

## О ЗАКРУЧЕННЫХ СТРУЯХ

М. А. ГОЛЬДШТИК

(Новосибирск)

Найдено точное решение уравнений Навье – Стокса для струи, вытекающей из конца вихревой нити в затопленное пространство. В зависимости от степени закрутки струи реализуется сомкнутый или разомкнутый режим течения. В случае сильной закрутки имеет место неединственность решения. Наряду с численным даны приближенные аналитические решения задач.

Исследованию точечных вязких струй посвящено большое число работ, достаточно подробный анализ которых содержится в монографиях [1, 2]. Тем не менее один важный класс закрученных струйных течений, имеющий яркую экспериментальную интерпретацию, остался неизученным.

Точная теория вязких струй восходит к работе Л. Д. Ландау [3], в которой движению вязкой жидкости, вызванному некоторой точечной особенностью, придана интерпретация струйного истечения из тонкой трубки с заданным потоком импульса, являющимся интегралом сохранения. Последний вводится следующим образом. Стационарные уравнения Навье – Стокса записываются в виде

$$(1) \quad \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

где  $\Pi_{ij}$  — плотность потока импульса,  $\rho$  — плотность жидкости,  $v_i$  — компоненты вектора скорости в декартовых координатах  $x_i$ ,  $p$  — давление,  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера,  $\mu$  — динамическая вязкость.

Интегрирование (1) по объему между концентрическими сферами — большой  $S$ , имеющей произвольный радиус  $R$ , и малой  $s$  фиксированного радиуса  $a$ , окружающей особую точку, расположенную в начале координат, — и использование формулы Гаусса — Остроградского дает соотношение

$$(2) \quad J_i = \int_s \Pi_{in} dS = \int_s \Pi_{in} ds = \text{const}$$

где  $n$  — внешняя нормаль. Постоянство  $J_i$  имеет смысл независимости от радиуса  $R$ , так что векторная величина  $J_i$ , «выпущенная» из начала координат, сохраняется во всем пространстве.

Проекция (2) на ось струи (единственная в осесимметричном случае) определяет поток импульса  $J$ , характеризующий интенсивность струи

$$(3) \quad J = \int_s \Pi_{Rz} dS = 2\pi R^2 \int_0^\pi (\Pi_{RR} \cos \theta - \Pi_{R\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Pi_{RR} = \rho v_R^2 + p - 2\mu \frac{\partial v_R}{\partial R}, \quad \Pi_{R\theta} = \rho v_R v_\theta - \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right)$$

Здесь введены сферические координаты  $(R, \varphi, \theta)$ .

Поскольку из данных параметров  $\rho$ ,  $\mu$  и  $J$  нельзя составить масштаба длины, из соображений размерности следует необходимость автомодельного решения задачи вида  $v_i = (\nu/R) f_i(\theta, Re)$ , где  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость,  $Re = (1/\nu) \sqrt{J}/\rho$  — характерное число Рейнольдса.

Рассмотрим более сложную задачу, предположим, что бесконечно тонкая «трубка», из которой истекает струя, вращается с бесконечно большой скоростью, образуя полуограниченную вихревую нить, характеризующую интенсивностью  $C$ , так что вдали от источника струи при  $z \rightarrow -\infty$  поле вращательной скорости определяется соотношением  $v_\varphi = C/r$ , где  $r = R \sin \theta$  — цилиндрический радиус.

Введение параметра  $C$ , имеющего ту же размерность, что и величины  $\nu$  и  $\sqrt{J}/\rho$ , не нарушает автомодельности задачи, так что решение должно иметь вид

$$(4) \quad v_R = -\frac{\nu}{R} y'(x), \quad v_\theta = -\frac{\nu}{R} \frac{y(x)}{\sin \theta}, \quad v_\varphi = \frac{\nu}{R} \frac{\Phi(x)}{\sin \theta}$$

$$p = \frac{\nu^2}{R^2} g(x)$$

Здесь  $x = \cos \theta$ , штрих означает дифференцирование по  $x$ ,  $y(x)$  — искомая величина, связанная с функцией тока меридионального сечения  $\psi$  соотношением  $\psi = \nu R y$ .

Решение уравнений Навье — Стокса вида (4), автоматически удовлетворяющее уравнению неразрывности, рассматривалось в большом числе публикаций, начиная с работы [4]. Как выяснено в [5] и ряде последующих исследований, например [6], решения вида (4) могут обладать необычными свойствами.

Подстановка выражений (4) в уравнения Навье — Стокса в сферических координатах после исключения давления приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(5) \quad (1-x^2)^2 y^{IV} - 4x(1-x^2) y''' - \frac{1}{2}(1-x^2) (y^2)''' = (\Phi^2)'$$

$$(6) \quad (1-x^2) \Phi'' = y \Phi'$$

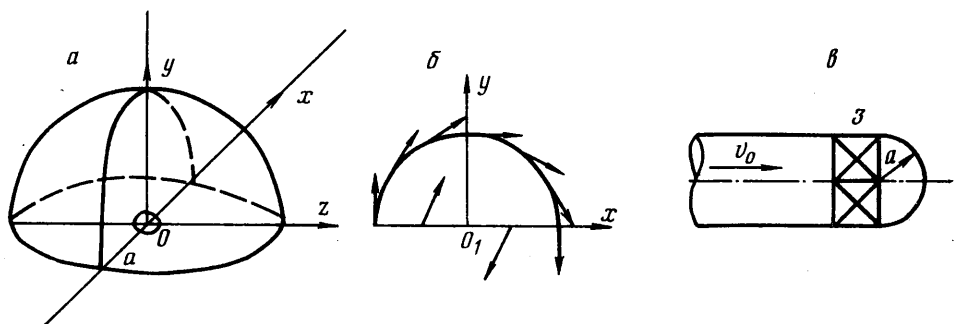
Граничные условия ставятся на оси  $z$ , причем различные для  $z > 0$  и  $z < 0$ . Первому случаю отвечает  $x=1$  ( $\theta=0$ ). Здесь требуется регулярность течения. При  $z < 0$  условие отсутствия источников или стоков приводит согласно (4) к равенству  $y(-1)=0$ , но относительно величины  $y'(-1)$  нельзя сформулировать никакого требования. Поэтому

$$(7) \quad y = \Phi = 0, \quad y' < \infty \quad (x=1), \quad y=0; \quad \Phi=C \quad (x=-1)$$

Шестым — замыкающим — условием является задание импульса  $J$ , поэтому в принципе задача поставлена и можно ожидать ее разрешимости. При этом представляется правдоподобным, что при  $C \rightarrow 0$  решение будет стремиться к решению Ландау, а при  $C \neq 0$  в области  $z > 0$  может быть интерпретировано как закрученная струя. Однако такое решение радикальным образом отличается от того, что, начиная с работы [7], принято называть закрученной струей. Последняя помимо величины  $J$  характеризуется сохранением момента импульса

$$(8) \quad L = \int_s (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n)_z dS = \text{const}$$

Легко видеть, что для решения (4)  $L=0$  при любых  $C$ . То же относится и к расходу  $Q$ . Следовательно,  $Q$  и  $L$  не могут служить характеристиками рассматриваемой закрученной струи, в которой  $v_\varphi \sim R^{-1}$ . Конечным значением  $L$  обладает струя, соответствующая особенностям другого типа:  $v_\varphi \sim R^{-2}$ . В первом приближении вдали от источника такая струя будет вести себя как незакрученная, так что теория, основанная на инвариантах  $J$  и  $L$ , относится к так называемым слабо закрученным струям [1]. Опыт показывает [2], что в сильно закрученных струях даже вдали от



Фиг. 1

источника картина течения существенно отличается от незакрученной струи. Как будет показано ниже, решение (4) качественно верно отражает ряд наблюдаемых свойств сильно закрученных струй.

Закрученная струя, соответствующая решению (4), помимо циркуляции вихревой нити  $\Gamma=2\pi C$  может быть охарактеризована и некоторым интегральным инвариантом, который получается применением соотношения (2) к полусфере с «дном», показанной на фиг. 1, а. Проекция (2) на ось  $x$  дает

$$(9) \quad J_x = R^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \Pi_{xR} \sin \theta d\theta = a^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \Pi_{x\theta} \sin \theta d\theta = \text{const}$$

Интеграл по плоскому дну не дает вклада в (9) из-за предполагаемой осевой симметрии течения (см. фиг. 1, б, где изображено векторное поле в сечении  $z=\text{const}$ ). Используя соотношение для  $\Pi_{xR}$ , интеграл сохранения (9) запишем в форме

$$(10) \quad \Pi_{xR} = (\Pi_{RR} \sin \theta + \Pi_{R\theta} \cos \theta) \cos \varphi - \Pi_{R\varphi} \sin \varphi$$

$$(11) \quad M = R^2 \int_0^\pi \Pi_{R\theta} \sin \theta d\theta = R^2 \left[ \int_0^\pi \rho v_R v_\theta - \mu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right) \right] \sin \theta d\theta = \text{const}$$

Очевидно, что инвариант (11) на решении (4) имеет конечное значение и может служить характеристикой закрученной струи. Очевидно также и обратное утверждение: при заданных инвариантах (3) и (11) решение должно быть автомодельным и иметь форму (4).

Возникает вопрос, какой из интегралов сохранения, (8) или (11), больше подходит в качестве меры закрученности струи, вытекающей из реального источника, представляющего собой, например, цилиндрическую трубку радиуса  $a$ , показанную на фиг. 1, в и содержащую внутри неподвижный лопаточный направляющий аппарат — завихритель 3. Пусть по-

ток в трубке характеризуется средней расходной скоростью  $v_0$ . При заданной геометрии течение внутри и вне трубки будет полностью определено, если кроме  $v_0$  и  $a$  даны величины  $\nu$  и  $\rho$ . Тогда из соображений размерности легко следуют равенства:

$$J = \rho a^2 v_0^2 F_1(\text{Re}), \quad M = \rho a^2 v_0^2 F_2(\text{Re})$$

$$L = \rho a^2 v_0^2 F_3(\text{Re}), \quad Q = \pi \rho a^2 v_0$$

где  $\text{Re} = v_0 a / \nu$  — число Рейнольдса реального потока. Если все размеры данного устройства уменьшить, например, вдвое, а скорость увеличить вдвое, так чтобы число Рейнольдса сохранило свое значение, то картина течения в струе не изменится, в частности сохранится угол раствора струи. (Заметим, что фактически  $a$  можно не уменьшать, достаточно лишь изменить масштабы длины и времени.) При этом величины  $J$  и  $M$  не изменятся, в то время как  $L$  и  $Q$  уменьшатся вдвое. Следовательно, в пределе при  $a \rightarrow 0$   $J$  и  $M$  сохраняют то же значение, что и для реального источника, а  $L$  и  $Q$  исчезнут. Таким образом, желая заменить рассмотрение реального источника струи точечным, необходимо ориентироваться на инварианты  $J$  и  $M$ .

Вместе с тем необходимо отметить, что практическое использование инвариантов  $J$  и  $M$  затруднительно, так как они содержат величины давления и градиентов скоростей. Но если имеется точечный источник с инвариантами  $J$  и  $M$ , то на соответствующем автомодельном решении сохраняется много других интегральных величин, правда, не являющихся универсальными инвариантами, как  $J$  и  $M$ . Некоторые из таких интегралов могут быть вычислены по параметрам реального источника, например потока соответствующих количеств движения, дающих при больших интенсивностях основной вклад в  $J$  и  $M$  [8]

$$(12) \quad J_z = \rho \int_{S(z>0)} v_R v_z dS = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} v_R v_z R^2 \sin\theta d\theta$$

$$J_\varphi = \rho \int_{S(z>0)} v_R v_\varphi dS = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} v_R v_\varphi R^2 \sin\theta d\theta$$

Пусть, например, поток на выходе из трубки характеризуется полем скоростей  $v_z = v_0 = \text{const}$ ,  $v_\varphi = \omega r$ . Тогда, применяя (12) к полусфере  $R = a$ , получим

$$(13) \quad J_z = \rho \pi a^2 v_0^2, \quad J_\varphi = \frac{2}{3} \rho \pi a^3 v_0 \omega$$

Выражения (12) после подстановки в них (4) приобретают вид

$$(14) \quad J_z = 2\pi\rho v^2 \left[ \int_0^1 xy'^2 dx + \frac{1}{2} y^2(0) \right], \quad J_\varphi = -2\pi\rho v^2 \int_0^1 \frac{y'\Phi}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Сравнивая (13) и (14), можно выразить интегральные условия через параметры реального источника: число Рейнольдса  $\text{Re} = v_0 a / \nu$  и степень закрутки потока  $\alpha = \omega a / v_0$

$$(15) \quad 2 \int_0^1 xy'^2 dx + y^2(0) = \text{Re}^2, \quad 3 \int_0^1 \frac{y'\Phi}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\alpha \text{Re}^2$$

Отметим, что задание условий (15) в отличие от параметров  $J$  и  $M$ , строго говоря, возможно не для всяких источников, а для специальных, для которых выражения (12) являются интегралами сохранения. В остальных случаях  $Re$  и  $\alpha$  можно рассматривать как формальные параметры, по которым, найдя решение, при желании можно вычислить и инварианты  $J$  и  $M$ . При этом, правда, возникает одно затруднение, разъяснение которого требует некоторых вычислений. Прежде всего, проинтегрировав уравнение (5), найдем

$$(16) \quad (1-x^2)^2 y''' - \frac{1}{2}(1-x^2)(y^2)'' - x(y^2)' + y^2 = \Phi^2$$

Константа интегрирования положена равной нулю в силу условий (7) и предполагаемой регулярности решения в окрестности точки  $x=1$ . Вследствие условий (7) вблизи точки  $x=-1$  решение не может быть регулярным. Легко видеть, что здесь  $y' \sim \ln(1+x)$ . Тем самым согласно (4) на оси вращения при  $z < 0$  неограниченной является не только вращательная скорость  $v_\phi$ , но и продольная скорость  $v_R$ , в то время как при  $z > 0$   $v_\phi = 0$  и  $v_R$  конечна. Из-за этой особенности, как оказывается, при вычислении величины  $J$  интегрирование по всей сфере невозможно. Для конечности  $J$  из шара необходимо исключить любой конус, содержащий отрицательную полуось  $z$ . При этом, как легко показать, на поверхности конуса  $\Pi_{0z} = 0$  и осевой поток импульса через эту поверхность, отсутствует. В данной ситуации в качестве контрольной поверхности естественнее всего выбрать правую полусферу, определив  $J$  соотношением

(17)

$$J = 2\pi\rho v^2 \int_0^1 \left\{ x \left[ y'^2 - 2y' + \frac{y(xy' - y)}{1-x^2} - xy'' \right] - yy' + 2y + (1-x^2)y'' \right\} dx$$

Неинтегрируемую особенность при  $x=-1$  имеет член  $xy''$ . Для инварианта  $M$  следует брать исходную контрольную поверхность в виде верхней полусферы. Тогда

$$(18) \quad M = \rho v^2 \int_{-1}^1 \frac{(2-y')\Phi}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Здесь, как видно, подынтегральная функция суммируема на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

Перейдем к интегрированию системы уравнений (5), (6) с условиями (7). После деления уравнения (5) на  $1-x^2$  и интегрирования получается

$$(19) \quad (1-x^2)y''' - 2xy'' + 2y' - \frac{1}{2}(y^2)'' = 2 \int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2} dx + C_1$$

Еще после двукратного интегрирования находим

$$(20) \quad 2(1-x^2)y' + 4xy - y^2 = 4 \int_0^x dx \int_0^x \frac{\Phi\Phi'}{1-x^2} dx + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 = F(x)$$

Это уравнение при  $\Phi = 0$  впервые рассмотрено в [4]. Если положить  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , легко получается решение Ландау

$$(21) \quad y = 2 \frac{1-x^2}{\gamma-x}$$

где  $\gamma > 1$  — произвольная постоянная, однозначно связанная с импульсом струи  $J$ , причем  $J = \infty$  при  $\gamma = 1$  и  $J = 0$  при  $\gamma = \infty$ .

Поскольку операция выбора констант представляется произвольной, в литературе по струям сложилось мнение [1], что решение (21) просто угадано, благо оно удовлетворяет всем условиям задачи. Известна попытка [9] решения задачи с ненулевыми константами. Между тем исходная постановка задачи не содержит никакого произвола и позволяет определить все константы. С помощью условий (7) находим два соотношения:  $F(\pm 1) = 0$ . Еще одно соотношение получается, если сопоставить (19) и (16) при  $x = 0$ . Имеем

$$y'' + 2y'^{-1/2}(y^2)'' = C_1, \quad y''' - 1/2(y^2)'' + y^2 = \Phi^2 \quad (x=0)$$

Отсюда следует:  $C_1 = \Phi^2(0) + 2y'(0) - y^2(0)$ . Из (20) находим  $2y'(0) - y^2(0) = C_3$ .

Таким образом получаются условия

$$(22) \quad C_1 = \Phi^2(0) + C_3, \quad F(1) = F(-1) = 0$$

достаточные для вычисления трех констант ( $C_1, C_2, C_3$ ). В частности,  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  при  $\Phi = 0$ , так что решение Ландау является единственным, а решения Япеева, найденные с помощью сложных гипергеометрических рядов и дающие странные осциллирующие профили скоростей, являются лишними. На это обстоятельство указано в работе [10], по-видимому, незамеченной специалистами. Кстати сказать, там обнаружен удивительный факт, что профиль осевой скорости струи  $v_z$ , определенный решением Ландау (21), претерпевает радикальную перестройку при переходе через значение  $\gamma = 1.000\ 038$ .

Возвращаясь к уравнению (20) при  $\Phi \neq 0$ , введем вместо  $y$  новую неизвестную  $T$  согласно соотношению

$$(23) \quad y = -2(1-x^2)T'/T$$

Тогда уравнения (20) и (6) можно записать в форме

$$(24) \quad T'' + \frac{F(x)}{4(1-x^2)^2} T = 0$$

$$(25) \quad \Phi = C \int_x^1 \frac{dx}{T^2} / \int_{-1}^1 \frac{dx}{T^2}$$

В соотношении (25) учтены граничные условия (7). Аналитическое решение системы (24), (25) едва ли возможно. Однако для грубых оценок можно получить приближенные качественно верные решения, ограничиваясь первым приближением. Сначала в качестве нулевого приближения примем  $\Phi = \Phi_0(1-x^2)$ . Эта функция не удовлетворяет второму условию (7), но с ее помощью легко строится первое приближение.

Из (20) и условий (22) находим  $F(x) = -1/3\Phi_0^2(1-x^2)^2$ . Уравнение (24) принимает вид  $T'' - 1/12\Phi_0^2 T = 0$ . Следовательно

$$(26) \quad T = A \operatorname{sh} kx = B \operatorname{ch} kx, \quad k = \Phi_0/\sqrt{12}$$

Используя (23), находим

$$(27) \quad y = 2k(1-x^2) \frac{1 - \gamma \operatorname{th} k \operatorname{th} kx}{\gamma \operatorname{th} k - \operatorname{th} kx}$$

где  $\gamma = -B/(A \operatorname{th} k)$  — новая произвольная постоянная, выбранная так, чтобы при  $k \rightarrow 0$  соотношение (27) переходило в (21), а также чтобы значение  $\gamma = 1$  было минимально возможным.

Для вычисления функции  $\Phi$  из (25) нет необходимости проводить интегрирование, так как можно воспользоваться известной формулой Лиувилля, дающей связь между двумя линейно-независимыми решениями  $T_1$  и  $T$  уравнения (24)

$$T_1 = \operatorname{const} T \int_x^1 \frac{dx}{T^2}$$

С помощью этой связи (25) преобразуется к виду

$$(28) \quad \Phi = CT(-1)T_1(x)/T_1(-1)T(x)$$

Положив  $T_1 = A(\operatorname{sh} kx - \operatorname{th} k \operatorname{ch} kx)$ , так что  $T_1(1) = 0$ , найдем

$$(29) \quad \Phi = C \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\operatorname{th} k - \operatorname{th} kx}{\gamma \operatorname{th} k - \operatorname{th} kx}$$

При  $x = 0$  имеем  $C(\gamma + 1)/2\gamma = \Phi_0 = \sqrt{12}k$ , так что  $k = C(\gamma + 1)/4\sqrt{3}\gamma$ . Возьмем теперь другое начальное приближение, удовлетворяющее второму условию (7)

$$\Phi = 1/2 C(1-x)\sqrt{2+x}$$

В этом случае  $F(x) = -1/4(1-x)^2(1+x)$ . Это простейшая функция, удовлетворяющая условиям  $F(\pm 1) = F'(1) = 0$ , вытекающим из (20). Общее решение уравнения (24) имеет вид

$$(30) \quad T = \sqrt{1+x}[AI_1(z) + BK_1(z)], \quad z = 1/2 C\sqrt{1+x}$$

где  $I$  и  $K$  — функции Бесселя мнимого аргумента. С помощью (30) аналогично предыдущему находим решение задачи

$$(31) \quad y = \frac{1}{2} C(1-x)\sqrt{1+x} \frac{K_0(z) + \lambda I_0(z)}{K_1(z) - \lambda I_1(z)}$$

$$(32) \quad \Phi = C \frac{K_1(z) - \beta I_1(z)}{K_1(z) - \lambda I_1(z)}, \quad \beta = \frac{K_1(C/\sqrt{2})}{I_1(C/\sqrt{2})}$$

$$\lambda = 8/[\gamma(8\Delta - C^2) + C^2] - \delta, \quad \Delta = 1/(\delta + \beta), \quad \delta = K_0\left(\frac{C}{2}\right) / I_0\left(\frac{C}{2}\right)$$

Как показал численный анализ, приближенные решения (27) и (31) с разных сторон мажорируют точное и качественно верно отражают свойства последнего. Особенно это относится к решению (31), (32). Оба решения зависят от двух параметров ( $\gamma$  и  $C$ ), имеющих одинаковый смысл и однозначно определяющих каждое из решений. При  $C \rightarrow 0$  (27) и (31) переходят в (21). Найдя решение для какой-нибудь пары ( $\gamma$ ,  $C$ ), можно вычислить интегральные характеристики (15) или (17), (18) и при желании считать их определяющими параметрами, однако однозначность в этом случае может нарушиться.

Наиболее характерной чертой найденных приближенных решений является возникновение приосевого обратного тока и разомкнутого режима течения при достаточно больших степенях закрутки потока. Например, из (27) непосредственно видно, что обратный ток возникает при условии

$k > \operatorname{arctg} 1/\sqrt{\gamma}$ . Заметим, что разомкнутый режим течения, легко получаемый в опыте [11], не описывается в рамках теории Лойцянского. С другой стороны, с помощью решений типа (4) нельзя описать зону обратных токов конечной длины, часто наблюдаемую в эксперименте, в силу существенной неавтомодельности этого явления. На расстоянии 2–3 калибров от источника — это характерная длина такой зоны [2] — существенные влияния оказывают конкретные особенности закручивающего устройства, так что при описании поля течения невозможно ограничиться только двумя параметрами.

Для получения точных результатов было предпринято численное решение системы уравнений (16) и (6). Граничные условия при  $x=-1$  были сняты; при  $x=1$  поставлена задача Коши

$$(33) \quad \begin{aligned} y=0, \quad y'=m, \quad y''=n \\ \Phi=0, \quad \Phi'=s \quad (x=1) \end{aligned}$$

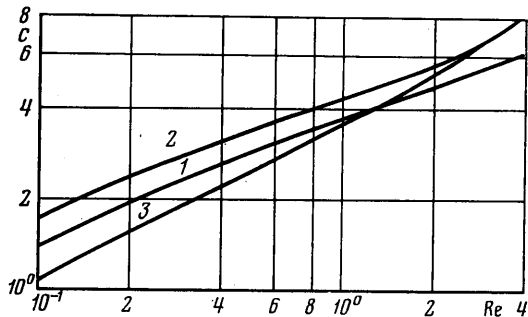
Система уравнений (16), (6) интегрировалась методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага до значения  $x=x_*=-1+10^{-4}$ .

При фиксированной паре параметров  $m$  и  $s$  параметр  $n$  каждый раз подбирался (методом секущих) так, чтобы с заданной точностью выполнялось условие  $y(x_*)=0$ . Как показали численные эксперименты, параметр  $n$  этим условием определяется однозначно.

Для возможности сравнения приближенного решения с точным параметры  $m$  и  $s$  выражались через величины  $\gamma$  и  $C$ . При этом  $m$  определялось с помощью продифференцированного соотношения (31), а  $s$  подбиралось так, чтобы выполнялось соотношение  $\Phi(x_*)=C$ .

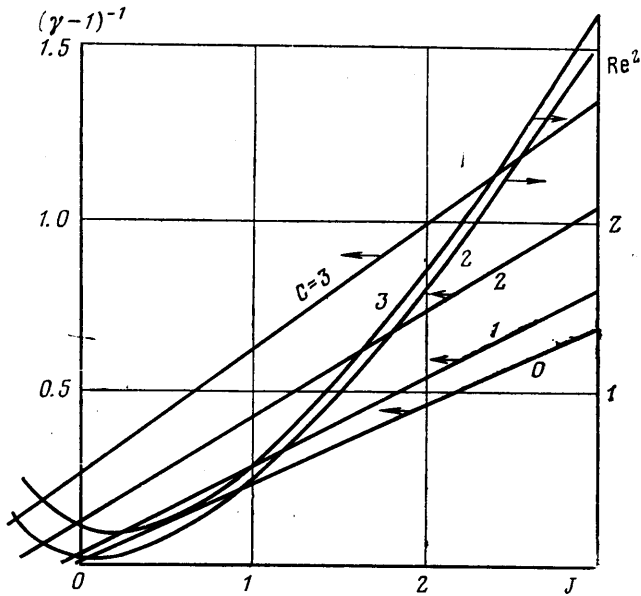
Для фиксированного числа Рейнольдса всегда найдется такая интенсивность закрутки  $C$ , при которой впервые возникает приосевой обратный ток. Этому состоянию отвечает значение  $m=0$  в условиях (33). Зависимость  $C(\operatorname{Re})$  при  $m=0$  дана на фиг. 2 в виде кривой 1. Кривые 2 и 3 соответствуют условиям возникновения приосевого обратного тока для решений (31) и (27). Отличие кривых 2 и 3 от кривой 1 в известной мере характеризует степень приближения решений (31) и (27) к точному.

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 3, с помощью которой по заданным  $J$  и  $C$  можно найти параметр  $\gamma$ . Здесь же для  $C=2$  и 3 показаны зависимости  $\operatorname{Re}^2$  от  $J$ , вычисленные согласно (17) и (15). То обстоятельство, что величина  $J$  может принимать отрицательные значения, обусловлено спецификой выбора в качестве контрольной поверхности правой полусферы. В плоскости  $z=0$  выражение для осевой скорости  $v_z$  имеет вид  $v_z=y(0)v/r$ . Легко видеть, что при  $\gamma=\infty$   $y(0)=0$ . В этом случае в правую полусферу не вносится никакого количества движения. Тем не менее полубесконечная вихревая нить оказывает подсосывающее действие и в области  $z>0$  развиваются движения, которым соответствуют значения  $J<0$ , возрастающие по модулю с ростом  $C$ . Наличие этих движений приводит к тому, что число Рейнольдса, определенное первой из формул (15), не обращается в нуль ни при  $J=0$ , ни при  $\gamma=\infty$ . Как видно из фиг. 3, зависимость  $\operatorname{Re}^2(J)$  немонотонна, она имеет минимум. Отсюда следует, что одному и тому же числу Рейнольдса соответствует не один, а два режима

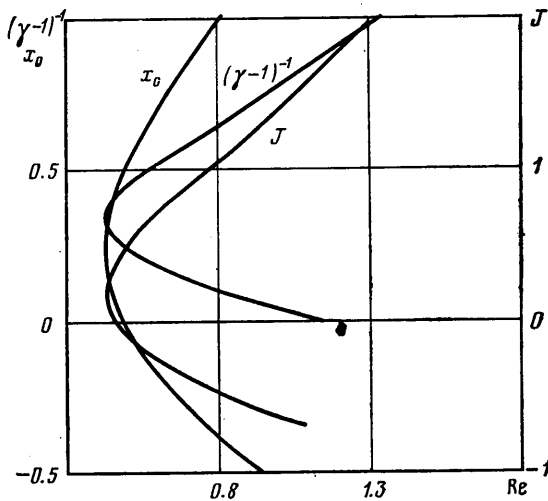


Фиг. 2





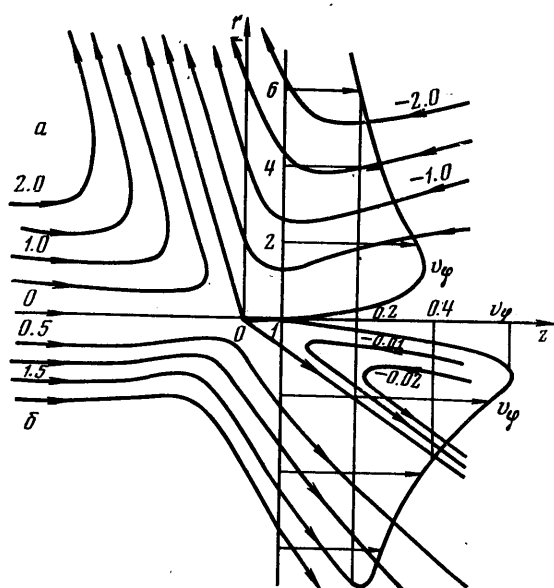
Фиг. 3



Фиг. 4

течения. Это иллюстрирует фиг. 4, дающая для значения  $C=3$  зависимость от числа  $Re$  параметров  $(\gamma-1)^{-1}$ ,  $J$  и  $x_0$ , границу приосевой циркуляционной зоны:  $y(x_0)=0$ . На фиг. 5 показаны две картины течения, соответствующие параметрам  $C=3$ ,  $Re=0.706$ . Оба режима течения разомкнуты, но в равной степени. При значениях  $Re > 0.815$  один из режимов сомкнут, а другой разомкнут.

Самое интересное, что эти удивительные свойства качественно согласуются с опытом. Достаточно сильно закрученную струю буквально мановением руки удается переводить из одного состояния в другое, и притом оба состояния устойчивы! Разумеется, в экспериментах речь идет о турбулентных струях. Отмеченное согласие теории и эксперимента говорит в пользу гипотезы постоянной турбулентной вязкости [12], точнее посто-



Фиг. 5

янного турбулентного числа Рейнольдса, значение которого должно быть порядка единицы.

Профили окружной компоненты скорости  $v_\varphi$ , построенные в сечении  $z=1$ , также очень похожи на экспериментальные. Для количественного сравнения теории с экспериментом необходимо сделать какие-то предположения относительно турбулентной вязкости  $\nu_t$ , например определить эту величину из некоторого вариационного принципа либо найти ее из опыта. Однако для этого мы не располагаем достаточной эмпирической информацией, в особенности по разомкнутым режимам течения.

В заключение автор благодарит М. Х. Правдину за численные расчеты.

Институт теплофизики СО АН СССР

Поступила 6 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
2. Ахмедов Р. Б., Балагула Т. Б., Рашидов Ф. К., Сакаев А. Ю. Аэродинамика закрученной струи. М., «Энергия», 1977.
3. Ландау Л. Д. Новое точное решение уравнений Навье – Стокса. Докл. АН СССР, 1944, т. 44.
4. Слезкин Н. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Уч. зап. МГУ, 1934, вып. 2.
5. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
6. Serrin J. The swirling vortex. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1972, vol. 271, No. 1214.
7. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
8. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
9. Яцеев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 11.
10. Гольдштик М. А., Силантьев Б. А. К теории ламинарных затопленных струй. ПМТФ, 1965, № 5.
11. Ляховский Д. Н. Кинематический ультрадиффузор и перспективы применения его в точечной технике. В сб. «Теплопередача и аэрогидродинамика». М.–Л., Машгиз, 1955.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.