УДК 532.517

ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС ОРИЕНТАЦИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ЧАСТИЦ НА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Н. И. ГАЙДУКОВ

(Москва)

Некоторые технологические процессы непрерывного действия среди ряда операций содержат операцию осаждения на подвижной фильтрационной поверхности тонкого слоя фильтрата, используемого в дальнейшем для изготовления продукции различного назначения. Одним из примеров таких процессов является процесс фильтрации асбестоцементной суспензии при изготовлении продукции на круглосеточных машинах [1].

Фильтруемая суспензия содержит твердую фазу, состоящую из частиц игольчатой и сферической формы. На подвижной фильтрационной поверхности будут одновременно оседать частицы того и другого вида. В связи с тем что процесс образования пленки фильтрата связан с гидродинамическими и статистическими процессами, частицы игольчатой формы будут распределяться в пленке фильтрата по всем направлениям анизотропно. Для определения функции плотности вероятности распределения игольчатых частиц в пространстве необходимо построить дифференциальное уравнение диффузионного процесса ориентирования игольчатых частиц на фильтрационной поверхности при наличии поступательного фильтрационного потока, направленного по нормали к поверхности и касательного к этой поверхности турбулентного потока.

Процесс образования пленки фильтрата моделируем, исходя из следующих упрощающих предположений: скорость фильтрации v_p постоянна и процесс образования фильтрата не влияет на диффузионное и силовое поле, создаваемое турбулентным движением жидкости относительно фильтрационной поверхности.

На закрепившуюся игольчатую частицу в зоне формирования слоя фильтрата в тонком турбулентном слое жидкости действуют силы вязкости со стороны движущейся суспензии, которые можно разделить на: силы, обусловливающие упорядоченное движение игольчатых частиц, закрепившихся одним концом к фильтрационной поверхности, вместе с фильтрационным и турбулентным потоками; силы, создающие хаотические пульсационные движения игольчатых частиц под действием флуктуации вязких сил, обусловленных флуктуациями скорости турбулентного движения жидкости в тонком слое суспензии около фильтрационной поверхности. Величину хаотических колебаний частиц жидкости, увлекающих игольчатую частицу в своем движении, будем считать одинаковой по всем направлениям.

Пусть начало координат декартовой системы совпадает с точкой 0, в которой прикрепилась игольчатая частица. Турбулентное движение жидкости направлено по оси x вдоль фильтрационной поверхности, а фильтрационное движение направлено по оси z в отрицательном направлении.

При турбулентном движении жидкости вблизи плоской поверхности образуется вязкий подслой толщиной δ_0 [2], компонента средней скорости движения v_x в котором меняется по линейному закону. Компоненту v_z будем считать равной средней скорости фильтрации $v_z=-v_p$. Таким образом поле средней скорости зададим в виде

$$\mathbf{v}=\nu/\delta_0 z\mathbf{i}-v_p\mathbf{k}\quad (v_p=\mathrm{const}) \tag{1}$$

где ν – кинематическая вязкость суспензии.

Поле сил, действующих на элемент dr игольчатой частицы, прикрепившейся в точке 0, определим в виде [3]

$$d\mathbf{F}=k_0\mu g(r,\varphi,\theta)\mathbf{v}dr \tag{2}$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности, μ – коэффициент динамической вязкости, r, φ, θ – сферические координаты расположения элемента dr игольчатой частицы. Функцию $g(r,\varphi,\theta)$, характеризующую взаимодействие элемента длины dr игольчатой частицы с движущимся потоком жидкости, примем равной синусу угла между вектором элемента длины $\mathbf{dr}$ игольчатой частицы и вектором средней скорости потока жидкости в точке (r,φ,θ). Тогда

$$g(r,\varphi,\theta)=\left[1-\frac{[(\nu r/\delta_0^2)\cos\varphi\cos\theta\sin\theta-v_p\cos\theta]^2}{\nu^2(r^2/\delta_0^4)\cos^2\theta+v_p^2}\right]^{1/2} \tag{3}$$

Компоненты момента сил, действующего на игольчатую частицу средней длины r_0, в сферической системе координат согласно (1)–(3) имеют вид

$$M_r=0$$

$$M_\varphi=k_0\mu v_p \sin\theta \int_0^{r_0} g(r,\varphi,\theta)\,r\,dr+\frac{k\mu\nu}{\delta_0^2}\cos\varphi\cos^2\theta\int_0^{r_0} g(r,\varphi,\theta)\,r^2\,dr \tag{4}$$

$$M_\theta=\frac{k_0\mu\nu}{\delta_0^2}\sin\varphi\cos\theta\int_0^{r_0} g(r,\varphi,\theta)\,r^2\,dr \tag{5}$$

Введем дифференциальную функцию плотности вероятности распределения игольчатых частиц по направлениям в пространстве

$$f(t,\varphi,\theta)=\frac{dN}{N\,d\Omega}=\frac{dN}{N\sin\theta\,d\theta\,d\varphi} \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} f(t,\varphi,\theta)\sin\theta\,d\theta=1 \tag{7}$$

где N – число игольчатых частиц, прикрепившихся в точке O в момент времени t, dN – число игольчатых частиц, заключенных внутри телесного угла $d\Omega$ с вершиной в точке O. Формула (7) соответствует условию нормировки для функции $f(t,\varphi,\theta)$.

Закрепившиеся в точке O игольчатые частицы испытывают диффузионное движение под действием флуктуации вязких сил турбулентного движения в тонком слое суспензии около фильтрационной поверхности. Процесс диффузии происходит во внешнем силовом поле, определяемом вязкими силами упорядоченного среднего движения жидкости со скоростью $\mathbf{v}$.

Поток плотности частиц $\mathbf{q}$, совершающих диффузионное движение во внешнем силовом поле $\mathbf{M}$, определится выражением [4]

$$\mathbf{q}=\gamma[M_\varphi f\mathbf{e}_\theta-M_\theta f\mathbf{e}_\varphi]-\varkappa\,\mathrm{grad}\,f \tag{8}$$

где $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – единичные орты сферической системы координат, $\varkappa$ – коэффициент диффузии игольчатых частиц, совершающих угловые перемещения, γ – коэффициент пропорциональности.

Подставляя уравнение (8) в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{q}=0$$

получим уравнение эволюции дифференциальной функции плотности вероятности распределения игольчатых частиц по направлениям

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\gamma M_\theta f+\frac{\varkappa}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(\gamma M_\varphi f-\varkappa\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right]\right\} \tag{9}$$

В начальный момент функция

$$f(t,\varphi,\theta)=\frac{1}{2\pi}\qquad(t=0)$$

что соответствует равномерному распределению игольчатых частиц по направлениям в полупространстве.

Оценим значения введенных коэффициентов. Сравнивая значение силы, действующей на единицу длины цилиндра [5], с формулой (2), получим

$$k_0=\frac{8\pi}{1-2\ln({}^1\!/_2\alpha_0{}^{na})},\qquad n=\frac{v}{2\nu},\qquad \alpha_0=1.78$$

где a – диаметр игольчатой частицы.

Для оценки коэффициента диффузии $\varkappa$ будем предполагать, что в окрестности точки прикрепления игольчатых частиц мелкомасштабная турбулентность изотропна. Рассматривая свойства турбулентности в масштабах λ, малых по сравнению с основным масштабом турбулентности и больших по сравнению с расстояниями λ_0, на которых начинает играть роль вязкость жидкости, можно на основании закона Колмогорова – Обухова [2] записать $v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$, где v_λ – скорость турбулентных движений порядка λ; ε – энергия, диссипируемая в единицу времени в единицу массы жидкости; λ – расстояние, на котором изменение скорости в основном определяется пульсационной частью скорости. Согласно [2] для времени τ, необходимого для удаления двух жидких частиц на расстояние λ, имеем $\tau \sim (\lambda^2/\varepsilon)^{1/3}$. Коэффициент диффузии $\varkappa_\lambda$, определяемый для масштаба λ, запишем в виде

$$\varkappa_\lambda = {}^1/_6 v^2\tau \sim {}^1/_6 \lambda^{4/3}\varepsilon^{1/3} \tag{10}$$

Введем число Рейнольдса R_λ, определяющее в турбулентном потоке пульсации масштаба λ, и воспользуемся связью с обычным числом Рейнольдса R [2]

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda \rho}{\nu} \sim \frac{\rho\varepsilon^{1/3}\lambda^{4/3}}{\nu} \sim R(\lambda/l)^{4/3} \qquad \left(R = \frac{v_0 \rho l}{\nu}\right) \tag{11}$$

Тогда из соотношений (10) и (11) следует:

$$\varkappa_\lambda \approx v_0 (\lambda^4/l)^{1/3}$$

В последней формуле необходимо оценить величину λ. При $\lambda < r_0$ диффузия игольчатых частиц возникнуть не может, так как отдельные части игольчатой частицы длиной r_0, получая беспорядочные пульсационные колебания, не могут заставить двигаться частицу в целом.

При $\lambda > r_0$ возможно лишь конвективное движение всей группы частиц, но таких пульсаций вблизи поверхности нет.

При $\lambda \sim r_0$ частицы будут испытывать диффузионное движение и коэффициент диффузии оценивается выражением

$$\varkappa_{r_0} \sim v_0 (r_0^4/l)^{1/3}$$

Таким образом, коэффициент диффузии пропорционален скорости движения фильтрационной поверхности и длине игольчатых частиц в степени $^4/_3$.

Для оценки коэффициента γ будем исходить из следующих представлений. Уравнение [4]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -2\gamma\varkappa \frac{\partial(F\rho)}{\partial x}$$

описывает среду, движущуюся со скоростью $v = 2\gamma\varkappa F$. Если в рассматриваемом случае пренебречь диффузионным членом в уравнении (9) и положить $\theta \to \pi/2$, то приближенное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq -\frac{\partial}{\partial\varphi}[\gamma M_\theta f]$$

будет описывать среду, вращающуюся с угловой скоростью $\omega = \gamma M_\theta$. Учитывая, что при $\theta \to \pi/2$ $\omega \sim v_p/r_0$, получим

$$M_\theta \sim k_0 \mu v_p r_0^2, \qquad \gamma \sim \frac{1}{k_0 \mu r_0^3}$$

Построение функции $f(t, \varphi, \theta)$ связано с решением уравнения (9). Решение этого уравнения аналитическими методами получить невозможно, так как проекции момента внешних сил определяются достаточно сложными выражениями.

Если принять, что за время образования пленки фильтрата процесс диффузии достигает стационарного состояния, то уравнение (9) несколько упростится. Положив $\partial f/\partial t = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\gamma M_\theta f + \frac{\varkappa}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(\gamma M_\theta f - \varkappa\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right] = 0 \tag{12}$$

Заметим, что равновесного (статического) решения стационарное уравнение (12) иметь не может, так как внешнее силовое поле, характеризуемое моментом сил (4), (5), не имеет потенциала [4].

Рассмотрим предельные случаи процесса фильтрации, для которых можно построить решения уравнения (12) при некоторых упрощающих предположениях. Такие решения могут иметь определенный практический интерес.

Пусть на расстояниях порядка длины игольчатой частицы от фильтрационной поверхности скорость фильтрационного потока значительно меньше скорости турбулентного потока ($v_x^0 > v_p$). Тогда

$$g(r, \varphi, \theta) \simeq \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\theta}, \qquad M_\theta > M_\varphi$$

и уравнение можно записать в виде

$$\gamma M_\theta f + \frac{\varkappa}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0$$

$$M_\theta = b\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}\,\sin\varphi\cos\theta, \qquad b = \frac{k_0\mu\nu r_0^3}{3\delta_0^2}$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде

$$f = c\exp\left[B\cos\theta_1(\sin 2\varphi + 2\arcsin\cos\varphi)\right] \tag{13}$$

$$B = \frac{\gamma b}{2\varkappa} = \frac{k_0\gamma\mu\nu r_0^3}{6\delta_0^2\varkappa}$$

где θ_1 – среднее значение угла наклона игольчатых частиц к плоскости xy.

Пусть скорость фильтрационного потока значительно больше скорости турбулентного потока и, следовательно, $M_\varphi > M_\theta$. В этом случае $g(r, \varphi, \theta) \simeq \sin\theta$ и уравнение (12) преобразуется к виду

$$\gamma M_\varphi f - \varkappa\frac{\partial f}{\partial\theta} = 0$$

$$M_\varphi = a\sin^2\theta, \qquad a = {}^1/_2 k_0\mu v_p r_0^2$$

Решение последнего уравнения представим в виде

$$f = c\exp\left[\frac{A}{4}(2\theta - \sin 2\theta)\right], \qquad A = \frac{\gamma a}{\varkappa} = \frac{k_0\gamma\mu v_p r_0^2}{2\varkappa} \tag{14}$$

Для практических целей можно использовать построенные предельные функции распределений (13) и (14), приближенно считая, что в общем случае процесса фильтрации распределение по φ не зависит от θ. В этом случае распределение частиц по направлениям можно описывать приближенной функцией $f(\theta, \varphi)$, являющейся произведением функций (13) и (14).

Поступила 9 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берней И. И.* Основы теории формирования асбестоцементных изделий. М., Стройиздат, 1969.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
4. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы математической физики. М., «Наука», 1973.
5. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.