что при увеличении τ вблизи клина сосредотачивается большее число частиц, которые создают сильное собственное электрическое поле, «вытягивающее» частицы с периферии к поверхности клина. Однако при дальнейшем увеличении τ эффекты инерции становятся доминирующими, и $\eta \to 1+0$ при $\tau \to \infty$.

На фиг. 3 изображена зависимость η от параметра u_0 при $\varphi_+=0$, $\tau=1$ (сплошная линия). При $E\equiv 0$ (штриховая линия) увеличение u_0 приводит к возрастанию влияния инерции частиц. В случае обтекания клина заряженными частицами увеличение u_0 приводит и к росту электрических сил, так как величина объемного заряда, выносимого в промежуток между эмиттером и клином, пропорциональна u_0. При $u_0 \to \infty$ имеем $\eta \to 1+0$, т. е. доминирует эффект инерции частиц.

На фиг. 4 приведены граничные траектории частиц, разделяющие потоки частиц, попадающих и не попадающих на поверхность клина. Представленные данные получены при $\tau=1$, $\varphi_+=0$; сплошные линии *1*, *2*, *3* соответствуют условиям $u_0=0.3$, 0.7, 1. Штриховая линия является линией тока газа, совпадающей с траекторией частиц при $\tau=0$, $E\equiv 0$. Штрихпунктирная прямая – траектория частиц при $\tau=\infty$.

В приведенных примерах электрическое поле создавалось полем объемного заряда. Этот случай характеризуется неравенством $\xi=(\eta-\eta_0)/\eta_0>0$, причем величина ξ может быть порядка единицы. Возможны условия, когда $\eta>1$ (в то время как всегда $\eta_0<1$).

Если же тело является заряженным ($\varphi_+\neq 0$), то помимо собственного электрического поля на частицы воздействует внешнее электрическое поле, которое при достаточно больших φ_+ становится определяющим. Существует предельная величина $\varphi_{+\,\max}$, при достижении которой ток (поток частиц) на клин обращается в нуль.

На фиг. 5 представлена зависимость $\eta(\varphi_+)$, построенная при $\tau=u_0=1$. Предельная величина $\varphi_{+\,\max}\approx 0.8$.

Полученные результаты показывают, что величина массового потока заряженных частиц на обтекаемое тело существенно зависит от электрических эффектов, которые при указанных выше условиях становятся определяющими.

Поступила 16 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Имянитов И. М.* Электризация самолетов в облаках и осадках. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
2. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
3. *Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М.* Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М., «Энергия», 1974.
4. *Гогосов В. В., Фарбер Н. Л.* Уравнения электрогидродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
5. *Ватажин А. Б., Грабовский В. И.* О двумерных электрогазодинамических течениях с учетом инерции заряженных частиц. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
6. *Клячко Л. С.* Уравнения движения пылевых частиц в пылеприемных устройствах. Отопление и вентиляция, 1934, № 4.
7. *Serafini J. S.* Impingement of water droplets on wedges and double-wedge airfoils at supersonic speeds. NASA Rept, 1954, No. 1159.

УДК 629.12.532.5.031

ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОЙ КАЧКЕ ТОНКОГО СУДНА НА МЕЛКОВОДЬЕ

Ю. Л. ВОРОБЬЕВ

(Одесса)

Рост размеров судов стимулирует интерес к исследованию качки на мелководье. Соответствующая гидродинамическая задача оказывается весьма сложной [1], и ее упрощение возможно в случае принятия специальных допущений о форме корпуса судна. Концепция тонкого (митчелевского) судна является одной из наиболее распространенных [2–4], но даже в этом случае для определения потенциала возмущенных скоростей жидкости необходимо получить решение сингулярного интегрального уравнения с весьма сложным ядром.

Ниже получено в замкнутом виде решение гидродинамической задачи о потенциале скоростей, возмущенных продольной качкой тонкого судна на мелководье. Это решение открывает широкие возможности не только для численной реализации, но и для аналитического исследования гидродинамических характеристик качки.

1. Рассмотрим судно, плавающее без хода на мелководье глубиной $h=\mathrm{const}$. Введем связанную с судном прямоугольную систему координат xyz, начало которой расположено на миделе, плоскость xy совпадает с невозмущенной свободной поверхностью воды, ось x направлена к носу судна, ось y – к правому борту, ось z – вниз.

Пусть судно совершает симметричные относительно диаметральной плоскости S_0 малые колебания так, что

$$v_n(x, \pm y, z, t) = f(x, z)\cos\sigma t, \quad y \geqslant 0 \tag{1.1}$$

где v_n – нормальная составляющая скорости точек смоченной поверхности S судна, σ – частота колебаний.

Жидкость считаем идеальной и несжимаемой, а ее возмущенное движение – потенциальным. Ввиду малости колебаний судна применим для описания возмущенного движения жидкости линейную теорию волн. Введем допущение о тонкости судна, полагая, что его ширина мала по сравнению с длиной, а нормаль к S мало отклоняется от оси y. Тогда поверхность S можно приближенно заменить поверхностью S_0. Обозначим через E_0 часть нижнего полупространства $\{0\leqslant z\leqslant h\}$ с вырезом S_0. Эта область ограничена дном $z=h$, областью S_0 и частью Σ_0 плоскости $\{z=0\}$ с исключенным отрезком $\Delta=S_0\cap\{z=0\}=[-L/2,\ L/2]$ оси x. Для потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ имеет место следующая краевая задача:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x,y,z,t)=0, \quad (x,y,z)\in E_0 \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi(x,y,0,t)=0, \quad (x,y)\in \Sigma_0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,\pm 0,\ z,\ t)=\pm f(x,z)\cos\sigma t, \ (x,z)\in S_0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,h,t)=0 \tag{1.5}$$

$$\lim_{r\to\infty}|\operatorname{grad}\Phi(x,y,z,t)|<C_1, \quad (x,y,z)\in E_0, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.6}$$

Потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ должен, кроме того, удовлетворять принципу излучения, согласно которому волны, вызванные на свободной поверхности колебаниями судна, расходятся от него во все стороны. Заметим, что условие (1.4) получается из (1.1) в предположении о тонкости судна.

Будем искать $\Phi(x, y, z, t)$ в виде суммы

$$\Phi(x, y, z, t)=\Phi_C(x, y, z)\cos\sigma t+\Phi_S(x, y, z)\sin\sigma t \tag{1.7}$$

Тогда Φ_C и Φ_S должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in E_0 \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+k\right)U(x,y,z)=0, \quad (x,\ y)\in\Sigma_0, \quad k=\frac{\sigma^2}{g} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,h)=0 \tag{1.10}$$

$$\lim_{r\to\infty}|\operatorname{grad}U(x,y,z)|<C_2, \quad (x,y,z)\in E_0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi_C(x,\pm 0,z)=\pm f(x,z), \ (x,\ z)\in S_0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi_S(x,\pm 0,z)=0, \quad (x,z)\in\{y=0,\ \ 0\leqslant z\leqslant h\} \tag{1.13}$$

В полосе $\{y=0,\ 0\leqslant z\leqslant h\}$ вне S_0 выполняется условие $\partial\Phi_C(x,\ \pm 0,\ z)/\partial y=0$. Следовательно, положив $f(x,\ z)\equiv 0$ вне S_0, можно считать, что (1.12) выполняется всюду при условии $y=0,\ 0\leqslant z\leqslant h$.

2. Определим потенциал $\Phi_C(x, y, z)$. Применив к краевой задаче для $\Phi_C(x, y, z)$ в каждой из областей $y>0$ и $y<0$ метод Фурье, получим полную ортогональную систему функции на отрезке $[0, h]$

$$Z_0(z)=N_0^{-1/2}\operatorname{ch}\alpha_0(z-h),\qquad Z_m(z)=N_m^{-1/2}\cos\alpha_m(z-h) \tag{2.1}$$

$$N_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sh}2\alpha_0 h}{2\alpha_0 h}\right),\qquad N_m=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2\alpha_m h}{2\alpha_m h}\right) \tag{2.2}$$

$m=1, 2, 3, \ldots$

Здесь $\alpha_1<\alpha_2<\ldots$ – последовательность действительных положительных корней трансцендентного уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}\alpha h+k=0 \tag{2.3}$$

α_0 – единственный действительный положительный корень трансцендентного уравнения (2.3).

$$\alpha\operatorname{th}\alpha h=k \tag{2.4}$$

Разложение $\Phi_C(x, y, z)$ по этой системе имеет вид

$$\Phi_C(x,y,z)=F_C{}^0(x,y)Z_0(z)+\sum_{m=1}^{\infty}F_C{}^m(x,y)Z_m(z) \tag{2.5}$$

$$F_C{}^0(x,y)=\frac{1}{h}\int_0^h\Phi_C(x.\,y,z)Z_0(z)\,dz \tag{2.6}$$

$$F_C{}^m(x,y)=\frac{1}{h}\int_0^h\Phi_C(x,y,z)Z_m(z)\,dz \tag{2.7}$$

Подберем $F_C{}^0$, $F_C{}^m$ так, чтобы функция $\Phi_C(x, y, z)$ удовлетворяла (1.8). Учитывая, что система (2.1) ортогональная, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\alpha_0{}^2\right)F_C{}^0=0 \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha_m{}^2\right)F_C{}^m=0 \tag{2.9}$$

Условие (1.12) показывает, что на S_0 нормальная производная потенциала $\Phi_C(x, y, z)$ имеет скачок. Поэтому следует искать решения (2.8), (2.9), удовлетворяющие таким условиям:

$$\frac{\partial}{\partial y}F_C{}^0(x,\pm 0)=\pm\frac{1}{2}\gamma_C{}^0(x),\qquad x\in\Delta \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_C{}^m(x,\pm 0)=\pm\frac{1}{2}\gamma_C{}^m(x),\qquad x\in\Delta \tag{2.11}$$

Решения уравнений (2.8), (2.9), регулярные всюду вне Δ и удовлетворяющие условиям (2.10), (2.11), определятся так [5]:

$$F_C{}^0(x,y)=\frac{1}{4}\int_{-L/2}^{L/2}[N_0(\alpha_0 R)\gamma_C{}^0(\xi)+J_0(\alpha_0 R)b_C(\xi)]d\xi \tag{2.12}$$

$$F_C{}^m(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}K_0(\alpha_m R)\gamma_C{}^m(\xi)\,d\xi,\qquad m=1,2,\ldots \tag{2.13}$$

Здесь $b_C(\xi)$ – произвольная функция, интегрируемая на отрезке Δ; $J_0(\alpha_0 R)$, $N_0(\alpha_0 R)$, $K_0(\alpha_m R)$ – функции Бесселя действительного аргумента, Неймана и Макдональда соответственно, $R=\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$.

Свяжем функции $\gamma_C^0(x)$, $\gamma_C^m(x)$ с граничным значением $f(x, z)$ нормальной производной искомого потенциала. Дифференцируя (2.6), (2.7) по y, выполняя предельный переход $y\to\pm 0$ и учитывая (1.12), (2.10), (2.11), находим

$$\gamma_C^0(x)=\frac{2}{h}\int_0^{T(x)} f(x,z)Z_0(z)\,dz, \quad \gamma_C^m(x)=\frac{2}{h}\int_0^{T(x)} f(x,z)Z_m(z)\,dz \tag{2.14}$$

В качестве верхнего предела интегрирования в (2.14) принято не h, как это требуется формулами (2.6), (2.7), а $T(x)$, поскольку $f(x, z)\equiv 0$ при $z>T(x)$, где $T(x)$ – осадка судна на шпангоуте с абсциссой x.

Используя (2.5), (2.12) – (2.14), получаем

$$\Phi_C(x,y,z)=\frac{1}{2h}Z_0(z)\int_{-L/2}^{L/2}\left[N_0(\alpha_0 R)\int_0^{T(\xi)} f(\xi,\zeta)Z_0(\zeta)\,d\zeta+J_0(\alpha_0 R)\,b_C(\xi)\right]d\xi- \tag{2.15}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z)\int_{-L/2}^{L/2} K_0(\alpha_m R)\int_0^{T(\xi)} f(\xi,\zeta)Z_m(\zeta)\,d\zeta\,d\xi$$

3. Найдем потенциал $\Phi_S(x, y, z)$. Заменяя в (2.15) индекс C на S, а функцию $f_C(\xi, \zeta)$ в соответствии с условием (1.13) – на нуль, получаем

$$\Phi_S(x,y,z)=\frac{1}{2h}Z_0(z)\int_{-L/2}^{L/2} J_0(\alpha_0 R)\,b_S(\xi)\,d\xi \tag{3.1}$$

Здесь $b_S(\xi)$ – произвольная, интегрируемая на отрезке Δ функция.

Формулы (2.15) и (3.1) определяют $\Phi_C(x, y, z)$ и $\Phi_S(x, y, z)$ с точностью до произвольных функций $b_C(\xi)$ и $b_S(\xi)$. Подберем эти функции так, чтобы потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ удовлетворял принципу излучения. На большом удалении от судна, т. е. при $r\to\infty$, потенциалы $\Phi_C(x, y, z)$ и $\Phi_S(x, y, z)$ допускают следующие асимптотические представления [5]:

$$\Phi_C(x,y,z)\sim\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha_0 r}}Z_0(z)\left\{\sin\left(\alpha_0 r-\frac{\pi}{4}\right)\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{T(x)} f(\xi,\zeta)Z_0(\zeta)\,d\zeta\,d\xi+\right. \tag{3.2}$$

$$\left.+\cos\left(\alpha_0 r-\frac{\pi}{4}\right)\int_{-L/2}^{L/2} b_C(\xi)\,d\xi\right\}$$

$$\Phi_S(x,y,z)\sim\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha_0 r}}Z_0(z)\cos\left(\alpha_0 r-\frac{\pi}{4}\right)\int_{-L/2}^{L/2} b_S(\xi)\,d\xi \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (1.7), получим асимптотическое выражение потенциала возмущенного движения жидкости вдали от судна. Это выражение будет соответствовать потенциалу уходящих от судна прогрессивных волн, если положить

$$b_C(\xi)\equiv 0, \quad b_S=-\int_0^{T(\xi)} f(\xi,\zeta)Z_0(\zeta)\,d\zeta \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (2.12) и (3.1), а также используя (1.7), получаем выражение для потенциала $\Phi(x, y, z, t)$

$$\Phi(x,y,z,t)=\left\{\frac{1}{2h}Z_0(z)\int\limits_{-L/2}^{L/2}N_0(\alpha_0R)\int\limits_0^{T(\xi)}f(\xi,\zeta)Z_0(\zeta)\,d\zeta\,d\xi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi h}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m(z)\int\limits_{-L/2}^{L/2}K_0(\alpha_mR)\int\limits_0^{T(\xi)}f(\xi,\zeta)Z_m(\zeta)\,d\zeta d\xi\right\}\cos\sigma t-$$
$$-\left\{\frac{1}{2h}Z_0(z)\int\limits_{-L/2}^{L/2}J_0(\alpha_0R)\int\limits_0^{T(\xi)}f(\xi,\zeta)Z_0(\zeta)\,d\zeta d\xi\right\}\sin\sigma t \tag{3.5}$$

Отметим, что определение потенциала возмущенных скоростей жидкости – это наиболее сложная часть гидродинамической теории качки. Гидродинамические силы и моменты, которые действуют на качающееся судно, легко определяются по известному потенциалу скоростей, а интегрирование уравнений движения выполняется элементарно [6].

Поступила 1 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаскинд М. Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М., «Наука», 1973.
2. *Ремез Ю. В.* Краевая задача гидродинамической теории качки судна типа Мичелля при конечной глубине жидкости. Докл. к 16-й научно-технической конференции по теории корабля. Л., 1966.
3. *Питерс А. С., Стокер Дж. Дж.* Движение корабля как свободно плавающего твердого тела на волнении. В сб. «Теория поверхностных волн». М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. *Newman J. N.* A linearised theory for the motion of a thin ship in Regular waves. J. Ship Res., 1961, vol. 5, No. 1.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
6. *Басин А. М.* Качка судов. М., «Транспорт», 1969.

Технический редактор *Е. В. Синицына*

Сдано в набор 17.11.78. Подписано к печати 24.01.79 Т-01321 Формат бумаги 70×108 1/16
Высокая печать Усл. печ. л. 18,2 Уч.-изд. л. 20,1 Бум. л. 6,5 Тираж 1975 экз. Зак. 1139

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10