

О ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
СОВМЕСТНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ
ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

В. В. ГУГУЧКИН, Е. А. ДЕМЕХИН, Г. Н. КАЛУГИН,
Э. Э. МАРКОВИЧ, В. Г. ПИКИН

(Краснодар)

Задача о линейной устойчивости слоя жидкости, увлекаемого газом, исследовалась для некоторых частных случаев в [1-7]. В [8] линейная задача решалась численно и решение сравнивалось с некоторыми аналитическими решениями для частных случаев течения. В данной работе более широко представлены результаты линейного анализа; ставится и численно решается задача о конечно-амплитудной устойчивости пленки; результаты линейного и нелинейного анализа сравниваются с данными проведенного авторами эксперимента и данными других исследователей.

1. На плоскости $y=0$ течет невозмущенная пленка жидкости $0 < y < h$. В полосе $h < y < 2H+h$ течет турбулентный газовый поток. В газе принимается «квазиламинарная» модель [9]. Экспериментальное подтверждение применимости квазиламинарной модели к данной задаче дано в [10, 11]. (Если неслучайный сигнал в турбулентной среде распространяется со скоростью порядка характерной скорости осредненного течения газа, то квазиламинарный подход неверен [12, 13]. Этот подход неприемлем для случая морских волн [14].) Для достаточно толстых пленок турбулентные выбросы и пульсации в газе могут возбуждать в пленке сложную систему движений, накладываемых на основное волновое течение. Анализ этих движений посвящена работа [15]. В данной работе эти движения обсуждаться не будут.

Как и в [6], величины, относящиеся к газу, будут обозначаться заглавными латинскими буквами или греческими с индексом g ; величины, относящиеся к жидкости, — малыми латинскими или греческими с индексом l . Течение предполагается плоским. Невозмущенный профиль течения пленки линеен. Пусть от основного решения отбрасывается автоколебательный волновой режим. Граничные условия на возмущенной поверхности раздела имеют вид

$$U=u, \quad V=v, \quad v=(c-u)\partial\xi/\partial x \\ -\rho n^i + \tau_i^{im} n_m + \sigma K(\xi) n^i = -P n^i + \tau_g^{im} n_m \quad (i, m=1, 2)$$

Здесь $K(\xi)$ — кривизна поверхности раздела ξ ; σ — коэффициент поверхностного натяжения; n^i — составляющие вектора нормали к поверхности раздела; (u, v) , (U, V) — проекции скоростей на оси x, y соответственно в жидкости и в газе; c — фазовая скорость волны.

Далее величины будут считаться безразмерными. В качестве характерных величин в газе приняты невозмущенное касательное напряжение на поверхности раздела τ_0 , волновое число k , плотность ρ_g . В жидкости величины отнесены к невозмущенным скорости на поверхности раздела u_0 , толщине пленки h , плотности ρ .

Введем функции тока газа и жидкости F, f из уравнений

$$v = -\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad u = \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad U = \frac{\partial F}{\partial Y},$$

$$\theta = X - CT = \alpha_l(x - ct)$$

Представим ξ, f, F, c в виде

$$\xi_l = 1/2 \operatorname{Re}[\varepsilon_l^n \xi_l^{(mn)} \exp(im\theta)], \quad \xi_g = 1/2 \operatorname{Re}[\varepsilon_g^n \xi_g^{(mn)} \exp(im\theta)] \\ c = \varepsilon_l^n c^{(n)}, \quad C = \varepsilon_g^n C^{(n)}$$

Суммирование предполагается по повторяющимся индексам при $m \leq n$. Берутся $(mn) = (00), (11), (20), (22), (31)$. Здесь ε_g и ε_l — некоторые характерные амплитуды возмущения, пока выбранные с точностью до постоянного множителя. По определению ξ_l и ξ_g имеем $h\xi_l = \xi_g/k$. Выберем $\xi_l^{(11)} = \xi_g^{(11)} = 1$; заметим, что $hk = \alpha_l$, тогда из (1.1)–(1.3) получим

$$\varepsilon_g = \alpha_l \varepsilon_l, \quad \xi_g^{(kn)} = \alpha_l^{1-n} \xi_l^{(kn)}$$

Выражения для F, f, ξ и c подставляются в уравнения движения и граничные условия. Для газа берутся уравнения Навье — Стокса. Как указывалось выше, члены от взаимодействия турбулентных пульсаций и неслучайного возмущения при этом отбрасываются. Условия на границе раздела переносятся на невозмущенную поверхность $y=0$; входящие в граничные условия функции раскладываются в ряд Тейлора вплоть до третьего порядка по ε включительно. Для решения нелинейной задачи применялась методика Стюарта — Уотсона [16]. По физическому смыслу в задаче можно считать заданным или среднюю толщину, или средний расход. В данной работе принималось, что задана толщина пленки. (Таким образом, нелинейные эффекты меняют средний расход газа и жидкости, оставляя толщину пленки той же, что и в невозмущенном случае.) Тогда для различных m и n получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями на стенках и поверхности раздела.

Задача в газе при пренебрежении членами порядка $\mu_g/\mu_l \ll 1$ может решаться отдельно от задачи в пленке, как и в линейном случае [8]. Беря в качестве граничных условий условия прилипания на верхней стенке и кинематические условия равенства компонент скоростей газа и жидкости на поверхности, получим, отбрасывая члены $O(\mu_g/\mu_l)$

$$Y=2H: F^{(mn)} = DF^{(mn)} = 0$$

$$L(1, F^{(11)}) = 0, \quad Y=0: F^{(11)} = 0, \quad DF^{(11)} + R_g = 0$$

$$L(2, F^{(22)}) = iR_g(D^2 F^{(11)} DF^{(11)} - F^{(11)} D^3 F^{(11)})$$

$$Y=0: F^{(22)} = 1/2 R_g, \quad DF^{(22)} + R_g \xi_g^{(22)} = -D^2 F^{(11)}$$

$$L(1, F^{(13)}) = -iR_g(2D^3 F^{*(11)} F^{(22)} - D^3 F^{(22)} F^{*(11)} - 2DF^{*(11)} D^2 F^{(22)} + \\ + DF^{(22)} D^2 F^{*(11)} + 3F^{*(11)} DF^{(22)} + 6F^{(22)} DF^{*(11)})$$

$$Y=0: F^{(13)} = DF^{*(11)} \xi_g^{(22)} - 2DF^{(22)} - D^2 F^{(11)} + 1/2 D^2 F^{*(11)}$$

$$DF^{(13)} + R_g \xi_g^{(13)} = -D^2 F^{*(11)} \xi_g^{(22)} - D^2 F^{(22)} - D^3 F^{(11)} - 1/2 D^3 F^{*(11)}$$

Здесь под $L(\alpha, F)$ понимается оператор Орра — Зоммерфельда над функцией F для волнового числа α ; $R_g = \sqrt{\rho_y \tau_0} / (k \mu_g)$ — число Рейнольдса

в газе. Решения ищутся в виде $F^{(11)} = \Phi_1^{(11)}$, $F^{(22)} = \Phi_1^{(22)} \xi_g^{(22)} + \Phi_2^{(22)}$, $F^{(13)} = \Phi_1^{(13)} \xi_g^{(13)} + \Phi_2^{(13)} \xi_g^{(22)} + \Phi_3^{(13)}$; $\Phi_i^{(mn)}$ не зависят от $\xi_g^{(mn)}$, $\Phi_1^{(mn)} \xi_g^{(mn)}$ — решение однородного уравнения Орра — Зоммерфельда с граничными условиями без членов в правой части. Так как фазовые скорости волн намного меньше характерной скорости газа, то в $L(m, F^{(mn)})$ полагаем $C=0$ [8]. Тогда $\Phi_i^{(mn)}$ и их производные на поверхности раздела могут быть вычислены раз и навсегда как функции параметров R_g, H . Заметим, что если характерный размер в газе намного больше характерного размера в жидкости, т. е. $hk = \alpha_i \ll 1$, то нелинейностью в газе можно пренебречь по сравнению с нелинейностью в жидкости. Действительно, так как $\xi_g^{(mn)} = \alpha_i^{1-n} \xi_i^{(mn)}$, а $\xi_i^{(mn)}$ имеет порядок единицу, то $F^{(mn)} = \alpha_i^{1-n} \xi_i^{(mn)} \Phi_1^{(mn)} + O(\alpha_i^{2-n})$. (Если характерные размеры подобраны корректно, то $\Phi_i^{(mn)}$ одного порядка для разных i .)

Для расчетов принималось, что средний профиль скоростей газа описывается универсальным логарифмическим законом распределения, невозмущенное касательное напряжение τ_0 на поверхности раздела принималось равным напряжению в канале с жесткими стенками [5, 6, 17]. Можно показать, что влияние профиля скоростей на значения $\Phi_i^{(mn)}$ на поверхности раздела экспоненциально затухает с удалением от поверхности раздела. При $H > 2$, как следовало из непосредственных расчетов, влиянием верхней стенки можно пренебречь. Тогда задача в газе полностью определяется заданием одного параметра R_g и может быть решена раньше задачи в пленке.

В задаче для жидкости в качестве граничных условий берутся условия обращения вектора скорости в нуль на нижней стенке и неиспользованные для задачи в газе условия на поверхности раздела — баланса нормальных и касательных напряжений и кинематическое условие $v = (c-u) \partial \xi_i / \partial x$

$$L(n\alpha_i, f^{(mn)}) = N_1^{(mn)}, \quad y = -1: f^{(mn)} = Df^{(mn)} = 0$$

$$y = 0: D^2 f^{(mn)} + n^2 \alpha_i^2 f^{(mn)} - \alpha_i^{n+1} R_i^{-1} (D^2 F^{(mn)} + n^2 F^{(mn)}) = N_2^{(mn)}$$

$$-p^{(mn)} - 2inR_i^{-1} D_i^{(mR)} + (G + n^2 \alpha_i^2 W) \xi_i^{(mn)} +$$

$$+ \alpha_i^n R_i^{-1} (P^{(mn)} + 2inR_i^{-1} DF^{(mn)}) = N_3^{(mn)}$$

$$\xi_i^{(mn)} - f^{(mn)} (\alpha_i (c^{(0)} - 1))^{-1} = N_4^{(mn)}$$

$$W = \sigma \rho_i^{-1} h^{-1} u_0^{-2}, \quad G = gh u_0^{-2}, \quad R_i = u_0 h \nu_i^{-1}$$

Здесь $W, G, R_i, F_i^{(mn)}$ — функции предыдущих приближений, которые не выписываются ввиду их громоздкости; $N_i^{(11)} = 0$, $\xi_i^{(11)} = 1$; (mn) принимают значения (11), (20), (22), (31).

В связи с неоднородностью граничных условий методика нахождения $c^{(2)}$ несколько меняется по сравнению с методикой в однофазном течении. При решении задачи $m=1, n=3$ значение $\xi_i^{(13)}$ подставляется в условия

для напряжений. Тогда задача для $m=1, n=3$ имеет вид

$$L(\alpha_i, f^{(13)}) = c^{(2)}s + g$$

$$y=0; \quad D^2 f^{(13)} + f^{(13)} \left(\alpha_i^2 - \frac{\alpha_i (D^2 \Phi_1^{(11)} + \Phi_1^{(11)})}{R_g (c^{(0)} - 1)} \right) = \gamma_3 + c^{(2)} \gamma_3'$$

$$-p^{(13)} - \frac{2i}{R_l} Df^{(13)} + \left(G + \alpha_i^2 W + \frac{\alpha_i P^{(11)}}{R_l} \right) \frac{f^{(13)}}{\alpha_i (c^{(0)} - 1)} = \gamma_1 + c^{(2)} \gamma_1'$$

$$y=-1; \quad f^{(13)} = Df^{(13)} = 0$$

С целью экономии места не переписывались громоздкие выражения для γ_4, γ_3, s, g . Поскольку данная однородная задача совпадает с задачей для $n=m=1$, то решение будет существовать для некоторых особых значений $c^{(2)}$. Пусть L^* — оператор, сопряженный оператору Орра — Зоммерфельда и v — решение сопряженной задачи

$$L^*(\alpha_i, v) = 0$$

$$V_1 = -v_0 = 0, \quad V_2 = Dv_0 = 0, \quad V_3 = D^2 v_1 + \alpha_i^2 v_1 = 0$$

$$V_4 = -D^3 v_1 + Dv_1 \left(3\alpha_i^2 + i\alpha_i R_l (1 - c^{(0)}) - \frac{\alpha_i (D^2 \Phi_1^{(11)} + \Phi_1^{(11)})}{R_g (c^{(0)} - 1)} \right) +$$

$$+ i v_1 R_l \frac{G + \alpha_i^2 W + \alpha_i P^{(11)} / R_l}{(c^{(0)} - 1)} = 0,$$

$$V_5 = i\alpha_i^2 R_l v_1$$

$$V_6 = -Dv_1, \quad V_7 = -D^2 v_0 + (2\alpha_i^2 - i\alpha_i R_l c^{(0)}) v_0$$

$$V_8 = D^3 v_0 - (2\alpha_i^2 - i\alpha_i R_l c^{(0)}) Dv_0 - i\alpha_i R_l v_0$$

Индексом нуль обозначена нижняя граница, индексом единица — верхняя граница.

Тогда собственные значения $c^{(2)}$ находятся из формул

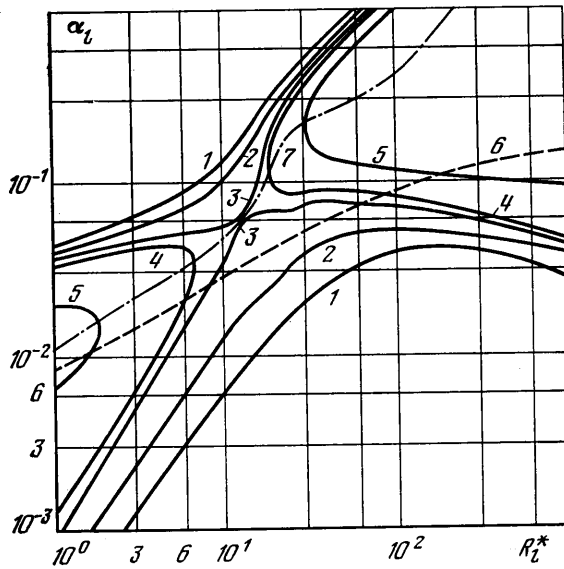
$$c^{(2)} = \frac{\gamma_3 V_6 + \gamma_4 V_5 - I_2}{I_1 - \gamma_3' V_6 - \gamma_4' V_5}, \quad I_1 = \int_{-1}^0 v s dy, \quad I_2 = \int_{-1}^0 v g dy$$

При $c_i^{(0)} c_i^{(2)} \leq 0, c_i^{(0)} > 0$ амплитуда ε_i установившегося предельного цикла находилась из условия, что c — действительная величина: $c_i^{(0)} + \varepsilon_i^2 c_i^{(2)} = 0$.

При $c_i^{(0)} c_i^{(2)} \leq 0, c_i^{(0)} < 0$ имеет место конечно-амплитудная неустойчивость.

Задача решалась численно. Собственные значения $c^{(0)}$ и собственные функции $f^{(11)}$ линейного приближения находились методом пристрелки после сведения к задаче Коши [8]. Функции $f^{(22)}, f^{(02)}$, интегралы I_1, I_2 находились методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага.

2. При $H > 2$ задача полностью определяется заданием R_l, G, W, R_g, α_i . Решение задачи удобнее вести в безразмерных параметрах $R_l, T \equiv R_l^{-1} G^{-2/3} = \tau_c g^{-2/3} \nu_l^{-2/3} \rho_l^{-1}, \gamma_1 = \mu_l \nu_l / (\mu_g \nu_g), \gamma_2 = \sigma \rho_l^{-1} \nu_l^{-4/3} g^{-1/3}, \alpha_i; \gamma_1$ и γ_2 характеризуют физические свойства жидкости и газа. Тогда связь между параметрами: $G = R_l^{-1/2} T^{-1/2}, W = \gamma_2 R_l^{-1/2} T^{-1/2}, R_g = \gamma_1^{1/2} R_l^{1/2} \alpha_i^{-1}$.

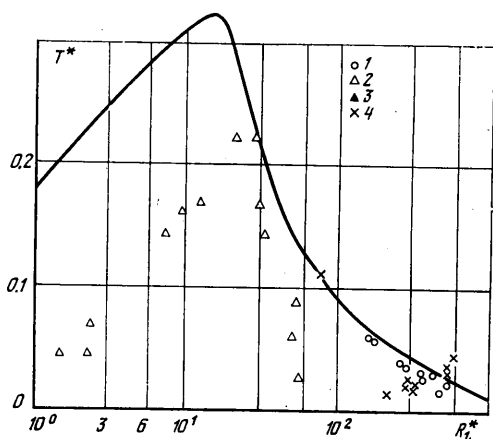


Фиг. 1

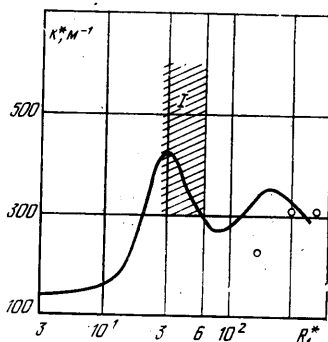
Расчеты велись для случая воздушно-водяного течения при температуре 20°C , давлении 760 мм рт.ст., т. е. $\gamma_1=3.83$, $\gamma_2=3370$, и задача описывалась безразмерными расходом пленки R_i , касательным напряжением на поверхности раздела T и α_i .

На фиг. 1 сплошными линиями 1–5 показаны кривые нейтральной устойчивости $\alpha_i=f(R_i, T)$ при $c_i^{(0)}=0$: соответственно для $T=0.5, 0.4, 0.33, 0.3, 0.2$. Вдоль кривой нейтральной устойчивости решалась нелинейная задача. Пересечение штриховой кривой 6 с кривой линейной устойчивости дает точку $c_i^{(2)}=0$; та часть кривой нейтральной устойчивости, которая лежит ниже 6, возбуждается жестко $c_i^{(2)}>0$; часть кривой выше 6 возбуждается мягко; в носике кривых нейтральной устойчивости автоколебательный режим отзвливается всегда мягко.

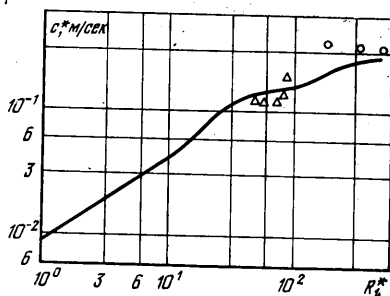
Кривая 7, где $\partial\alpha_i/\partial R_i|_T=\infty$, представляет собой множество критических значений R_i^* , T^* , α_i^* , c^* и т. д., при которых плоскопараллельное течение впервые теряет устойчивость. Если выбрать в качестве независимого переменного R_i^* , то получим зависимости критических значений T^* , α_i^* , c^* как функций R_i^* , показанных на фиг. 2, 3, 4, где также приведены экспериментальные данные: 1–[5], 2, 3–соответственно «быстрые» и «медленные волны» [6], 4–[18]. Для более удобного сравнения с экспериментом c^* и α^* взяты в размерном виде. Зона I на фиг. 3–экспериментальная область волновых чисел быстрых волн [6]. Имеется хорошее соответствие теории с экспериментом. Однако в экспериментах [6] так называемые медленные волны 3 возбуждаются при гораздо меньших T , чем теоретические. Размерные волновые числа медленных волн лежали в пределах $20\text{--}60\text{ м}^{-1}$ (зависимости $k^*=k^*(R_i)$ в [6] не приводятся), в то время как по линейной теории они должны быть не меньше 121 м^{-1} . Интересно, что нелинейная теория именно в экспериментальных пределах волнового числа предсказывает конечно-амплитудную неустойчивость $c_i^{(2)}>0$, $c_i^{(0)}<0$. Таким образом, быстрые волны [6] возбуждаются мягко, а медленные – жестко.



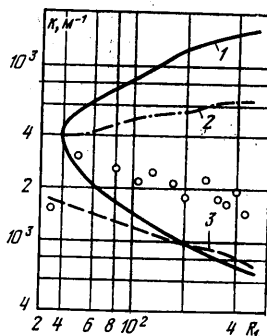
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

3. На установке, описанной в [19], были проведены эксперименты при среднерасходном $\langle R_g \rangle = 5000$, ширине канала $2H = 2 \cdot 10^{-2}$ м и различных значениях R_i . Это соответствовало значению $T = 0.158$. На фиг. 5 экспериментальные значения приведены вместе с кривой нейтральной устойчивости 1, кривой максимального роста $c_i c_i^{(0) \max} - 2$, кривой $c_i^{(2)} = 0 - 3$. Ниже кривой 3 $c_i^{(0)} > 0$, выше $c_i^{(2)} < 0$. Видно, что экспериментальная точка, находящаяся в области $c_i^{(0)} < 0$, возбуждается жестко $c_i^{(2)} < 0$.

Авторы благодарят В. Я. Шкадова за руководство работой, всех участников семинара Г. И. Петрова за полезное обсуждение, а также Е. Л. Кокон за помощь в обработке экспериментальных данных.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Feldman S. On the hydrodynamic stability of two viscous incompressible fluids in parallel uniform shearing motion. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 4.
2. Зайцев А. А. К вопросу об устойчивости вязкой пленки на твердом теле в потоке газа. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 6.
3. Miles I. W. The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 8, No. 4.
4. Шкадов В. Я. К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
5. Cohen L. S., Hanratty T. I. Generation of waves in the concurrent flow of air and liquid. A. I. Ch. E. Journal., 1965, vol. 11, No. 1.
6. Craic A. D. D. Wind-generated waves in thin liquid films. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26. No. 2.

7. Craic A. D. D. Wind-generated waves in contaminated liquid films. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 31, pt 1.
 8. Демехин Е. А. О линейной устойчивости течения пленок жидкости совместно с газовым потоком. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 1.
 9. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, No. 2.
 10. Конобеев В. И., Жаворонков Н. М. Гидравлические сопротивления в трубах с волнистой шероховатостью. *Хим. машиностроение*, 1962, № 1.
 11. Smith T. N., Tait R. W. F. Interfacial shear stress and momentum transfer in horizontal gas-liquid flow. *Chem. Engng Sci.*, 1966, vol. 21, No. 1.
 12. Hussain A. K., Reynolds W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 54, No. 2.
 13. Гольдштик М. А., Правдина М. X. О взаимодействии внешнего возмущения с турбулентным потоком. *ПМТФ*, 1976, № 1.
 14. Davis R. W. Perturbated turbulent flow, eddy viscosity and the generation of turbulent stresses. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 63, No. 4.
 15. Семенова И. П., Якубенко А. Я. Взаимодействие турбулентного потока газа с жидкой пленкой. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 2.
 16. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, No. 3.
 17. Laufer I. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. *NACA R*, 1951, No. 1053.
 18. Hanratty T. J., Engen I. M. Interaction between a turbulent air stream and a moving water surface. *A.I.Ch.E. Journal*, 1957, vol. 3, No. 3.
 19. Гугучкин В. В., Демехин Е. А., Калугин Г. Н., Маркович Э. Э., Пикин В. Г. Волновое движение пленок жидкости, текущих совместно с газовым потоком. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 4.
-