобными) понимались такие распределения осредненных величин, которые зависят от координаты в направлении течения через две масштабные функции длины $l(x)$ и скорости $U(x)$.

При изучении течения за самодвижущимся телом [3] («следа с нулевым избыточным импульсом») потребовалось понятие об автомодельности более общего типа. Ниже с точки зрения автомодельности с одной масштабной функцией длины и различными амплитудными функциями для различных величин анализируются течения с произвольным (в том числе нулевым) дефицитом полного импульса относительно импульса внешнего потока. Автомодельные распределения удовлетворяют уравнениям для средней скорости и одноточечных моментов второго порядка лишь при условии, что между амплитудными функциями имеются определенные взаимосвязи («слабые замыкающие соотношения»). Соотношения оказываются различными в соответствии с разными доминирующими физическими процессами.

1. Автомодельные течения с градиентом давления. Рассмотрим в приближении пограничного слоя свободное турбулентное течение несжимаемой однородной жидкости со скоростью внешнего потока $U_0(x)$, зависящей от продольной координаты.

При автомодельном характере зависимости компонент средней скорости $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$ от координат x, y

$$\langle u\rangle=U_0(x)+U(x)f_1(\eta),\quad \langle v\rangle=V(x)f_2(\eta);\quad \eta\equiv y/l(x)$$

условие соленоидальности ($n=0$ — плоское течение, $n=1$ — осесимметричное течение)

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}+\frac{1}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}(y^n\langle v\rangle)=0$$

сводится к уравнению для универсальных функций $f_k(\eta)$ и условиям автомодельности

$$c_1(c_0+f_1)-\eta f_1'+c_2\left(f_2'+\frac{n}{\eta}f_2\right)=0 \tag{1.1}$$

$$c_k=\text{const};\quad c_0=\frac{dU_0}{dU},\quad c_1=\frac{d\ln U}{d\ln l},\quad c_2^{-1}=\frac{U}{V}\frac{dl}{dx}$$

Наличие внешнего потока приводит к большой роли конвекции, а требование ее автомодельности дополнительно сужает класс рассматриваемых течений.

Для автомодельности конвекции средней скорости, как видно из выражения

$$L\langle u\rangle = U_0 U \frac{d\ln l}{dx}[(1+cf_1)(c_0c_1+c_1f_1-\eta f_1')+cc_2f_1'f_2],$$

$$L\equiv\langle u\rangle\frac{\partial}{\partial x}+\langle v\rangle\frac{\partial}{\partial y}$$

необходимо, чтобы кроме (1.1) выполнялось соотношение $c\equiv U/U_0=\text{const}$.

Автомодельность конвекции любой другой осредненной характеристики $\langle\varphi\rangle$ означает

$$L\langle\varphi\rangle = U_0\Phi\frac{d\ln l}{dx}[(1+cf_1)(m\varphi-\eta\varphi')+cc_2f_2\varphi']$$

$$\langle\varphi\rangle=\Phi(x)\varphi(\eta),\qquad \frac{d\ln\Phi}{d\ln l}=m=\text{const}$$

т. е. амплитудные функции $\Phi(x)$ должны степенным образом выражаться через $l(x)$ или $U(x)$

$$\Phi(x)\sim l^m(x)\sim[U(x)]^{m/c_1} \qquad (1.2)$$

Это касается прежде всего одноточечных моментов пульсаций компонент скорости u', v', w'

$$\langle u'v'\rangle=\tau(x)f_3(\eta),\qquad \langle u'^2-v'^2\rangle=\sigma(x)f_4(\eta)$$

$$2\langle e\rangle=\langle u'^2+v'^2+w'^2\rangle=2E(x)f_5(\eta),\ldots$$

причем в дальнейшем предполагается также, что компоненты нормальных напряжений Рейнольдса $\langle u'^2\rangle$, $\langle v'^2\rangle$, $\langle w'^2\rangle$ имеют одинаковые амплитудные зависимости от продольной координаты, в то время как разность нормальных напряжений $\langle u'^2-v'^2\rangle$, характеризующая анизотропию потока, может меняться, вообще говоря, иначе (турбулентность может приближаться к изотропному состоянию быстрее, чем вырождаться в целом).

В формуле (1.2) и далее знак эквивалентности можно понимать в смысле асимптотической эквивалентности, эквивалентности по порядку величины, что отражает существо автомодельных решений как промежуточных асимптотик [4]. Рассматриваемые распределения могут быть автомодельными на столь больших расстояниях, чтобы не были уже существенны подробности начальных распределений, и одновременно настолько малых, чтобы еще не была важна вязкая диффузия.

Анализ автомодельности уравнений по существу совпадает с асимптотическим сравнением величин существенных членов в них. Порядок слагаемых оценивается по амплитудным функциям, зависящим от большого параметра x, а $f_k(\eta)\sim 1$.

В уравнении движения (плотность полагаем равной единице)

$$L\langle u\rangle+\frac{1}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}(y^n\langle u'v'\rangle)+\frac{\partial}{\partial x}\langle u'^2-v'^2\rangle=U_0\frac{dU_0}{dx} \qquad (1.3)$$

важную роль играют конвекция и сдвиговое напряжение Рейнольдса как ответственные за продольный и поперечный перенос импульса. Будем сначала предполагать, что разность нормальных напряжений также вносит весомый вклад в общий баланс (см. далее). Сопоставляя амплитуды различных членов уравнения $U_0Ud\ln l/dx$, τ/l, $\sigma d\ln/dx$, U_0dU_0/dx, приходим к новым условиям (на каждом этапе принимаются также во внимание найденные ранее ограничения) и уравнениям для универсальных функций $f_k(\eta)$

$$\frac{U_0U}{\tau}\frac{dl}{dx}=\frac{1}{c_3}=\text{const},\qquad \frac{\sigma}{U_0U}=c_4=\text{const} \qquad (1.4)$$

$$c_1f_1-\eta f_1'+c_3\left(f_3'+\frac{n}{\eta}f_3\right)+c_4(c_1f_4-\eta f_4')+$$
$$+c(c_0c_4f_1+c_1f_1^2-\eta f_1f_1'+c_2f_2f_1'+c_0c_1c_4f_4)=0$$

Из (1.2) и (1.4) следует, что масштабные функции $l(x)$ и $\Phi(x)$ могут степенным или экспоненциальным образом зависеть от $x-x_0$ (постоянная x_0 — виртуальное начало автомодельного течения — отражает особенности перехода от истинных начальных условий к автомодельным). В дальнейшем выясняется, что здесь допустимы только степенные зависимости.

В уравнении пульсационной энергии, записанном в приближении пограничного слоя с пренебрежением вязкой диффузией и второй разностью нормальных напряжений $\langle v'^2-w'^2\rangle$, разные слагаемые

$$\text{(1.5)}\qquad L\langle e\rangle+\frac{1}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}[y^n\langle v'(e+p')\rangle]+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\langle u'v'\rangle+$$
$$+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}\langle u'^2-v'^2\rangle=-\nu\left\langle\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\right\rangle$$

ответственны за различные физические процессы и в предположении их важности с помощью амплитудных оценок $U_0Ed\ln l/dx$, j_1/l, $U_0U^2d\ln l/dx$, ε найдем

$$\text{(1.6)}\qquad c_k=\text{const},\quad c_5=\frac{E}{U^2},\quad c_6=\frac{j_1}{\varepsilon l},\quad \frac{1}{c_7}=\frac{U_0U^2}{\varepsilon}\frac{d\ln l}{dx}$$
$$c_5(1+cf_1)(2c_1f_5-\eta f_5')+c_2c_5f_2f_5'+c_6c_7\left(f_6'+\frac{n}{\eta}f_6\right)+$$
$$+c_3f_1'f_3+c_4(c_0c_1+c_1f_1-\eta f_1')f_4=-c_7f_7$$
$$\langle v'(e+p')\rangle=j_1(x)f_6(\eta),\qquad \left\langle\nu\left(\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\right)^2\right\rangle=\varepsilon(x)f_7(\eta)$$

Пренебрегая вязкой диффузией, диссипацией (при больших числах Рейнольдса турбулентная диффузия гораздо больше молекулярной и диссипативные мелкомасштабные пульсации близки к изотропным движениям, для которых перекрестные диссипативные процессы отсутствуют, а диагональные одинаковы) и корреляцией пульсаций скорости со второй разностью нормальных напряжений $\langle u'(v'^2-w'^2)\rangle$ в уравнении для сдвигового напряжения

$$\text{(1.7)}\qquad \left(L-\frac{n}{y}\langle v\rangle\right)\langle u'v'\rangle+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\langle v'^2\rangle+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\langle u'(p'+v'^2)\rangle=\left\langle p'\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\right\rangle$$

для амплитуд слагаемых имеем $U^3(dl/dx)^2/l$, U^3/l, j_2/l, π_1, если $\langle u'(v'^2+p')\rangle\sim j_2(x)$, $\langle p'(\partial u'/\partial y+\partial v'/\partial x)\rangle\sim\pi_1(x)$. При одинаковой важности слагаемых получим

$$\frac{dl}{dx}=\text{const},\quad c_k=\text{const},\quad c_8=\frac{j_2}{U^3},\quad c_9=\frac{\pi_1 l}{U^3}$$

Предположение о большой величине порождения напряжений Рейнольдса играет здесь важную роль (ср. также следующие разделы), поскольку именно сопоставление конвекции и порождения дает

(1.8) $l(x)\sim x-x_0$

а сравнимость порождения с другими процессами приводит к тому, что $j_2(x)$, $\pi_1(x)$ выражаются как целые степени $U(x)$, $l(x)$.

Из уравнения для $\langle u'^2\rangle$ в случае автомодельных решений имеем

(1.9) $$\left(\frac{1}{2}L+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}\right)\langle u'^2\rangle+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\langle u'v'\rangle+\frac{1}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}(y^n\langle v'u'^2/2\rangle)=$$
$$=\left\langle p'\frac{\partial u'}{\partial x}\right\rangle-\frac{1}{3}\nu\left\langle\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\right\rangle$$
$$\langle v'u'^2\rangle\sim U^3(x),\qquad\left\langle\frac{p'\partial u'}{\partial x}\right\rangle\sim\frac{U^3(x)}{l(x)}$$

Наконец, в приближении пограничного слоя и пренебрежении вязкой диффузией, диссипацией и членом $\langle u'(v'^2-w'^2)\rangle$ уравнение для первой разности нормальных напряжений можно записать в виде

(1.10) $$\left(\frac{1}{2}L+\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right)\langle u'^2-v'^2\rangle+\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right)\langle u'^2\rangle+$$
$$+\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\langle u'v'\rangle=-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle v'\left(\frac{u'^2-v'^2}{2}-p'\right)\right\rangle-$$
$$-\frac{n}{y}\left\langle v'\frac{u'^2+v'^2}{2}\right\rangle+\left\langle p'\left(\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\right\rangle$$

Важность порождения в этом уравнении согласуется с требованиями (1.4). Наоборот, если предположить его малость, то из уравнения будет следовать ограничение $\sigma\ll U^2$, согласно которому нужно опустить члены с нормальными напряжениями в уравнениях (1.3), (1.5). При этом других изменений в предыдущем не потребуется.

Таким образом, в случае с $U_0(x)\neq\text{const}$ имеем

(1.11) $V\sim U\sim U_0,\quad \sigma\leqslant E\sim\tau\sim U^2,\quad j_1\sim j_2\sim\varepsilon l\sim\pi_1 l\sim U^3,\ldots$

т. е. анализ обобщенной автомодельности свелся к анализу автомодельности в обычном смысле [1, 2], при котором через две масштабные функции длины $l(x)$ и скорости $U(x)$ амплитуды существенных величин выражаются в соответствии с требованиями размерности.

Соотношением (1.8) определена функция $l(x)$. Функция $U(x)$ находится с помощью уравнения для полного количества движения, получаемого интегрированием (1.3)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty[\langle u\rangle(\langle u\rangle-U_0)+\langle u'^2-v'^2\rangle]y^n\,dy+\frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty(\langle u\rangle-U_0)y^n\,dy=0$$

После подстановки автомодельных распределений находим

$$U^{2+H}l^{1+n}=\text{const},\qquad\frac{1}{H}\int_0^\infty f_1\,d\eta^{1+n}=\int_0^\infty[(1+cf_1)f_1+c_4f_4]d\eta^{1+n}=\text{const}$$

что с учетом (1.8) дает

$$U(x)\sim U_0(x)\sim(x-x_0)^{-s},\qquad s=\frac{1+n}{2+H}$$

Если дефект скорости и разность нормальных напряжений малы, то $H=1$ и степень s оказывается не зависящей от функций распределения $f_1(\eta)$, $f_4(\eta)$.

2. Течение с малой разностью нормальных напряжений при постоянном внешнем потоке. При постоянной скорости внешнего потока $U_0=\text{const}$ требование п. 1 $U/U_0=\text{const}$ выполняется при $U=\text{const}$, что реализуется лишь в слое смешения двух однородных потоков.

Однако автомодельность возможна и при $U(x)\neq\text{const}$, если $U(x)\ll U_0$ и в уравнениях можно пренебречь слагаемыми с малым параметром $c=U/U_0$. Будем предполагать это выполненным.

Автомодельность уравнения несжимаемости и конвективного переноса приводит теперь к условиям

$$(2.1)\qquad \frac{U}{V}\frac{dl}{dx}=\text{const},\qquad \frac{d\ln U}{d\ln l}=\text{const},\qquad \frac{d\ln\Phi}{d\ln l}=\text{const}$$

а конвективный оператор L принимает упрощенный вид $U_0\partial/\partial x$.

Из уравнения сохранения количества движения следует:

$$(2.2)\qquad \frac{U_0U}{\tau}\frac{dl}{dx}=\text{const},\qquad \sigma\ll U_0U$$

если перенос импульса за счет нормальных напряжений мал.

Амплитудами членов уравнения энергии будут

$$U_0E\frac{d\ln l}{dx},\quad \frac{j_1}{l},\quad U_0U^2\frac{d\ln l}{dx},\quad U_0\frac{d\ln l}{dx},\quad \varepsilon$$

В силу неравенства $\sigma\ll U_0U$ порождение энергии нормальными напряжениями мало. Считая остальные члены уравнения одинаково важными, получим

$$\frac{E}{U^2}=\text{const},\qquad \frac{j_1}{\varepsilon l}=\text{const},\qquad \frac{U_0U}{\varepsilon}\frac{d\ln l}{dx}=\text{const}$$

В уравнении для сдвигового напряжения (1.7) мало слагаемое $\langle v\rangle\langle u'v'\rangle/y\sim U_0(Udl/dx)^2/l$. Сравнение амплитуд других слагаемых $U_0^2U(d\ln l/dx)^2/l$, U^3/l, j_2/l, π_1, предполагаемых важными, дает условия

$$(2.3)\qquad \frac{U_0}{U}\frac{dl}{dx}=\text{const},\qquad \frac{j_2}{U^3}=\text{const},\qquad \frac{\pi_1 l}{U^3}=\text{const}$$

Наиболее интересным следствием уравнения (1.10) будет $\sigma/U^2=\text{const}$ при сопоставимости вкладов конвекции и порождения.

Таким образом, в случае $U(x)\ll U_0=\text{const}$ связи между амплитудными функциями обобщенных автомодельных распределений оказываются в основном аналогичными тем, что найдены в предыдущем разделе

$$(2.4)\qquad V\ll U,\quad E\sim\tau\sim\sigma\sim U^2,\quad j_1\sim j_2\sim\varepsilon l\sim\pi_1 l\sim U^3,\ldots$$

хотя теперь $dl/dx\neq\text{const}$. Вместо (1.8) из (2.3) следует:

$$(2.5)\qquad U\sim U_0dl/dx$$

Учитывая, что подобное поведение реализуется в течениях с ненулевым избыточным импульсом, второе соотношение для $U(x)$ и $l(x)$ можно найти из уравнения сохранения полного количества движения

$$(2.6)\qquad Ul^{1+n}=\text{const}$$

Это соотношение не содержит H, поскольку при $U \ll U_0$ параметр H обращается в единицу, и из (2.5), (2.6) следует:

$$l\sim(x-x_0)^{1/(2+n)},\quad U\sim(x-x_0)^{-1+1/(2+n)}$$

3. Автомодельные течения с большими нормальными напряжениями. В рассматриваемом случае $U_0=\mathrm{const}\gg U(x)\neq\mathrm{const}$ и по-прежнему верно (2.1).

В уравнении количества движения по предположению теперь важны нормальные напряжения и вместо (2.2) получим

$$\frac{U_0U}{\tau}\frac{dl}{dx}=\mathrm{const},\qquad \frac{\sigma}{U_0U}=\mathrm{const} \tag{3.1}$$

Это меняет баланс пульсационной энергии. Слагаемые, ответственные за порождение энергии в (1.5), имеют амплитуду $U_0U^2d\ln l/dx$, в то время как амплитуды других слагаемых — $U_0Ed\ln l/dx$, j_1/l, ε. Поскольку $E\gtrsim\sigma\sim U_0U\gg U^2$, то порождение пренебрежимо мало по сравнению с конвективным снабжением и уравнение энергии примет упрощенный вид

$$U_0\frac{\partial\langle e\rangle}{\partial x}+\frac{1}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}(y^n\langle v'(e+p')\rangle]=-\nu\left\langle\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\right\rangle \tag{3.2}$$

Турбулентность с таким балансом энергии реализуется, как известно [3], в следе за телом при нулевом дефиците полного импульса течения.

Все члены уравнения (3.2) существенны, поскольку описывают важные процессы преобразования энергии, и условиями автомодельности будут

$$\frac{U_0E}{\varepsilon}\frac{d\ln l}{dx}=\mathrm{const},\qquad \frac{j_1}{\varepsilon l}=\mathrm{const} \tag{3.3}$$

Предполагая соизмеримость различных слагаемых в уравнении для сдвигового напряжения, за исключением очевидно малого $n\langle v\rangle\langle u'v'\rangle/y\sim nU_0(Udl/dx)^2/l$, и используя оценки амплитуд $U_0^2U(dl/dx)/l$, EU/l, j_2/l, π_1, получим

$$\frac{U_0^2}{E}\left(\frac{dl}{dx}\right)^2=\mathrm{const},\qquad \frac{j_2}{EU}=\mathrm{const},\qquad \frac{\pi_1 l}{EU}=\mathrm{const} \tag{3.4}$$

Как и прежде, наиболее важным здесь является предположение об относительно большой величине порождения касательных напряжений.

Соотношения (3.1), (3.3), (3.4) можно переписать в виде оценок и соотношения для dl/dx

$$\sigma\sim U_0U,\quad \tau\sim UE^{1/2},\quad j_1\sim\varepsilon l\sim E^{3/2},\quad j_2\sim\pi_1 l\sim EU \tag{3.5}$$

$$U_0\frac{dl}{dx}E^{-1/2}=\mathrm{const}$$

Эти оценки не могут быть получены на основании одних соображений размерности, так как содержат размерную постоянную U_0.

В отличие от предыдущих разделов здесь существенные третьи моменты могут изменяться с разной скоростью, например

$$\langle v'(e+p')\rangle\sim j_1(x),\qquad \langle u'(v'^2+p')\rangle\sim j_2(x),\qquad j_2/j_1\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

как это следует из (3.5) и оценки $E\gtrsim\sigma\sim U_0U$.

Другой отличительной особенностью является более быстрое вырождение сдвиговых напряжений по сравнению с нормальными

$$\tau/\sigma\sim E^{1/2}U_0^{-1}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

В уравнении для $\langle u'^2\rangle$ так же, как и в уравнении для $2\langle e\rangle=\langle u'^2+v'^2+w'^2\rangle$, порождение мало. Сравнение остальных членов уравнения (1.9) дает

$$\langle v'u'^2\rangle\sim E^{3/2}, \qquad \left\langle p'\frac{\partial u'}{\partial x}\right\rangle\sim\pi_2\sim E^{3/2}/l$$

Рассмотрим уравнение для первой разности нормальных напряжений (1.10). С помощью (3.5) нетрудно убедиться в малости порождения по сравнению с конвекцией, и уравнение (1.10) можно упростить

$$U_0\frac{\partial}{\partial x}\langle u'^2-v'^2\rangle+\frac{\partial}{\partial y}\langle v'(u'^2-v'^2-2p')\rangle+$$

$$+\frac{n}{y}\langle v'(u'^2+v'^2)\rangle=2\left\langle p'\left(\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\right\rangle$$

Сопоставление конвективного слагаемого со слагаемым $n\langle v'(u'^2+v'^2)\rangle/y$ показывает, что в осесимметричном случае $\sigma\sim E$. В плоском случае указанное слагаемое выпадает из уравнения и подобная оценка становится менее очевидной (она получается, если $\langle v'(2p'+v'^2-u'^2)\rangle\sim(v'(p'+e)\rangle$, или $\langle p'(\partial u'/\partial x-\partial v'/\partial y)\rangle\sim\langle p'\partial u'/\partial x\rangle$).

Соотношения (3.5) позволяют выразить амплитуды различных физических величин в виде полуцелых степеней $E(x)$ или $U(x)$ и целых степеней $l(x)$. Условию из (3.5) можно теперь придать вид соотношения (ср. (2.5))

$$U\sim U_0(dl/dx)^2 \tag{3.6}$$

связывающего две масштабные функции $U(x)$, $l(x)$.

В рассматриваемом случае нулевого избыточного импульса интегральное уравнение сохранения количества движения не приводит (ср. предыдущие разделы) к дополнительной связи $U(x)$ с $l(x)$. Для определения асимптотического вида амплитудных функций и $l(x)$ теперь необходимо (и достаточно) найти одну из них экспериментально или из других теоретических соображений. Если найден показатель степени p для $l(x)\sim\sim(x-x_0)^p$, то из (3.5), (3.6) и $\sigma\sim E$ получаем

$$U\sim E\sim\sigma\sim(x-x_0)^{-2(1-p)},\quad \tau\sim(x-x_0)^{-3(1-p)},\quad \varepsilon\sim(x-x_0)^{-3+2p} \tag{3.7}$$

Отметим, что в рамках проведенного здесь анализа обобщенной автомодельности и моментные интегральные соотношения в случае нулевого избыточного импульса не приводят к дополнительной информации (в этом существенное различие с результатами, излагаемыми в [6–8]).

Экспериментальным данным [3, 9] хорошо соответствует значение $p={}^1/_4$. С другой стороны, в [10] указывается на различие в развитии следа за самодвижущимися телами с винтовыми и реактивными движителями.

Аналогичное описание следа с нулевым избыточным импульсом дано в [5]. Однако в отличие от изложенного автор [5] ограничился уравнениями импульса и пульсационной энергии и поэтому был вынужден ввести дополнительные предположения $\sigma\sim E$, $j_1\sim\varepsilon l\sim E^{3/2}$.

Несколько другой анализ специального типа обобщенной автомодельности был проведен в [11, 12]. Ограничившись уравнениями несжимаемости и сохранения количества движения, автор [11, 12] определил несколько параметров для следа с нулевым избыточным импульсом сравнением с экспериментальными данными работы [3] (в частности, так было выбрано $p={}^1/_4$). Некоторое расхождение между теоретическим предсказанием и экспериментальными данными, по-видимому, связано с неучетом в [11, 12] эффекта нормальных напряжений (см. третье слагаемое в (1.3)).

Наконец, близкие результаты получены также в работе [13], в которой использованы традиционные гипотезы замыкания для вторых и третьих моментов и дополнительное уравнение для масштаба длины. Единственным отличием результатов в [13] от соотношений (3.7) является несколько более быстрое убывание разности нормальных напряжений по сравнению с пульсационной энергией.

В заключение вопрос о связях и различиях между традиционными гипотезами замыкания и «слабыми замыкающими соотношениями» рассмотрим на примере традиционного замыкающего уравнения

$$\nu\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\beta}\right)^2\right\rangle=k_d\frac{\langle e\rangle^{3/2}}{l}$$

выражающего диссипацию через энергию и характерный масштаб турбулентных пульсаций.

Из этой формулы в случае обобщенных автомодельных распределений рассмотренного выше типа следует «слабое замыкающее соотношение» между амплитудными функциями $\varepsilon(x)$, $E(x)$ (ср. (1.11), (2.4), (3.5)) и дополнительное уравнение связи между функциями распределения $f_k(\eta)$

$$\varepsilon=\frac{c_d E^{3/2}}{l},\qquad f_7(\eta)=\frac{k_d}{c_d}[f_5(\eta)]^{3/2}$$

Аналогично и другие гипотезы замыкания приводят к слабым замыкающим соотношениям и дополнительным уравнениям.

Однако, как хорошо известно, традиционные гипотезы замыкания не являются достаточно обоснованными, а некоторые приводят к появлению противоречий в теории (например, гипотеза квазинормальности).

Из приведенного примера очевидно, что слабые замыкающие соотношения могут выполняться в гораздо менее жестких предположениях, чем традиционные замыкающие соотношения. Более того, как видно из предыдущего, они следуют из требования совместности системы основных уравнений (цепочки уравнений Фридмана – Келлера) по отношению к автомодельным решениям и по существу отражают некоторую самосогласованность турбулентных автомодельных полей.

Поступила 17 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Таунсенд А. А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Newman B. G.* Turbulent jets and wakes in a pressure gradient. In: Fluid Mechanics of Internal Flow. Amsterdam – London – New York, Elsevier, 1967.
3. *Naudascher E.* Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence. J. Fluid. Mech., 1965, vol. 22, pt 4.
4. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике. Усп. матем. н., 1971, т. 26, № 2.
5. *Сабельников В. А.* О некоторых особенностях турбулентных течений с нулевым избыточным импульсом. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 4.
6. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
7. *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
8. *Tennekes H., Lumley J. L.* A first course in turbulence. Cambridge, MIT press., 1972.
9. *Мэррит.* Развитие и коллапс следа в стратифицированном потоке. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 7.
10. *Шец, Якубовский.* Экспериментальное исследование турбулентного следа за тонкими телами, снабженными движителем. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 12.
11. *Корнеев А. И.* Вырождение турбулентных осесимметричных спутных струй. Науч. тр. НИИ механ. МГУ, 1974, № 31.
12. *Корнеев А. И.* Гипотезы подобия в теории турбулентных спутных струй. В сб. «Турбулентные течения». М., «Наука», 1977.
13. *Finson M. L.* Similary behaviour of momentumless turbulent wakes. J. Fluid Mech., 1976, vol. 71, pt 3.