УДК 538.4

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЕ ТЕЛО В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. ПАВЛОВ

(Усть-Каменогорск)

Предложен приближенный метод определения силы, действующей на сверхпроводящее тело в неоднородном магнитном поле, а также на быстро вращающееся тело конечной проводимости. Для тела, имеющего форму шара, найдено конкретное выражение для этой силы в обоих указанных случаях и рассмотрена задача о равновесии тяжелого сверхпроводящего шара в поле магнитного диполя. С помощью гидродинамической аналогии записаны формулы главного вектора и главного момента сил, действующих на сверхпроводящий профиль крыла Жуковского в однородном магнитном поле.

1. Пусть в неоднородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}(x, y, z)$ находится сверхпроводящий шар радиуса a и необходимо определить действующую на него силу. Метод решения подобной задачи изложен в [1], где предлагается решать уравнение Лапласа для напряженности магнитного поля во внутренней и внешней областях тела. Однако решение такой задачи во внешней области, где поле неоднородно, затрудняется формулировкой условий на бесконечности. Чтобы обойти эту трудность, в данной работе предлагается решать уравнение Лапласа в приближении слабонеоднородного поля, т. е. при решении этого уравнения внешнее поле в окрестности тела считать однородным.

В такой постановке задача по определению магнитного поля существенно упрощается и позволяет воспользоваться уже известными решениями. Далее, после того как магнитное поле найдено, нужно определить магнитный момент тела $\mathbf{m}$, а затем, считая поле неоднородным, вычислить искомую силу по формуле $\mathbf{F}=\nabla(^1/_2\mathbf{mB})$.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Известно, что магнитное поле не проникает в сверхпроводник, т. е. сверхпроводник является идеальным диамагнетиком. Поэтому граничная задача для магнитного поля совпадает с граничной задачей для поля скоростей идеальной жидкости, обтекающей такое же по форме тело (задача Неймана для уравнения Лапласа). Следовательно, можно воспользоваться гидродинамическими решениями при решении задач магнитостатики сверхпроводников.

Запишем магнитный момент тела, воспользовавшись решением, взятым из [2]: $\mathbf{m}=-2\pi a^3\mu_0^{-1}\mathbf{B}_0$, где $\mathbf{B}_0$ – индукция магнитного поля на бесконечности, если поле считать однородным, μ_0 – магнитная постоянная вакуума.

В однородном поле сила $\mathbf{F}=\nabla(^1/_2\mathbf{mB})$ равна нулю, как и в гидродинамической задаче. Однако в неоднородном поле на шар будет действовать сила

$$\mathbf{F}=-{}^3/_4\tau\mu_0^{-1}\nabla(\mathbf{B}^2) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{B}$ – индукция невозмущенного магнитного поля в точке, совпадающей с центром шара, τ – объем шара.

В качестве примера применения силы (1.1) определим положение равновесия тяжелого сверхпроводящего шара в магнитном поле, которое создается диполем, характеризуемым моментом $\mathbf{M}$, расположенным вертикально. Так как сила $\mathbf{F}$ и сила тяжести являются потенциальными силами, то потенциальную энергию тела в рассматриваемом случае запишем в виде

$$U={}^3/_4\tau\mu_0^{-1}B^2+mgr\cos\theta,\qquad B^2={}^1/_{16}\mu_0^2M^2\pi^{-2}r^{-6}(1+3\cos^2\theta)$$

Здесь r и θ – сферические координаты, выбранные следующим образом: центр сферы совпадает с центром диполя, ось z, от которой отсчитывается угол θ, направлена вертикально вверх и совпадает с вектором $\mathbf{M}$.

Условием устойчивого равновесия тела является минимум его потенциальной энергии. Используя это условие, получаем, что равновесие шара будет устойчивым при

$$\theta=0,\qquad r^7=9\mu_0M^2/8\pi^2\rho g \tag{1.2}$$

Итак, шар находится в устойчивом равновесии на оси z, на расстоянии r_* от диполя, определяемом (1.2).

Выражение (1.1) получено для шара. Когда в магнитное поле будет помещено тело другой формы, силу можно определить аналогично.

2. Рассмотрим силу, действующую на вращающееся проводящее тело, в магнит-

ном поле. Пусть шар радиуса a вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, составляющей угол α с индукцией поля **B**. Величина $\delta=\sqrt{2/\mu_0\sigma\omega}$ называется глубиной проникновения магнитного поля в проводник. Силу, действующую на шар, будем определять в двух предельных случаях ($\eta=\delta/a\ll1$ и $\eta\gg1$).

При условии $\eta\ll1$ магнитный момент шара с точностью до η находится следующим образом:

$$m_1=4\pi\mu_0^{-1}(\alpha'B_1-\alpha''B_2),\qquad m_2=4\pi\mu_0^{-1}(\alpha'B_2-\alpha''B_1)$$
$$\alpha'=-{}^1/_2a^3(1-{}^3/_2\eta),\qquad \alpha''={}^3/_4a^3\eta$$

где m_i, B_i – проекции магнитного момента и индукции невозмущенного магнитного поля на подвижные оси координат.

Сила, действующая на шар, равна

$$\mathbf{F}={}^3/_8\tau\mu_0^{-1}(\eta-2)\sin^2\alpha\nabla(B^2) \tag{2.1}$$

Если пренебречь здесь слагаемым, содержащим η, то получим выражение, близкое к (1.1). Поскольку выражение (2.1) имеет вид, аналогичный (1.1), то ясно, что вращающееся тяжелое тело можно заставить висеть в магнитном поле подобно сверхпроводнику, подбирая величину магнитного поля и скорость вращения. Изменяя угловую скорость вращения или индукцию поля, можно регулировать величину подъемной силы, действующей на тело.

При $\eta\gg1$ коэффициенты α' и α'' равны [3]

$$\alpha'=-{}^4/_{315}a^3\eta^{-4},\qquad \alpha''={}^1/_{15}a^3\eta^{-2}$$

и действующая на шар сила **F** с точностью до η^{-4} равна нулю. Если вместо шара взять эллипсоид или другое несимметричное тело, то результирующая сила, действующая на тело, уже не будет равна нулю. В самом деле, магнитный момент вращающегося эллипсоида равен [4] $\mathbf{m}=(\lambda)(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B})$, где (λ) – тензор с компонентами

$$\lambda_{11}=\frac{\sigma\tau a_2^2a_3^2}{5(a_2^2+a_3^2)},\qquad \lambda_{22}=\frac{\sigma\tau a_1^2a_3^2}{5(a_1^2+a_3^2)},\qquad \lambda_{33}=\frac{\sigma\tau a_1^2a_2^2}{5(a_1^2+a_2^2)}$$

Здесь τ – объем эллипсоида, σ – проводимость. При $\omega_1=\omega_2=0$ сила **F** будет иметь вид

$$\mathbf{F}={}^1/_4\omega(\lambda_{22}-\lambda_{11})\sin^2\alpha\sin2\omega t\nabla(B^2) \tag{2.2}$$

Видим, что $\mathbf{F}\neq0$ при $\lambda_{11}=\lambda_{22}$, т. е. $a_1\neq a_2$, и является периодической функцией времени.

Вращение тела вокруг оси, не совпадающей с силовой линией, не может продолжаться сколько угодно долго. Тело либо поворачивается осью вращения по полю, либо перестает вращаться, поэтому силы вида (2.1) и (2.2) исчезают, как только тело перестает вращаться.

Погрешность формул (1.1), (2.1) и (2.2) всецело определяется погрешностью магнитного момента, которая обусловлена заменой неоднородного поля однородным, т. е. тем, что при разложении функции $\mathbf{B}(x, y, z)$ в ряд Тейлора в окрестности шара, были отброшены все члены ряда, кроме первого. Отсюда погрешность этих формул будет

$$\varepsilon=\left|\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\rho}\right)_0\right|\frac{\rho}{|\mathbf{B}|}$$

где ρ – расстояние, отсчитанное от центра шара. Учитывая, что $B\sim r^{-3}$, погрешность формулы (1.2) находим в виде $\varepsilon=3a/r$. При малых r, когда погрешность становится большой, описанный метод непригоден и для нахождения магнитного момента шара необходимо воспользоваться методом инверсии, который дает следующее: $m=Ma^3/r^3$, $d=a^2/r$, где d – расстояние от центра шара до момента m. Сила взаимодействия между моментами m и M определяется как обычно.

Поступила 21 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябов А. Б.* Определение главного вектора и главного момента сил, действующих на сверхпроводящее тело в магнитном поле. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. *Павлов А. М., Сапа В. А.* Движение слабопроводящего твердого тела около неподвижной точки в магнитном поле. В сб. «Математика и механика», вып. 7, ч. 2. Алма-Ата, 1972.