

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТЕОРИИ РЕАКТОРА  
С НЕОДНОРОДНЫМ ПСЕВДООЖИЖЕННЫМ СЛОЕМ**

**В. П. КУЛЬЖЕВ, Б. М. МАРКЕЕВ, С. В. СЕНИН**

(Москва)

Известные модели реактора с неоднородным псевдоожигенным слоем (см., например, [1-4]) основаны на представлении о псевдоожигенном слое как о двухфазной системе, состоящей из движущейся с определенной скоростью гомогенной фазы и пузырей, проходящих этот слой. Расчет реакторов такого типа для реакции произвольного порядка даже в одномерном приближении сложен и может быть выполнен с применением численных методов.

В [5] развит алгоритм получения асимптотического разложения решения двухточечной краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, возникающей в теории изотермического реактора. Асимптотический анализ позволил выявить ряд важных закономерностей динамики течения реагента в реакторе, а также получить аналитическое решение, обладающее достаточной точностью по сравнению с численным решением искомой задачи.

В данной работе развит алгоритм получения асимптотического разложения решения двухточечной краевой задачи для сингулярно возмущенной системы из двух уравнений с малым параметром, возникающей в теории реактора с неоднородным псевдоожигенным слоем. Решение данной задачи существует и единственно, а его асимптотическое разложение сходится равномерно. Получено асимптотическое разложение равномерно пригодного решения с точностью до третьего порядка по малому параметру задачи, которое затем сравнивается с численным решением искомой задачи. Отмечается хорошая точность аналитического решения для широкой области параметров, фигурирующих в задаче.

1. Двухточечная краевая задача, возникающая в теории реактора с неоднородным псевдоожигенным слоем катализатора, при ряде предположений [1-3] формулируется следующим образом:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \epsilon x'' - x' &= -kx^n + s(x-y), & y' &= suv^{-1}(x-y) \\ 0 \leq \xi \leq 1, & \quad \epsilon x'(+0) = 1 - x(+0), & x'(1) &= 0, & y(+0) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\xi = z/L$  — безразмерная координата,  $x$  и  $y$  — безразмерные концентрации реагирующего вещества в гомогенной фазе и в пузыре,  $s$  — коэффициент обмена между пузырями и гомогенной фазой,  $u$  — скорость непрерывной фазы,  $v$  — скорость пузырей,  $e^{-1} = Pe$  — число Пекле,  $k$  — безразмерная скорость реакции,  $n$  — порядок реакции.

Малый параметр  $\epsilon$  при старшей производной в (1.1) определяет дополнительное граничное условие по сравнению с системой при  $\epsilon = 0$ . Поэтому (1.1) является сингулярно возмущенной по отношению к аналогичной системе с  $\epsilon = 0$ .

Во внешней области, представляющей собой полуинтервал  $0 \leq \xi < 1$ , определим решение асимптотическим рядом

$$(1.2) \quad x(\xi) = \chi_x(\xi), \quad y(\xi) = \chi_y(\xi), \quad \chi_\tau(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \chi_\tau^{(n)}(\xi), \quad \gamma = x, y$$

по малому параметру  $\epsilon$ .

Определяющей для построения асимптотических разложений (1.2) является система нулевого приближения, которая следует из (1.1) при  $\epsilon=0$  и описывает работу реактора с псевдооживленным слоем в режиме идеального вытеснения. Однако даже в нулевом приближении решение системы (1.1) представляет трудности.

Ограничимся рассмотрением случая малых коэффициентов обмена между пузырями и непрерывной фазой и реакцией второго порядка ( $n=2$ ). Представим каждый член разложения (1.2) асимптотическим рядом

$$(1.3) \quad \chi_{\gamma}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m \chi_{\gamma(m)}^{(n)}, \quad \gamma = x, y$$

по малому параметру  $s$ .

Тогда в нулевом приближении по малым параметрам  $\epsilon$  и  $s$  из (1.1) при  $\epsilon=s=0$  получим значение концентрации (1.4)

$$(1.4) \quad \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) = [-k\xi + 1]^{-1}$$

определяющее работу реактора в стационарном режиме без пузырей.

2. Учет диффузии реагента и влияния пузырей фазы на концентрацию реагента в гомогенной фазе и пузыре осуществляется в следующих приближениях разложений (1.2), (1.3). Из (1.1) — (1.3) имеем систему уравнений для искомых приближений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \chi_{x(m)}^{(n)'} - 2k\chi_{x(0)}^{(0)} \chi_{x(m)}^{(n)} &= \chi_{x(m)}^{(n-1)''} - \\ &- (\chi_{x(m-1)}^{(n)} - \chi_{y(m-1)}^{(n)}) + k \sum_{\substack{v=n-1, \mu=m \\ v=1, \mu=0 \\ n>1}} \chi_{x(m-\mu)}^{(n-v)} \chi_{x(m)}^{(n)} \\ \chi_{y(m)}^{(n)'} &= \frac{u}{v} (\chi_{x(m-1)}^{(n)} - \chi_{y(m-1)}^{(n)}) \end{aligned}$$

$$\chi_{x(m)}^{(n-1)'}(+0) = -\chi_{x(m)}^{(n)}(+0), \quad \chi_{y(m)}^{(n)}(+0) = 0$$

Система (2.1) представляет собой систему линейных уравнений, решения которой для первого и второго приближений по  $\epsilon$  и  $s$  представим посредством соотношений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \chi_{x(1)}^{(0)}(\xi) &= \frac{1}{2k} (1 - \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)), \quad \chi_{y(1)}^{(0)}(\xi) = -\frac{u}{vk} \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) \\ \chi_{x(2)}^{(0)}(\xi) &= (\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)/k)^2 \left[ \frac{1}{12} \frac{\chi_{x(0)}^{(0)3}(\xi)}{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)} + \frac{1}{4} (\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) - \right. \\ &- \left. \frac{u}{9v} \left( \frac{3 \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) + 1}{\chi_{x(0)}^{(0)3}(\xi)} - 1 \right) \right], \quad \chi_{y(2)}^{(0)}(\xi) = \frac{u}{vk^2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1 - \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)}{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} (\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) + \frac{u}{v} \left( \frac{\ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) + 1}{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)} - 1 \right) \right] \\ \chi_{x(0)}^{(1)}(\xi) &= k\chi_{x(0)}^{(0)2}(\xi) [1 + 2 \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)], \quad \chi_{y(0)}^{(1)}(\xi) = 0 \end{aligned}$$

$$\chi_{x(1)}^{(1)}(\xi) = \chi_{x(0)}^{(0)2}(\xi) \{2[2(\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) - \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)] - 1\}$$

$$\chi_{y(1)}^{(1)}(\xi) = uv^{-1} \{2\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - (\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1)\}$$

$$\chi_{x(0)}^{(2)}(\xi) = (k\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi))^2 \{9(\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) + 4[\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)] \times \\ \times (2 + \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)) + 1\}, \quad \chi_{y(0)}^{(2)}(\xi) = 0$$

При получении (2.2) использовалась система нулевого приближения, в результате чего первое и второе приближения выражаются через нулевое приближение  $\chi_{\gamma(0)}^{(0)}(\xi) \gamma = x, y$ . В табл. 1 для сравнения приведены значения нулевого члена разложения (1.2) по  $\epsilon$  (последний столбец таблицы), полученного посредством численного решения системы нулевого

Таблица 1

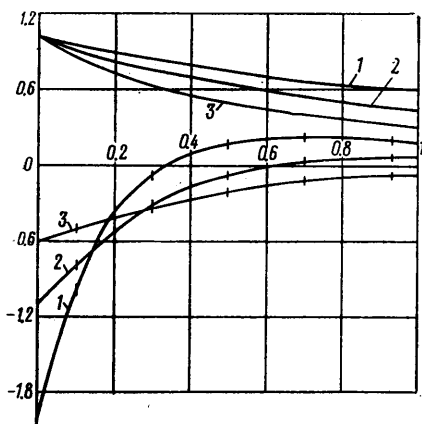
$\xi$	$x_x^{(0)}$	$x_x^{(0)}(1)$	$x_x^{(0)}(2)$	$x_x^{(0)}$
$k = -0.5$				
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.3	0.869	0.845	0.846	0.846
0.6	0.769	0.728	0.730	0.730
0.9	0.689	0.637	0.641	0.641
1.0	0.666	0.611	0.616	0.616
$k = -0.2$				
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.3	0.625	0.579	0.583	0.584
0.6	0.455	0.395	0.406	0.406
0.9	0.357	0.291	0.311	0.310
1.0	0.333	0.266	0.289	0.288

приближения методом «стрельбы» и рассчитанного по формулам одно-, двух- и трехчленного асимптотического разложения по параметру  $s$  для различных координат вдоль реактора в случае  $k = -0.5$  и  $s = 0.1$ . Аналогичное сравнение приводится для случая  $k = -2$  и  $s = 0.3$  (табл. 1). Как следует из этой таблицы, асимптотический ряд по  $s$  обладает быстрой сходимостью. Отметим, что относительно параметра  $s$  система (3.1) представляется регулярно возмущенной. Поэтому величина малого параметра  $s$  относительно малого параметра  $\epsilon$  может повлиять лишь на быстроту сходимости асимптотического разложения решения, но не на его вид. На фиг. 1 приводятся кривые 1-3 зависимости  $\chi_x^{(0)}$  (сплошная черта) и  $\chi_x^{(1)}$  (перечеркнутая черта) от координаты, соответствующие случаям  $k = -0.5$ ,  $s = 0.1$ ;  $k = -1$ ,  $s = 0.1$ ;  $k = -2$ ,  $s = 0.1$ , рассчитанные по трехчленному асимптотическому разложению. Зависимость  $\chi^{(2)}$  от координат для данных трех случаев приведена на фиг. 2.

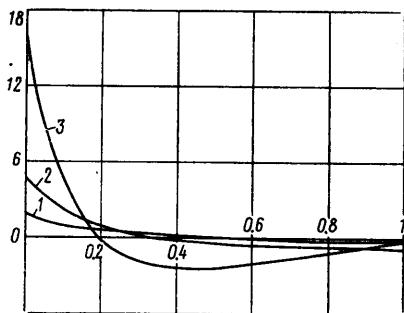
3. Чтобы решение (1.1) удовлетворяло граничным условиям на правом конце отрезка, введем в окрестности точки  $\xi = 1$  пограничный слой (внутренняя область) [6]. После замены переменной  $\eta = (1 - \xi)/\epsilon$  исходная система (1.1) преобразуется к виду

$$(3.1) \quad \psi_x''(\eta) + \psi_x'(\eta) = \epsilon[-k\psi_x^2(\eta) + s(\psi_x(\eta) - \psi_y(\eta))] \\ \psi_y'(\eta) = -\epsilon s u v^{-1}(\psi_x(\eta) - \psi_y(\eta)), \quad \psi_x'(0) = 0$$

В уравнении (3.1) наибольшими будут члены, содержащие производные от  $\psi_x$  и  $\psi_y$  по координатам. При этом  $x(\xi) = \psi_x(\eta)$ ,  $y(\xi) = \psi_y(\eta)$ . В качестве граничного условия взято условие обращения производной от  $\psi_x(\eta)$  в нуль для  $\eta=0$ , представляющее собой соотношение для определения одной из трех констант, фигурирующих в решениях системы (3.1). Еще две константы определяются процедурой сращивания решения во внешней области с решением во внутренней области. Система уравнений для нулевого члена асимптотического разложения решения в «пограничном слое» следует из (3.1), если положить  $\epsilon=0$ , и имеет решение



Фиг. 1



Фиг. 2

$\psi_x^{(0)}(\eta) = h_x^{(0)}$ ,  $\psi_y^{(0)}(\eta) = h_y^{(0)}$ . Здесь  $h_x^{(0)}$  и  $h_y^{(0)}$  — постоянные, определяемые процедурой сращивания. Таким образом в нулевом приближении через пограничный слой реагент протекает в реакторе без изменения. Учет влияния реакции в пограничном слое на концентрацию реагента осуществляется в первом и последующих приближениях асимптотического разложения решения системы (3.1).

При этом системы уравнений для последующих приближений представляют собой системы линейных неоднородных уравнений, где в качестве правых частей фигурируют низшие приближения асимптотического разложения для  $\psi_\gamma(\eta)$ ,  $\gamma = x, y$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \psi_x^{(n)''}(\eta) + \psi_x^{(n)'}(\eta) &= -k \sum_{m=0}^{m=n} \psi_x^{(m)}(\eta) \psi_x^{(n-m-1)}(\eta) + \\ &+ s(\psi_x^{(m-1)}(\eta) - \psi_y^{(m-1)}(\eta)) \\ \psi_y^{(n)'}(\eta) &= -uv^{-1}s(\psi_x^{(n-1)}(\eta) - \psi_y^{(n-1)}(\eta)), \quad \psi_x^{(n)'}(0) = 0 \end{aligned}$$

Первый и второй члены асимптотического разложения решения системы (3.2) представим посредством соотношений

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi_x^{(1)} &= h_{x0}^{(1)} + h_{x1}^{(1)}(\eta + e^{-\eta}), \quad \psi_y^{(1)} = h_{y0}^{(1)} + h_{y1}^{(1)}\eta \\ \psi_x^{(2)} &= h_{x0}^{(2)} + h_{x1}^{(2)}(\eta + e^{-\eta}) + h_{x2}^{(2)}\eta^2/2 + h_{x3}^{(2)}(\eta + 1)e^{-\eta} \\ \psi_y^{(2)} &= h_{y0}^{(2)} + h_{y1}^{(2)}\eta + h_{y2}^{(2)}\frac{\eta^2}{2} + h_y^{(2)}e^{-\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_x^{(1)} &= -[kh_{x0}^{(0)2} - s(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)})], & h_{y1}^{(1)} &= -uv^{-1}s(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)}) \\ h_x^{(2)} &= (2kh_{x0}^{(0)} - s)(h_x^{(1)} - h_{x0}^{(1)}) + s(h_{y1}^{(1)} - h_{y0}^{(1)}) \\ h_{x2}^{(2)} &= -(2kh_{x0}^{(0)} - s)h_x^{(1)} - sh_{y1}^{(1)}, & h_{y1}^{(2)} &= -uv^{-1}s(h_{x0}^{(1)} - h_{y0}^{(1)}) \\ h_{y2}^{(2)} &= -uv^{-1}s(h_x^{(1)} - h_{y1}^{(1)}), & h_y &= uv^{-1}sh_x^{(1)}, \\ h_{x3}^{(2)} &= (2kh_{x0}^{(0)} - s)h_x^{(1)} \end{aligned}$$

Здесь величины  $h_{\gamma 0}^{(1)}, h_{\gamma 0}^{(2)}$ ,  $\gamma = x, y$  определяются из сращивания асимптотических разложений.

Следует отметить, что в [5] при исследовании работы изотермического реактора решение в пограничном слое искалось методом итераций. В результате в первом и втором членах асимптотического разложения присутствовали слагаемые более высокого порядка малости, и поэтому процедура сращивания асимптотических разложений была достаточно сложной. В случае системы (3.1) метод решения [5] не проходит.

4. Определим постоянные, фигурирующие во внешнем решении, используя процедуру сращивания асимптотических разложений. Перейдем к промежуточной переменной [6] ( $\eta = \eta^*/(\mu(\epsilon))$ ,  $\xi = 1 - (\epsilon/\mu(\epsilon))\eta^*$ ), предполагая  $\epsilon = o(\mu)$ . Осуществим процедуру сращивания, для чего коэффициенты во внешних решениях (1.4), (2.2) и внутренних решениях (3.3) при одинаковых степенях переменной приравняем. В нулевом приближении по малому параметру, пренебрегая экспоненциально-малыми членами, имеем

$$\begin{aligned} \chi_x^{(0)}(1) &= h_{x0}^{(0)}, & \chi_x^{(0)'}(1) &= -h_x^{(1)}, & \chi_x^{(0)''}(1) &= h_{x2}^{(2)} \\ \chi_y^{(0)}(1) &= h_{y0}^{(0)}, & \chi_y^{(0)'}(1) &= -h_y^{(1)}, & \chi_y^{(0)''}(1) &= h_{y2}^{(2)} \end{aligned}$$

Первое и четвертое уравнения данной системы определяют значения постоянных  $h_{x0}^{(0)} = \chi_x^{(0)}(1)$  и  $h_{y0}^{(0)} = \chi_y^{(0)}(1)$ . Прочие соотношения удовлетворяются тождественно, в чем нетрудно убедиться, используя значения первой и второй производной от  $\chi_\gamma^{(0)}$  в точке  $\xi = 1$ , полученные непосредственно из системы (2.1). В результате нулевой член асимптотического разложения внешнего решения переходит во внешнее решение с точностью до  $(\epsilon/\mu)^2$ .

В первом приближении, чтобы не превышать точности сращивания, принятого в нулевом приближении по параметру  $(\epsilon/\mu) \ll 1$ , достаточно коэффициенты внешних решений при нулевой и первой степенях промежуточной переменной приравнять к коэффициентам при соответствующих степенях внутреннего решения. В результате имеем

$$\chi_x^{(1)}(1) = h_{x0}^{(1)}, \quad \chi_x^{(1)'}(1) = -h_{x1}^{(2)}, \quad \chi_y^{(1)}(1) = h_{y0}^{(1)}, \quad \chi_y^{(1)'}(1) = -h_y^{(2)}$$

Как и в нулевом приближении, первое и третье соотношения определяют  $h_{x0}^{(1)} = \chi_x^{(1)}(1)$  и  $h_{y0}^{(1)} = \chi_y^{(1)}(1)$ , а остальные выполняются тождественно.

Таким образом, алгоритм построения асимптотических разложений решений системы (1.1) на примере нулевого, первого и второго членов разложений решений во внутренней и внешней областях разработан и

остается выписать решение, равномерно пригодное на всем отрезке  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Выделяя общую часть, имеем

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(\xi) &= \chi_x^{(0)}(\xi) + \epsilon \chi_x^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 \chi_x^{(2)}(\xi) + \epsilon h_x^{(1)}(\eta + e^{-\eta}) + \\ &+ \epsilon^2 [h_x^{(2)}(\eta + e^{-\eta}) + h_{x3}^{(2)} e^{-\eta}(\eta + 1)] \\ y(\xi) &= \chi_y^{(0)}(\xi) + \epsilon \chi_y^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 \chi_y^{(2)}(\xi) + \epsilon^2 h_y^{(2)} e^{-\eta} \end{aligned}$$

где  $h_x^{(1)}$ ,  $h_x^{(2)}$ ,  $h_{x3}^{(2)}$  и  $h_y^{(2)}$  определяются в (3.3), а  $\chi_\gamma^{(n)}(\xi)$ , ( $\gamma = x, y$ ;  $n = 0, 1, 2$ ) для малых коэффициентов  $s$  приводятся в (1.4), (2.2). Таким образом, в условиях, когда можно пренебречь диффузией (нулевое приближение по  $\epsilon$ ), влияние пузырей на концентрацию в гомогенной фазе сказывается начиная с первого приближения по  $s$ . При этом в пограничном слое концентрация реагента в гомогенной фазе и пузыре не изменяется. В первом приближении по  $\epsilon$ , где учитываются эффекты диффузии, концентрация реагента в гомогенной фазе в пограничном слое экспоненциально падает, а концентрация в пузыре по-прежнему остается без изменения. Однако во втором приближении по  $\epsilon$  пограничный слой характеризуется экспоненциальным изменением концентрации реагента как в гомогенной фазе, так и в пузыре.

Используя алгоритм построения асимптотического разложения равномерно пригодного решения сингулярно возмущенной системы (1.1), разработанный выше, можно вычислить любой последующий член в (4.1). Данное решение удобно записать в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x &= x_N + \epsilon^{N+1} R^N = \sum_{n=0}^N \left( X_n(\xi, \epsilon) + \psi_n \left( \epsilon, \frac{1-\xi}{\epsilon} \right) \right) + \epsilon^{N+1} R^N \\ y &= y_N + \epsilon^{N+1} P^N = \sum_{n=0}^N \left( Y_n(\xi, \epsilon) + \varphi_n \left( \epsilon, \frac{1-\xi}{\epsilon} \right) \right) + \epsilon^{N+1} P^N \end{aligned}$$

где, как следует из приведенных соотношений,  $x_N$  и  $y_N$  представляют собой конечный отрезок асимптотического разложения решения задачи, а  $R^N$  и  $P^N$  — остаточные члены асимптотических рядов. При этом каждый член асимптотических рядов представлен общей частью  $X_n$  и  $Y_n$  и экспоненциально-спадающими решениями в пограничном слое  $\psi_n$  и  $\varphi_n$ . Чтобы оценить остаточные члены  $R^N$  и  $P^N$ , подставим (4.2) в исходную систему (1.1), преобразовав ее затем в систему интегральных уравнений

$$(4.3) \quad R^N = \epsilon \left\{ (e^{-\xi/\epsilon} - 1) \int_0^{\xi} e^{-t/\epsilon} (L(R^N, P^N) + l(t)) dt + A_2 e^{\xi/\epsilon} + A_1 \right\}$$

$$P^N = A_3 + \int_0^{\xi} (M(R^N, P^N) + m(t)) dt$$

$$K(R^N, P^N) = \frac{1}{\epsilon^{N+1}} [\Phi(x_N + \epsilon^{N+1} R^N, y_N + \epsilon^{N+1} P^N) - \Phi(x_N, y_N)]$$

$$K = L, M; \quad \Phi = f, F$$

Здесь  $f$  и  $F$  — правые части соответственно первого и второго уравнений системы (1.1); постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  находятся из граничных условий задачи (1.1); величины  $l(\xi, \epsilon)$  и  $m(\xi, \epsilon)$ , фигурирующие в (5.3), получены из оценки конечных отрезков асимптотических рядов и определяются соотношениями

$$l(\xi, \epsilon) = O\left(1 + \epsilon^{-1} \exp\left\{-\frac{q(1-\xi)}{\epsilon}\right\}\right)$$

$$m(\xi, \epsilon) = O\left(1 + \epsilon^{-2} \exp\left\{-\frac{q(1-\xi)}{\epsilon}\right\}\right)$$

Система (4.3) представляет собой систему интегральных уравнений, которая эквивалентна системе (1.1). Доказательство существования и единственности решения интегрального уравнения для достаточно малых  $\epsilon$  стандартно и приводится, например, в [7]. При этом найдется число  $N'$ , зависящее от  $\epsilon$ , такое, что для  $N \geq N'$  будет справедлива оценка

$$\|R^N\| = O(\epsilon^{N+1}), \quad \|P^N\| = O(\epsilon^{N+1})$$

Однако вопрос о радиусе сходимости по  $\epsilon$  остается открытым. В табл. 2 иллюстрируется сходимость одно-, двух- и трехчленных асимптотических разложений решения задачи (1.1) к численному решению этой задачи, приведенному в последнем столбце соответственно для случаев  $k = -0.5$ ,  $s = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$  и  $k = -2$ ,  $s = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$ .

Таблица 2

$\xi$	$x_x^{(0)}$	$x_x^{(1)}$	$x_x^{(2)}$	$x_x$
$k = -0.5$				
0	1.000	0.920	0.937	0.936
0.3	0.802	0.768	0.769	0.772
0.6	0.666	0.654	0.649	0.654
0.9	0.568	0.576	0.569	0.572
1.0	0.541	0.568	0.561	0.562
$k = -2$				
0	1.000	0.770	0.965	0.865
0.3	0.584	0.582	0.558	0.575
0.6	0.406	0.432	0.411	0.422
0.9	0.311	0.343	0.335	0.336
1.0	0.288	0.332	0.329	0.328

Сходимость асимптотического разложения решения, приведенного в табл. 2, более неблагоприятная. При этом наибольшее ухудшение сходимости наблюдается в начале координат. Последнее обстоятельство дало основание для вывода критерия сходимости асимптотических разложений [8]. Согласно [8] критерий сходимости выводился из сравнения в точке  $\xi = 0$  асимптотических разложений, записанных во внешних и внутренних переменных. Тем не менее из сравнения асимптотического разложения (4.1) решения задачи (1.1) с ее численным решением можно утверждать, что при стремлении параметра  $\epsilon$  к единице сходимость асимптотического разложения решения резко ухудшается.

В заключение подчеркнем, что изучение процессов, протекающих в реакторе с неоднородным псевдооживленным слоем, на основе асимптотических методов позволяет определить количественно тонкую структуру явлений, протекающих в реакторе, для области параметров, где сходи-

мость асимптотических разложений хорошая, а также изучить динамику явлений качественно в области плохой сходимости с последующим выявлением подходов для численного решения задачи с привлечением асимптотических решений. В этом смысле аналитические и численные методы решения двухточечной краевой задачи, возникающей в теории реактора с неоднородным псевдоожженным слоем, не противопоставляются, а дополняют друг друга.

Авторы благодарят В. В. Струминского за интерес к работе, а Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за ценные замечания.

Поступила 17 I 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэров М. Э., Тодес О. М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
2. *Девидсон Дж. Е., Харрисон Д.* Псевдоожжение твердых частиц. М., Госхимиздат, 1963.
3. *Lewis W. K., Gilliland E. R., Glass W.* Solid-catalysed Reaction in a Fluidized Bed., A.I.Ch.E. Journal, 1959, vol. 5, p. 419.
4. *Слинько М. Г., Шеплев В. С.* Моделирование каталитических процессов в псевдоожженном слое. Кинетика и катализ, 1970, т. 11, вып. 2.
5. *Freeman L. B., Houchton G.* Singular perturbation of nonlinear boundary value problems arising in chemical flow reactors. Chem. Engng Sci., 1966, vol. 21, p. 1011–1024.
6. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
7. *Chen J., O'Malley R. E.* On the asymptotic of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory. SIAM J. Appl. Math., 1974, vol. 26, No. 4.
8. *Raffi M., Turian.* Solutions of problems in chemical flow reactors by perturbation methods. Chem. Engng Sci., 1973, vol. 28, p. 2021–2031.