

о фактической реализации принятой модели течения. Определяя значение  $\lambda$  в формуле (2.3) из результатов численного расчета при  $\sqrt{K}=0.277$  и  $M_\infty=3$ , получаем  $\lambda \approx 1$ . На фиг. 1 дано сравнение результатов численных расчетов М. А. Коваля отхода контактной поверхности в критической точке с зависимостью

$$(2.4) \quad y_c(0) = \sqrt{K/2}$$

(точками 1 обозначены результаты численных расчетов, линией — зависимость (2.4)). Приведенное сравнение показывает хорошее совпадение полученного приближенного решения с численными расчетами при  $\sqrt{K} \leq 0.7$ . Численные расчеты и эксперименты [4] показали, что величина отхода контактной поверхности  $y_c(0)$ , выраженная как функция  $K$ , практически не зависит от  $M_\infty$  (данные при  $M_\infty=2$  и 3 представляются единой кривой). Расчеты обтекания торца при  $K=0.45$  в диапазоне изменения  $M_\infty$  от 2 до 8 свидетельствуют о том же. Отсюда следует, что найденная здесь константа  $\lambda$  слабо зависит от определяющих параметров задачи по крайней мере в указанном выше диапазоне параметров. На фиг. 2 приведено сравнение численного расчета формы контактной поверхности при  $\sqrt{K}=0.277$ , проведенного М. А. Ковалем, с приближенным решением (2.3) при  $\lambda=1$ . Линией 1 обозначено численное решение, точками 2 — приближенное решение (2.3). Форма контактной поверхности в асимптотическом решении удовлетворительно согласуется с численным решением почти вплоть до угловой точки.

В заключение автор благодарит В. П. Стулова за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 27 XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стулов В. П. Сильный вдув на поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
2. Левин В. А. Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
3. Гершбейн Э. А. К асимптотическому решению уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
4. Коваль М. А., Стулов В. П., Швец А. И. Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел с сильным распределенным вдувом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 3.

УДК 533.6.011.72

### ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ВБЛИЗИ ЦЕНТРА (ОСИ) СИММЕТРИИ ПРИ ВЫДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НА ПЕРИФЕРИИ

В. П. ПАРХОМЕНКО

(Москва)

Исследование течения газа вблизи центра (оси) симметрии при выделении энергии на периферии интересно с точки зрения получения экстремальных значений давления, плотности, энергии в центре (на оси). Обнаружено, что даже при начальных условиях, далеких от автомоделных, поле течения вблизи центра (оси) симметрии описывается решением автомоделной задачи о сильной сходящейся к центру (оси) симметрии волне, полученным в [1, 2]. Значения газодинамических величин вблизи центра (оси) симметрии существенно зависят от соотношения между кинетической и внутренней энергиями, выделившимися в начальный момент. Выход на автомоделный режим в сферически-симметричном случае происходит гораздо раньше, чем в цилиндрическом.

1. Постановка и решение рассматриваемой задачи для цилиндрического и сферического случаев аналогичны, поэтому далее под термином «центр» подразумевается центр или ось симметрии.

При движении газа к центру происходит резкое повышение давления, температуры и энергии при достижении ударной волной центра.

В автомодельной постановке задача о сжатии к центру сильной ударной волны была решена в [1, 2] для  $\kappa=7/5$  и  $\kappa=5/3$  ( $\kappa$  — отношение теплоемкостей газа). В [3] решение для сферического случая было распространено на все значения  $\kappa$ .

В такой постановке при достижении ударной волной центра значения давления и скорости газа в центре бесконечно велики, а плотность конечна, но больше предельного ударного сжатия. Их распределение по радиусу в этот момент:  $p \sim 1/r^{2\mu}$ ,  $u \sim 1/r^\mu$ ,  $\rho = \text{const}$ , где  $p$  — давление,  $u$  — скорость,  $\rho$  — плотность газа,  $r$  — расстояние от центра,  $\mu$  — показатель автомодельности (постоянная величина). Для  $\kappa=7/5$   $\mu \approx 0.395$  в сферическом случае и  $\mu \approx 0.197$  в цилиндрическом.

В численном счете, как и в эксперименте, такого результата достичь невозможно, но значительный рост давления и скорости вблизи центра наблюдается.

Задача о сжатии ударной волны к центру рассматривалась В. В. Марковым и Б. В. Пуятиным<sup>1</sup>. Тогда же решалась В. И. Сахаровым<sup>2</sup> задача о схлопывании при наличии пустой полости вблизи центра. Авторы любезно предоставили возможность ознакомиться с содержанием работ. Ими рассматривалось течение газа после резкого повышения давления в тонком слое при наличии противодавления, для нескольких значений отношения теплоемкостей  $\kappa$ . Наблюдался выход на автомодельный режим — сильную сходящуюся волну. Вероятно, в результате влияния противодавления этот выход удалось проследить, только прибегнув к выделению узкой зоны вблизи фронта, сужающейся с приближением к центру. В этой области и осуществлялся автомодельный режим.

2. Численно исследовался следующий класс задач. Пусть невязкий, нетеплопроводный, совершенный газ с отношением теплоемкостей  $\kappa=7/5$  занимает все пространство и в начальный момент  $\rho=1$ ,  $u=0$ ,  $p=0$  ( $r < r_0$ ,  $r > r_1$ )  $\rho = \rho_0(r)$ ,  $u = u_0(r)$ ,  $p = p_0(r)$  ( $r_0 \leq r \leq r_1$ ), где  $r_0$ ,  $r_1$  — постоянные величины,  $\rho_0(r)$ ,  $p_0(r)$ ,  $u_0(r)$  — заданные функции  $r$ , причем  $u_0(r) < 0$ , т. е. скорость газа направлена к центру. Течение газа описывается системой уравнений Эйлера [4] и уравнением адиабатичности в частице  $p/\rho^\kappa = \text{const}$ . Для их решения был использован численный метод сквозного счета с равномерной эйлеровой сеткой [5].

Если в качестве  $u_0(r)$ ,  $p_0(r)$  и  $\rho_0(r)$  взять решение автомодельной задачи о сходящейся к центру сильной ударной волне и при этом считать  $r_1$  равным радиусу границы области счета, то расчеты показывают устойчивое сохранение автомодельности. Если в качестве  $u_0(r)$ ,  $p_0(r)$  и  $\rho_0(r)$  берутся слабо отклоняющиеся от автомодельных распределения (например, постоянные вплоть до границы области счета), то решение этой задачи быстро выходит на тот же автомодельный режим (для указанного примера это происходит, когда ударная волна проходит расстояние  $\sim 2/3 r_0$ ).

Заранее предсказать детальное поведение решения задачи с начальными условиями, существенно отличающимися от автомодельных, трудно, но проведенные расчеты дают следующую картину течения.

Пусть  $(r_1 - r_0)/r_0 \ll 1$ , т. е. начальные возмущения заданы только в узкой области. Этот случай интересен для практики. При этом в начальные моменты времени движение газа резко отличается от упомянутого выше автомодельного, уже хотя бы потому, что развиваются две ударные волны — сходящаяся к центру и расходящаяся, и при этом одна часть газа движется к центру, а другая разлетается. В автомодельном решении газ всюду движется к центру и только на бесконечности его скорость равна нулю. Однако можно ожидать, что и в этом случае, когда сходящаяся ударная волна достигает расстояний от центра, малых по сравнению с  $r_0$ , реализуется автомодельное решение задачи в области вблизи центра.

При задании начальных условий в тонком слое детальный вид зависимостей  $u_0(r)$ ,  $p_0(r)$  и  $\rho_0(r)$  не важен и не сказывается на движении газа по прошествии достаточно большого времени, поэтому будем считать эти величины постоянными. Кроме того, положим  $\rho_0(r) = 1$ , т. е. плотность газа в начальный момент времени всюду постоянна.

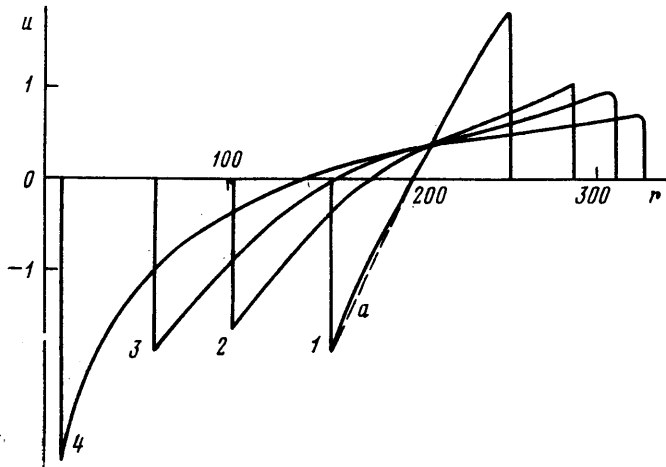
Течение газа при таких начальных условиях существенно зависит от соотношения между кинетической  $K_0$  и внутренней  $E_0$  энергиями в начальный момент ( $v=1$  соответствует цилиндрической симметрии,  $v=2$  — сферической):

$$K_0 = \frac{v}{v+1} \pi (r_1^{v+1} - r_0^{v+1}) \rho_0 u_0^2, \quad E_0 = \frac{2v}{v+1} \frac{\pi}{\kappa+1} (r_1^{v+1} - r_0^{v+1}) \rho_0$$

<sup>1</sup> Пуятин Б. В. О распаде кольцевой газовой области. Дипломная работа. Мех.-мат. фак. МГУ, 1974.

<sup>2</sup> Сахаров В. И. Задача о разлете кольцевого слоя сильно сжатого совершенного газа в газовой среде в вакуумной полости. Дипломная работа. Мех.-мат. фак. МГУ, 1974.

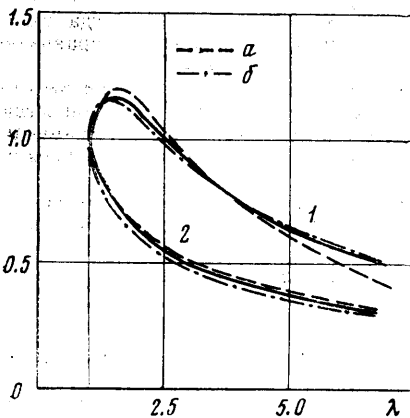
После выделения энергии развиваются две ударные волны: одна расходящаяся — она довольно быстро затухает, вторая сходящаяся — ее амплитуда сначала уменьшается, затем волна усиливается, достигает центра и отражается. Если  $K_0/E_0 < 1$ , то вначале распределения скорости, плотности и давления в расходящейся и сходящейся волнах практически симметричны относительно слоя, где выделяется энергия. Когда эти волны прошли расстояния, малые по сравнению с  $r_0$ , но достаточно большие, чтобы на течении не сказывался вид начальных данных, волны описываются асимптотикой сильного плоского взрыва [6]. Такой режим течения



Фиг. 1

сохраняется до того момента, когда на движение сходящейся волны начинает заметно влиять ее сферичность (цилиндричность). Это приводит к постепенному усилению сходящейся волны. На этом этапе движение газа не является автомодельным. Когда  $r_s/r_0 \ll 1$  ( $r_s$  — радиус фронта сходящейся ударной волны), значения давления и скорости на фронте волны резко возрастают по мере уменьшения  $r_s$ , и течение газа около фронта описывается автомодельным решением задачи о сильной сходящейся к центру ударной волне. Начальными условиями при этом определяется момент выхода на указанную асимптотику и абсолютные значения давления и скорости на фронте.

Если в начальный момент  $K_0/E_0 \sim 1$ , то существенно меняется начальная стадия течения. Уже в начальный момент газ внутри слоя  $r_0 \leq r \leq r_1$  имеет скорость, направленную к центру. Это приводит к тому, что расходящаяся волна гораздо слабее сходящейся. На небольшом расстоянии от шарового (цилиндрического) слоя сходящаяся волна описывается асимптотикой, которая реализуется в задаче о коротком ударе [7]. Эта асимптотика соответствующей плоской задаче переходит затем в асимптотику задачи о сильном взрыве [8]. В сферическом (цилиндрическом) случае выход на режим сильного взрыва не осуществляется — раньше начинает сказываться кривизна фронта. Затем следует неавтомодельная стадия, и, наконец, выход на автомодельный режим — сильную сходящуюся к центру волну. Это происходит также при  $r_s \ll r_0$ . При этом движение фронта сходящейся ударной волны до центра меньше, чем в случае, когда  $K_0/E_0 < 1$ , а также в несколько раз больше давление на фронте вблизи центра.

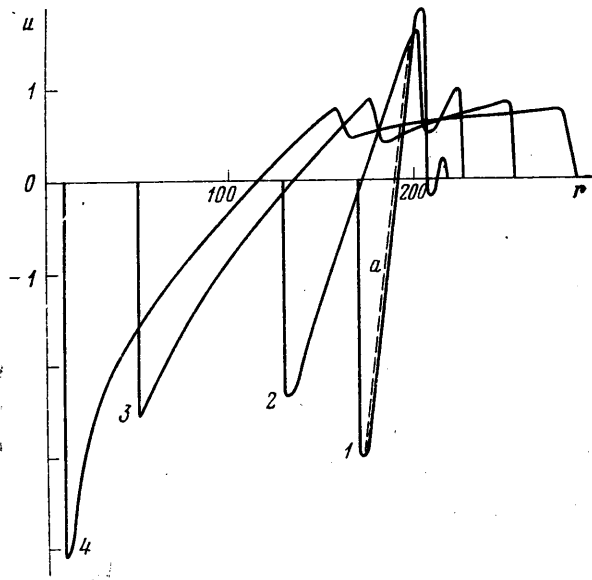


Фиг. 2

Полные начальные энергии газа в первом и втором случаях равны.

3. На фиг. 1, 2 изображены результаты численного расчета (сферическая симметрия) со следующими значениями параметров:  $r_0=200$ ,  $r_1=210$ ,  $p_0=21$ ,  $u_0=0$ ,  $\rho_0=1$ ,  $(r_1-r_0)/r_0=0.05 \ll 1$ ,  $K_0/E_0=0$ .

На фиг. 1 кривые 1-4 определяют распределение  $u(r)$  в моменты времени  $9.039 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.437 \cdot 10^{-2}$ ,  $3.532 \cdot 10^{-2}$ ,  $4.772 \cdot 10^{-2}$  соответственно. В соответствии с приведенными выше соображениями при  $100 < r_s < 190$  решение следует асимптотике плоского сильного взрыва (в достаточно большой области вблизи фронта), изображенной линией  $a$ . При  $r_s < 150$  значения  $u$  и  $p$  на фронте возрастают со временем, при  $r_s < 10$  решение выходит на автомодельный режим — сильную сходящуюся к центру волну. При  $r_s=3$   $p_s=44$ ,  $u_s=-4$ , где  $p_s$  — давление,  $u_s$  — скорость на фронте ударной волны. На фиг. 2 изображены давление и скорость газа, отнесенные к соответствующим величинам на фронте в зависимости от  $\lambda=r/r_s$ . Линиями 1, 2 изображены



Фиг. 3

автомодельные решения, соответствующие сильной сходящейся волне (1 — давление, 2 — скорость). Линиями  $a$ ,  $b$  изображены результаты численного расчета для моментов времени  $4.846 \cdot 10^{-2}$ ,  $4.855 \cdot 10^{-2}$  соответственно. Как видно из фиг. 2, отклонения неавтомодельных решений от автомодельных не превышают 10%. Сравнительно большие отклонения кривых давления от автомодельного решения вблизи фронта объясняются особенностями схемы, в которой давление определяется разностью двух величин.

На фиг. 3 показаны результаты расчета также сферического случая с параметрами  $r_0=200$ ,  $r_1=210$ ,  $p_0=55$ ,  $u_0=-9$ . При этом  $K_0/E_0=2.86$ . Полная энергия газа в начальный момент в первом и втором примерах расчета совпадает. Во втором случае существенную роль играет наличие кинетической энергии.

Наиболее характерно в этом случае распределение скорости газа во времени и пространстве. На фиг. 3 приведена зависимость скорости газа от расстояния  $r$ . Кривым 1-4 соответствуют моменты времени  $4.010 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.144 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.859 \cdot 10^{-2}$ ,  $3.516 \cdot 10^{-2}$ . Видно, что при  $150 < r_s < 190$  в отличие от первого примера решение следует асимптотике короткого удара (линия  $a$ ). Это объясняется тем, что наличие начальной скорости приводит к отрыву газа за сходящейся ударной волной от остальной массы газа и образованию мощной волны разрежения [8]. При  $r_s < 120$  значения скорости и давления на фронте начинают расти, при  $r < 15$  осуществляется режим автомодельной сильной сходящейся к центру ударной волны. Однако при  $r_s=3$   $p_s=150$ , что в 3.4 раза больше, чем при отсутствии начальной скорости в предыдущем случае. Энергия, заключенная внутри сферы радиуса  $r=10$ , во втором случае в 3 раза больше, чем в первом. Кроме того, ударная волна в первом случае достигает центра за время  $t_1 \approx 0.485$ , а во втором — за время  $t_2=0.250$ , которое в 1.9 раза меньше  $t_1$ .

Характер поведения гидродинамических величин в цилиндрическом случае аналогичен сферическому, но выход на автомодельный режим осуществляется, когда ударная волна существенно ближе к оси симметрии, чем в сферическом случае. Например, при  $u_0=0$ ,  $K_0=0$ ,  $E_0=200$  это происходит при  $r_s/r_0 \sim 1/200$ .

Расчеты вариантов с другими значениями параметров  $g_0$ ,  $r_1$ ,  $u_0$ ,  $p_0$  дают аналогичные результаты. Они представлены для сферического и цилиндрического случаев в таблице.

Здесь  $w_0 = \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 + p_0 / (\kappa - 1)$  — плотность полной начальной энергии,  $w$  — плотность полной энергии газа в области  $r \leq 10$ ,  $\delta$  — отношение полной энергии газа внутри области  $r \leq 10$  к полной начальной энергии. Данные приведены для моментов времени, когда  $r_s=3$  в сферическом случае и когда  $r_s=0.4$  в цилиндрическом.

$\nu=1$					$\nu=2$				
$E_0+K_0$	$K_0$	$E_0$	$w/w_0$	$\delta \cdot 10^2$	$E_0+K_0$	$K_0$	$E_0$	$w/w_0$	$\delta \cdot 10^3$
230	0	230	2	5	52.5	0	52.5	3.5	3.3
140	0	140	2	5	7.8	0	7.8	3	2.4
160	0	160	2	5	54.2	40.5	13.7	12	9.6
240	40	200	3.5	8	30.5	18	12.5	9	7.2
232	72	160	3.7	9	52.5	31.2	21.3	8.9	6.9

Из анализа приведенных величин ясно видно влияние начальной скорости на конечные значения энергии и давления газа.

Следует отметить, что решение автомодельной системы уравнений чрезвычайно чувствительно к изменению показателя автомодельности  $\mu$  в окрестности значения, соответствующего сильной сходящейся волне. При его увеличении даже на 0.005 безразмерные  $\rho/\rho_s$  и  $p/p_s$  резко возрастают даже при небольших  $r/r_s > 1$ , при уменьшении — резко падают. В обоих случаях решение существует только до некоторого конечного значения  $r/r_s$ .

Это позволяет весьма точно задать поле течения неавтомодельной задачи при приближении фронта к центру при помощи автомодельного решения системы уравнений Эйлера с  $\mu=0.395 \pm 0.005$  (сферический случай) или  $\mu=0.197 \pm 0.005$  (цилиндрический случай).

Автор благодарит О. С. Рыжова и С. П. Попова за полезные обсуждения и внимание к работе.

Поступила 29 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. Luftfahrtforschung, 1942, Bd 19, Nr 9.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
3. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. Усп. матем. н., 1963, т. 18, вып. 2.
4. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
5. Boris J. P., Book D. L. Flux — corrected transport. I. Shasta, a fluid transport algorithm that works. J. Comput. Phys., 1973, vol. 14, No. 1.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
7. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
8. Державина А. И. Об асимптотике неустановившегося движения газа под действием импульса. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.