насыщенности. В связи с этим при расчетах можно пользоваться формулой относительной проницаемости для воды, приведенной, например, в [1]: $k_1(s, c)=(1-s/0.8)^{3.5}$ $(s\leqslant 0.8)$, $k_2(s, c)=0$ $(s>0.8)$.

На фиг. 2 приводятся экспериментальные данные и эмпирические кривые для газа при концентрации пенообразователя 0.002, 0.05 и 0.1% (кривые *2*, *3* и *4* соответственно). Из представленных данных видно, что присутствие небольших количеств пенообразователя приводит к сильной деформации кривых относительных проницаемостей для газа. Такое изменение фазовой проницаемости для газа в присутствии растворов поверхностно-активных веществ следует объяснить пенообразованием в пористой среде, при котором перепад давления расходуется также на образование и разрушение высокоразвитой поверхности пены.

Формула для проницаемости газовой фазы, удобная для расчетов и достаточно хорошо описывающая экспериментальные данные для всех исследованных значений концентраций, имеет вид

$$k_2(s, c)=0 \quad (s\leqslant 0.1), \quad k_2(s, c)=(4-3s)\left(\frac{s-0.1}{0.9}\right)^{\alpha} \quad (s>0.1) \tag{2}$$

$$\alpha=3.5+12\ln[1+(100c)^{1.5}]$$

Формула (2) по структуре аналогична формуле, приведенной в [1] для системы газ – вода.

Среднеквадратичные отклонения экспериментальных точек от полученной эмпирической кривой для концентраций 0.002 и 0.1% равны соответственно 0.053 и 0.045 (при аппроксимации многочленов четвертого порядка по методу наименьших квадратов – 0.025 и 0.095).

По полученным эмпирическим формулам рассчитывалась фронтовая насыщенность s_f (скачок насыщенности) при вытеснении газом растворов пенообразователя по схеме [2]. Ниже приводятся расчетные и экспериментальные значения фронтовой насыщенности для некоторых значений концентрации.

c, %	0	0.002	0.02	0.05	0.1	0.3	0.5	1.0
s_f расчетная	0.29	0.36	0.69	0.75	0.78	0.79	0.80	0.80
s_f экспериментальная	0.15	0.21	0.55	0.65	0.72	0.74	0.76	0.78

Таким образом, при совместной равновесной фильтрации газа и раствора пенообразователя относительная проницаемость для газа зависит от насыщенности пористой среды и абсолютной концентрации пенообразователя, а вытеснение пенообразующей жидкости газом при концентрации $c\geqslant 0.05\%$ можно считать практически поршневым.

Поступила 29 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А., Чэнь Чжун-сян.* Об определении воздухонасыщенности и водонасыщенности в переходной зоне при просачивании воды в почву. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
2. *Стклянин Ю. И., Томельгас В. А.* О движении скачков насыщенности при фильтрации двухкомпонентных сжимаемых жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.

УДК 533.6.011

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ОКОЛОЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

В. Н. ДИЕСПЕРОВ

(Москва)

В [1] рассматривалось околозвуковое течение химически активной смеси, в которой происходит единственная реакция. Для таких течений можно определить две характерные скорости звука (замороженную и равновесную) и соответственно этому два различных трансзвуковых режима. Наиболее интересным с математической и физической точек зрения оказалось изучение равновесного трансзвукового режима. В теории малых возмущений трансзвуковые течения в отличие от дозвуковых и сверхзвуковых в первом приближении описываются нелинейными уравнениями. Возникающие при этом возмущения локализованы в узкой вытянутой области, в которой могут находиться ударные волны с отличной от нуля кривизной. Построение нелинейной асимптотической теории таких течений связано с введением трех независимых малых параметров. Параметр ε будет характеризовать амплитуду изменения продольной скорости, давления и плотности, Δ – отношение продольного характерного размера возмущенной области к ее поперечному, N_t – отношение макроскопического времени к характерному времени протекания химической реакции. В случае равновесных течений параметр $N_t \gg 1$ и играет роль, аналогичную роли продольной вязкости в течениях инертного газа. Порядок возмущения поперечной скорости в трансзвуковых течениях намного меньше продольной. Различные связи между малыми параметрами описывают различные процессы в трансзвуковых течениях. Наиболее интересен случай, когда $\varepsilon \sim N_t^{-1} \sim \Delta$. В этом случае получающиеся уравнения одновременно учитывают как быстрые процессы, происходящие в ударной волне, обусловленной химической реакцией, так и медленные газодинамические процессы во всем поле течения.

Поле скоростей описывается квазиэллиптическим уравнением третьего порядка, совпадающим с точностью до коэффициентов с ВТ (вязким трансзвуковым) уравнением. Впервые оно было получено Липманом – Ашкенасом – Коулом [2]. Это позволило установить точную аналогию между влиянием химических превращений и так называемой «продольной» вязкости и теплопроводности на структуру поля скоростей [1]. Свойства автомодельных решений полного и линеаризованного ВТ уравнения изучались в [3, 4]. С помощью автомодельных решений была построена асимптотическая картина обтекания тел вращения [1, 3]. Теорема существования и единственности граничной задачи обтекания в плоском случае для линеаризованного неоднородного ВТ уравнения была доказана в [6]. В случае осесимметричных течений теорема существования и единственности была доказана для однородного ВТ уравнения в [5].

Теория второго приближения для звуковых течений инертного вязкого теплопроводящего газа рассматривалась в [7]. Цель настоящей работы – показать, что аналогию, установленную в первом приближении, можно провести также и во втором приближении, несмотря на то что наличие ударных волн в течении предполагает резкие изменения всех параметров потока.

Равновесный трансзвуковой режим характеризуется таким процессом распространения малых возмущений, в котором сродство химической реакции равняется нулю.

Уравнения неразрывности, импульсов, переноса тепла, скорости химической реакции, которым подчиняются стационарные движения n-компонентной газовой смеси с одной химической реакцией, возьмем в той форме, в которой они приведены в [1]. При этом (x, r) – система цилиндрических координат, ось x которой совпадает с направлением вектора скорости невозмущенного потока; v_x и v_r – составляющие вектора скорости вдоль этих осей, ρ – плотность, p – давление, s – удельная энтропия, T – температура, q – полнота химической реакции, Q – сродство химической реакции, $\dot{q}$ – скорость химической реакции, a_e – равновесная скорость звука. Изменение состава смеси определяется полнотой химической реакции q.

Будем считать, что в каждой точке пространства скорости всех компонентов одинаковы и мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем равновесном звуковом потоке. Значения параметров в нем будем отмечать звездочкой. Пусть независимыми термодинамическими переменными будут ρ, Q, s.

В состоянии равновесия $Q=0$. Вместе с химическим сродством при равновесии обращается в нуль также скорость реакции $\dot{q}$. Это следует из соотношения Онзагера, связывающего линейным образом скорость химической реакции и сродство

$$\dot{q} = -H(\rho, s)Q$$

Здесь функция $H=H(\rho, s)$ играет роль коэффициента пропорциональности. Из второго закона термодинамики следует, что $H>0$. При рассмотрении течений с химическими реакциями возникает числовой параметр N_t, связанный с характерным временем протекания реакции τ. Величины N_t и τ определяются значением коэффициента пропорциональности H в уравнении Онзагера

$$N_t = \frac{L}{\tau a_{e*}} = \frac{p_* L}{\rho_* q_*^2 a_{e*}} H_*$$

Здесь через L обозначен характерный размер в направлении оси x. В равновесном трансзвуковом потоке $N_t \gg 1$.

Так же как и в [1], рассмотрение будет проводиться в рамках нелинейной асимптотической теории возмущения, которой обычно пользуются при изучении трансзвуковых течений инертного газа. Как известно, оно основывается на постулате о неравноправной роли координатных осей x и r.

В соответствии с этим введем следующие независимые безразмерные переменные и разложения для искомых функций:

$$
\begin{gathered}
x=Lx', \qquad r=(L/\Delta)r' \\
v_x=a_{e*}[1+\varepsilon(v_{x1}+\delta v_{x2}+\ldots)], \qquad v_r=a_{e*}\varepsilon\Delta(v_{r1}+\delta v_{r2}+\ldots) \\
p=p_*[1+\varepsilon(p_1+\delta p_2+\ldots)], \qquad \rho=\rho_*[1+\varepsilon(\rho_1+\delta\rho_2+\ldots)] \\
a_e=a_{e*}[1+\varepsilon(a_{e1}+\delta a_{e2}+\ldots)] \\
Q=\frac{\varepsilon}{N_t}\frac{p_*}{q_*\rho_*}(Q_1+\delta Q_2+\ldots), \qquad \dot q=\frac{q_*a_*}{L}(\omega_1+\delta\omega_2+\ldots) \\
q=q_*[1+\varepsilon(q_1+\delta q_2+\ldots)], \qquad s=s_*\left[1+\frac{\varepsilon^2}{N_t}s_1+\ldots\right]
\end{gathered} \tag{1}
$$

Числовые параметры ε, Δ, δ по величине много меньше единицы. Для дальнейших исследований равновесных трансзвуковых течений удобно преобразовать уравнение переноса тепла, исключив из него плотность, давление и энтропию с помощью уравнений неразрывности, импульсов в проекции на оси x и r и термодинамического соотношения

$$
ds=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{Q,\rho}\left[dp-\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}dQ-a_e^2\,d\rho\right], \qquad a_e^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{Q,s}
$$

В результате получаем

$$
\begin{gathered}
\rho\left[(a_e^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+(a_e^2-v_r^2)\frac{\partial v_r}{\partial r}-v_xv_r\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)+\nu\frac{a_e^2v_r}{r}\right]= \\
=\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left(v_x\frac{\partial Q}{\partial x}+v_r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)-\frac{Q}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{Q,\rho}\left(v_x\frac{\partial q}{\partial x}+v_r\frac{\partial q}{\partial r}\right)
\end{gathered} \tag{2}
$$

В [1] из уравнений неразрывности и уравнений импульса в проекции на оси x и r были выведены соотношения, связывающие функции первого приближения

$$
\rho_1=\frac{p_*}{\rho_*a_{e*}^2}p_1=-v_{x1}, \qquad \frac{\partial v_{x1}}{\partial r}=\frac{\partial v_{r1}}{\partial x} \tag{3}
$$

Здесь и в дальнейшем опускаются штрихи у безразмерных переменных.

Используя формулы (3), для функций второго приближения получим

$$
\begin{gathered}
\delta\frac{\partial}{\partial x}(v_{x2}+\rho_2)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}v_{x1}^2+\Delta^2\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}+\frac{v_{r1}}{r}\right)=0 \\
p_2=\frac{\rho_*a_{e*}^2}{p_*}v_{x2}, \qquad \frac{\partial v_{x2}}{\partial r}=\frac{\partial v_{r2}}{\partial x}
\end{gathered} \tag{4}
$$

Преобразуем теперь уравнения, в которые входят химические переменные. Из уравнения скорости реакции находим

$$
\frac{\partial q_1}{\partial x}=\omega_1, \qquad \varepsilon v_{x1}\frac{\partial q_1}{\partial x}+\delta\frac{\partial q_2}{\partial x}=\delta\omega_2 \tag{5}
$$

Уравнение Онзагера дает

$$
\omega_1=-Q_1, \qquad \delta Q_2=\varepsilon h v_{x1}Q_1-\delta\omega_2, \qquad h=\left(\frac{\partial H}{\partial \rho}\right)_s \tag{6}
$$

Разложим функцию q в ряд Тейлора по переменным (ρ, Q, s) и сравним с разложением (1). Приравнивая соответствующие порядки, получим

$$
\begin{gathered}
q_1=\frac{\rho_*}{q_*}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\rho_1 \\
\delta q_2=\frac{1}{N_t}\frac{p_*}{\rho_*q_*^2}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{\rho,s}Q_1+\delta\frac{\rho_*}{q_*}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{\rho,s}\rho_2+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\rho_*^2}{q_*}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2}\right)_{Q,s}\rho_1^2
\end{gathered} \tag{7}
$$

Формулы (3) – (7) дают возможность выразить все функции первого и второго приближений через компоненты возмущенных скоростей. В частности, для Q_1 и Q_2 имеем

$$Q_1 = \frac{\rho_*}{q_*}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{\partial v_{x1}}{\partial x}, \quad \delta Q_2 = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\rho_*}{q_*}\left[(h-1)\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s} + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \rho_*\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2}\right)\right]\frac{\partial v_{x1}^2}{\partial x} - \delta\frac{\rho_*}{q_*}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{\partial v_{x2}}{\partial x} - \frac{p_*}{N_t q_*^3}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} +$$

$$+ \Delta^2\frac{\rho_*}{q_*}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{v_{r1}}{r}\right)$$

Из третьего уравнения (4) видно, что течение является безвихревым не только в первом приближении, но и во втором. Энтропия влияет на поток только в третьем приближении, ее изменение описывается уравнением

$$\frac{\partial s_1}{\partial x} = \frac{p_*}{\rho_* T_* s_*} Q_1^2$$

Влияние диссипативных факторов на поле течения получим при рассмотрении уравнения тепла, взятого в форме (2). В его коэффициенты входит скорость звука a_e, которая с точностью до второго приближения имеет вид

$$a_e = a_{e*}\left[1 - \varepsilon(m_{1e}-1)v_{x1} - \varepsilon\delta(m_{1e}-1)v_{x2} - \frac{\varepsilon}{N_t}\frac{p_*}{a_* q_*^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial a_e}{\partial Q}\right)_{p,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{(3m_{1e}^2 + m_{2e})}{2}v_{x1}^2\right]$$

Здесь через m_{1e} и m_{2e} обозначены безразмерные коэффициенты

$$m_{1e} = \frac{1}{2\rho_*^3 a_{e*}^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{Q,s}, \quad m_{2e} = \frac{1}{2\rho_*^4 a_{e*}^2}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{Q,s}$$

$$m_{3e} = \frac{p_*}{\rho_* q_*^2 a_{e*}^2}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}, \quad m_{4e} = \frac{p_*}{\rho_* q_*^2}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{\rho,s}$$

$$m_{5e} = \frac{p_*}{a_{e*}^2 q_*^2}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial Q\,\partial \rho}\right) -$$

$$- \frac{p_*}{a_{e*}^2 \rho_* q_*^2}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left[(h-1)\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s} + \rho_*\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2}\right)_{Q,s}\right]$$

$$m_{6e} = \frac{p_*}{a_{e*}^2 T_*}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{Q,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{p_*}{a_{e*}^2 q_*^2 \rho_*}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left[(h-1)\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s} + \right.$$

$$\left. + \rho_*\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2}\right)_{Q,s}\right] - 2\frac{p_*}{a_{e*} q_*^2}\left(\frac{\partial a_e}{\partial Q}\right)_{p,s}\left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)_{Q,s}$$

Упростим уравнение (2). Для этой цели используются (1) – (4), (7), (8). Результат приведем в окончательной форме

$$2\varepsilon m_{1e} v_{x1}\frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + 2\varepsilon\delta m_{1e}\frac{\partial}{\partial x}v_{x1}v_{x2} + \varepsilon^2(2m_{1e}^2 + m_{2e})v_{x1}^2\frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - \tag{9}$$

$$- \Delta^2\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \nu\frac{v_{r1}}{r}\right) - \delta\Delta^2\left(\frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + \nu\frac{v_{r2}}{r}\right) - \varepsilon\Delta^2(1-2m_{1e})v_{x1}\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \nu\frac{v_{r1}}{r}\right) +$$

$$+\varepsilon\Delta^2 v_{r1}\left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial r}+\frac{\partial v_{r1}}{\partial x}\right)=-\frac{m_{3e}}{N_t}\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2}-\frac{\delta}{N_t}m_{3e}\frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{m_{3e}}{N_t^2}m_{4e}\frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial x^3}-\frac{\Delta^2}{N_t}m_{3e}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}+\nu\frac{v_{r1}}{r}\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{N_t}\left[m_{6e}\left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial x}\right)^2-m_{5e}v_{x1}\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2}\right]$$

Отметим, что в уравнения первого и второго приближений движения вязкого теплопроводящего газа входит только продольная вязкость [7]. А это означает, что граничные условия, накладываемые на компоненты скоростей, в обоих случаях совпадают.

В коэффициенты уравнения (9) входят малые параметры ε, Δ, δ, N_t^{-1} от выбора относительных величин которых будет зависеть его дальнейшее упрощение.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon\sim N_t^{-1}\sim\Delta^2$. Уравнение первого приближения имеет вид

$$2\varepsilon m_{1e}v_{x1}\frac{\partial v_{x1}}{\partial x}-\Delta^2\left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}+\nu\frac{v_{r1}}{r}\right)+\frac{m_{3e}}{N_t}\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2}=0$$

Полная аналогия с ВТ уравнением получается, если заменить коэффициенты следующим образом:

$$m_1\leftrightarrow m_{1e},\qquad -\frac{1}{N_{\mathrm{Re}}}\left(1+\frac{\varkappa_\infty-1}{\mathrm{Pr}}\right)\leftrightarrow\frac{m_{3e}}{N_t}$$

Здесь m_i – значение m_{ie} в инертном газе ($i=1, 2,\ldots$), N_{Re} и Pr – продольная вязкость и число Прандтля, $\varkappa$ – отношение удельных теплоемкостей.

Сравним во втором приближении уравнение (9) и уравнение движения вязкого теплопроводящего газа [8]. Точная математическая аналогия устанавливается, если поставить в соответствие коэффициенты этих уравнений по правилу

$$m_2\leftrightarrow m_{2e},\qquad -\frac{1}{N_{\mathrm{Re}}}\left[3+2\frac{\varkappa_\infty-2}{\mathrm{Pr}}-\mu_{1\infty}+\frac{\nu_{1\infty}}{\mathrm{Pr}}\right]\leftrightarrow\frac{1}{N_t}\left[-m_{5e}+2m_{1e}m_{3e}\right]$$

$$-\frac{1}{N_{\mathrm{Re}}}\left[2\left(1+\frac{\varkappa_\infty-2}{\mathrm{Pr}}\right)-\nu_{2\infty}+\frac{\nu_{3\infty}}{\mathrm{Pr}}\right]\leftrightarrow\frac{1}{N_t}\left[m_{6e}+2m_{1e}m_{3e}\right]$$

$$\frac{1}{N_{\mathrm{Re}}^2}\left[\frac{\varkappa_\infty}{\mathrm{Pr}}+\left(1+\frac{\varkappa_\infty-2}{\mathrm{Pr}}\right)\left(1+\frac{\varkappa_\infty-1}{\mathrm{Pr}}\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{N_t^2}\left(m_{3e}^2+m_{3e}m_{4e}\right)$$

В остальных случаях аналогия во втором приближении также устанавливается. При этом наиболее интересен случай обтекания конечного осесимметричного тела. Связь между малыми параметрами будет следующей: $\Delta^2\sim\delta\sim N_t^{-1}\sim\varepsilon^{1/2}$.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
2. *Хилтон У. Ф.* Аэродинамика больших скоростей. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
4. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
5. *Диесперов В. Н.* Об одной задаче движения вязкого и теплопроводящего газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 9, № 6.
6. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5.
7. *Диесперов В. Н., Рыжов О. С.* Второе приближение в асимптотической теории обтекания тел вращения звуковым потоком реального газа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
8. *Диесперов В. Н.* Второе приближение в теории асимптотического затухания возмущений в сверхзвуковом потоке вязкого теплопроводящего газа. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 4.