6. *Cochran W. G.* The flow due to rotating disc. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, vol. 30, No. 3.
7. *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
8 *Амфилохиев В. Б., Фергюсон А. М.* Сопротивление трения шероховатых поверхностей в слабых растворах полимеров. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1971, вып. 74.
9. *Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А.* О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.

УДК 532.5:532.135

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОДИНАМИКИ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА К ДИСПЕРСНЫМ СРЕДАМ

Г. М. АРУТЮНЯН

(Москва)

Известно [1, 2], что в рамках односкоростной модели движения дисперсной среды принято считать аналогичными движениям совершенного газа с некоторым эффективным показателем адиабаты. В работе впервые строго доказывается, что такая аналогия в общем случае возможна, если в процессе движения объем газа близок к объему смеси. При движениях же без поверхностей ударных волн это возможно и тогда, когда плотность газа близка к плотности смеси. Показывается, что эти условия тождественны наложению определенных ограничений на концентрацию и исходное отношение плотностей компонент. Поскольку общий анализ этих ограничений оказывается практически невозможным, задачу приходится решать путем ее сведения к случаям, когда они выполняются заведомо. При этом используется полученное в работе выражение для сжатия в предельно сильных ударных волнах. Это, однако, оказывается сопряженным с нетривиальным анализом рассматриваемых течений, что иллюстрируется на примерах перехода от чисто адиабатических к движениям с одной и особенно с двумя и более поверхностями разрывов.

1. Исходные положения. Под дисперсной средой будем подразумевать газ с равномерно распределенными в нем твердыми или жидкими частицами. Будем считать, что в процессе движения: 1) частицы несжимаемы, 2) частицы и газ находятся в тепловом равновесии, 3) газ совершенен, 4) скорости частиц и газа равны, 5) реакции между компонентами отсутствуют.

Введем сответственно обозначения: p, T, V, s, E, $\mathbf{v}$, v_n – давление, температура, удельные объем, энтропия и внутренняя энергия, скорость вещества и ее нормальная к поверхности разрыва составляющая; индексы 1 и 2 относятся к первой и второй компонентам, 0 – к их значениям в исходном невозмущенном состоянии; x, γ, c_p, c_V, μ, ν, $\varkappa$ – массовая концентрация, показатель адиабаты, удельные теплоемкости, молекулярный вес и коэффициенты вязкости и теплопроводности второй компоненты – газа; R – универсальная газовая постоянная; r, ρ_1, c,– размер, плотность и удельная теплоемкость частиц; τ_T, τ_v – времена выравнивания температур и скоростей частиц и газа; l – характерный размер явления; a – скорость звука в дисперсной среде.

Исходное состояние среды будем характеризовать независимыми параметрами x и k_1, где $k_1=V_{20}/V_{10}$, или же k и k_1, где $k=(V_{20}/V_0)-1$.

2. Об одном свойстве уравнений движения совершенного газа. Система уравнений адиабатических движений совершенного газа имеет вид [3]

$$\frac{\partial V}{\partial t}-V^2\operatorname{div}\frac{\mathbf{v}}{V}=0,\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-V\nabla p,\qquad \frac{d}{dt}(pV^\gamma)=0 \tag{2.1}$$

Если поле течения содержит поверхности ударных волн, то в системе, где они покоятся

$$\left[\frac{v_n}{V}\right]=0,\quad \left[p+\frac{v_n^2}{V}\right]=0,\quad \left[\frac{v_n^2}{2}+pV+E\right]=0\quad \left(E=\frac{pV}{\gamma-1}\right) \tag{2.2}$$

Скобками в (2.2) обозначены разности соответствующих величин по обе стороны разрыва. Что касается начальных и других граничных условий, то они выражаются через p, V, $\mathbf{v}$ и их производные. Например, на контактном разрыве $[v_n]=0$, $[p]=0$.

Таким образом, γ входит только в условие адиабатичности движения и внутреннюю энергию на поверхности ударных волн. Остальные соотношения выражаются только через p, v, V и их производные и в рамках условия 4) справедливы также и для дисперсных сред. Поэтому, если бы для последних удалось сохранить условие адиабатичности движения и выражение для внутренней энергии совершенного газа введением некоторого эффективного показателя адиабаты, то движения дисперсной среды были бы полностью аналогичны движениям совершенного газа.

3. Условие адиабатичности движения и внутренняя энергия дисперсного вещества. Адиабатичность для дисперсного вещества выражается условием $ds=(1-x)ds_1+xds_2=0$ [4]. Учитывая в последнем предположения 1) и 3) и уравнение состояния газа, приходим к дифференциальному уравнению относительно p и V_2, интегрирование которого с учетом того, что для смеси $V=(1-x)V_{10}+xV_2$, дает

$$\frac{d}{dt}[p(\lambda V_2)^{\gamma'}]=\frac{d}{dt}\left\{p\left[\lambda\left(\frac{V-(1-x)V_{10}}{x}\right)\right]^{\gamma'}\right\}=0, \tag{3.1}$$

$$\gamma'=\frac{c+x(c_p-c)}{c+x(c_V-c)}$$

где λ – произвольная постоянная величина.

Поскольку для смеси $dE=(1-x)dE_1+xdE_2$, то в силу предположений 1) – 3) и учета уравнения состояния газа после интегрирования получаем

$$E=xV_2p/(\gamma'-1)=[V-(1-x)V_{10}]p/(\gamma'-1) \tag{3.2}$$

Положив в (3.1) $\lambda=x$, из (3.1) и (3.2) заключаем, что движения дисперсной среды будут аналогичны движениям совершенного газа, если xV_2 близко к V, т. е. объем газа близок к объему смеси. При этом необходимо пользоваться показателем адиабаты (3.1), совпадающим с γ' [1, 2].

Положив в (3.1) $\lambda=1$, видим, что движения дисперсной среды без поверхностей ударных волн будут аналогичны движениям совершенного газа и тогда, когда V_2 близко к V, т. е. плотность газа близка к плотности смеси.

4. Общие критерии аналогии и ударная адиабата дисперсного вещества. Для упрощения исследования примем, что

$$k_1\gg 1,\quad k_1c\gg c_p,\ c_V,\ c_p-c_V \tag{4.1}$$

Будем считать, что неравенства типа (4.1) обеспечивают различие величин не менее чем на один порядок, и пренебрегать меньшей из них. Первое из неравенств (4.1) выполняется как правило, остальные – также практически всегда, поскольку для типичных дисперсных сред [5] $c\sim c_p$, c_V, c_p-c_V.

Исходя из вышесказанного и (3.1), можно показать, что величины xV_2 и V_2 могут быть заменены на V соответственно при $V\gg(1-x)V_{10}$ и $V\gg[(1-x)/x](V-V_{10})$.

Переходя в последних неравенствах от x к k при помощи соотношения

$$k=k_1(1-x)/(1+k_1x),\quad 0<x<1 \tag{4.2}$$

получим

$$V\gg[k/(1+k)]V_{10},\quad V\gg[k_1k/(k_1-k)](V-V_{10}) \tag{4.3}$$

Известно [3], что для любого вещества при ударном сжатии

$$E-E_0={}^1/_2(V_0-V)(p_0+p) \tag{4.4}$$

Считая, что перед скачком $k_1\gg 1$, левую часть (4.4) можно выразить через p и V и в результате прийти к следующему выражению для ударной адиабаты дисперсного вещества:

$$V/V_0=\{\{1+2\delta(x)[1-\alpha(x)]\}p_0+[1+2\alpha(x)\delta(x)]p\}/\{p_0+[1+2\delta(x)]p\} \tag{4.5}$$
$$\alpha=(1-x)/(1+k_1x),\quad \delta=[(1-x)/x](c\mu/R)+1/(\gamma-1)$$

Из (4.5) следуют очевидные соотношения при $x\to 0$ и $x\to 1$. Для предельного же ударного сжатия

$$V/V_0\to[1+2\alpha(x)\delta(x)]/[1+2\delta(x)]\quad (p/p_0\to\infty) \tag{4.6}$$

С ростом x от 0 до 1 правая часть (4.6) изменяется от 1 до $(\gamma-1)/(\gamma+1)$.

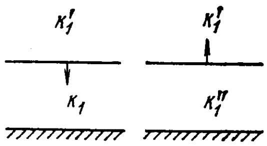
5. Исследование критериев (4.3) для некоторых классов движений. Рассмотрим сначала первое из условий (4.3).

а) Пусть происходит адиабатическое расширение дисперсной среды из невозмущенного состояния без поверхностей разрывов. Примеры – разлет в вакуум, истечение из сопла и других объемов в область с пониженным давлением и т. д. Поскольку при этом $V_0 = V_{\min}$, то исследуемое условие сводится к $k < k_1/10$.

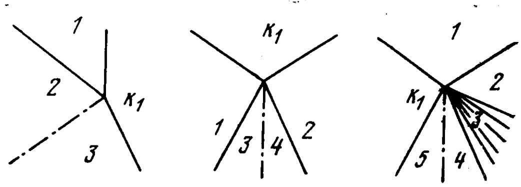
б) Рассмотрим теперь адиабатические движения дисперсной среды, отделенные от области невозмущенного течения поверхностью ударной волны. Примеры – прямая или косая ударная волна, обтекание различных тел сверхзвуковым потоком, сильный взрыв в среде [1, 6] и т. д. Для выполнения рассматриваемого условия достаточно, чтобы $V_{\min} \gg [k/(1+k)] V_{10}$, где $V_{\min}$ определяется (4.6). Переходя в последнем неравенстве от x к k, окончательно получаем

$$k < K_0(k_1) = [-(11c_p + 7c_V) + \sqrt{(11c_p+7c_V)^2 + 72k_1 c(c_p - c_V)}]/36c \tag{5.1}$$

причем, как показывают оценки, $K_0(k_1) \ll k_1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

в) Рассмотрим регулярное отражение ударной волны [7–9]. Обратимся сначала к случаю нормального отражения (фиг. 1) считая, что в падающей волне $p < p_*$. Потребуем, чтобы

$$k_1 \gg p_*/p_0 \tag{5.2}$$

Тогда подавно $k_1 \gg 1$ и, как нетрудно показать, $k_1' \gg 1$. Следовательно, к падающему и отраженному скачкам можно в отдельности применять соотношения для прямого скачка в совершенном газе с γ', если соответственно $k < K_0(k_1)$, $k' < K_0(k_1')$. Учитывая далее, что $dK_0/dk_1 > 0$, $dk/dk_1 > 0$, $k_1 > k_1' > k_1 p_0/p_*$, можно показать, что при

$$k < K_0(k_1 p_0/p_*) \tag{5.3}$$

эти неравенства для k и k' будут выполняться одновременно. Итак, при выполнении (5.2) условие (5.3) будет достаточным для описания нормального отражения при помощи соотношений для совершенного газа с показателем адиабаты γ'. А поскольку регулярное отражение – это совокупность двух косых ударных волн, для которых сохраняет силу ударная адиабата для прямого скачка, то при выполнении (5.2) условие (5.3) и здесь будет достаточным для аналогии с совершенным газом, если в падающей волне $p < p_*$.

г) Рассмотрим представленные на фиг. 2 случаи пересечения поверхностей разрывов, содержащие контактный разрыв. Считая исходным состояние с k_1, можно показать, что при выполнении (5.2) условие (5.3) для них также будет достаточным для аналогии с совершенным газом, если в областях *1*, а во втором случае – также и *2* $p < p_*$. В последнем случае учитывалось (поскольку *3* – волна разрежения), что $V_2 < V_3 < V_4$. В результате исследуемое первое условие (4.3), выполняющееся в области *2*, будет тем более выполняться в областях *3* и *4*.

д) Рассмотрим теперь второе из условий (4.3). Нетрудно показать, что оно равносильно требованию

$$V/V_{10} > -10k/(1-10k), \quad k < 1/10 \tag{5.4}$$

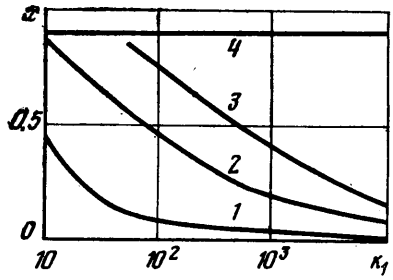
которое всегда выполняется. Значит любые движения дисперсной среды без поверхностей ударных волн аналогичны соответствующим движениям совершенного газа с показателем адиабаты γ', если $k < 1/10$.

6. Представление найденных условий через x и k_1. Перейдем в найденных условиях а) – д) от k к x. Учитывая, что $K_0 < k_1$, $dK_0/dk_1 > 0$, соответственно будем иметь

$$x > \frac{9}{10+k_1}, \quad x > \frac{1}{K_0(k_1)+1}, \quad x > \left[K_0\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}k_1\right)+1\right]^{-1}, \quad x > \frac{10}{11} \tag{6.1}$$

Обозначив через x_0 правые части (6.1), можно показать, что в трех первых случаях $dx_0/dk_1 < 0$, причем $x_0(\infty) = 0$. На фиг. 3 представлены зависимости x_0 от k_1 для смеси частиц SiO_2 в воздухе при нормальных условиях (кривые *1–4* соответственно; кривая *3* – при $p_*/p_0 = 6$). Характеристики компонент заимствовались из [5, 10, 11]. Части плоскости k_1x выше кривых *1–4* соответствуют исходным параметрам, при которых движения дисперсной среды будут аналогичны движениям совершенного газа.

Можно показать, и это подтверждается сравнением кривых *1* и *4*, что если V_2 близко к V, то произведение xV_2 и подавно будет близко к V. Поэтому при движениях без поверхностей ударных волн последним условием (6.1) следует пользоваться, если исследование первого критерия (4.3) затруднено или невозможно.



Фиг. 3

В заключение заметим, что условия 2) и 4) будут выполнены, если

$$\tau_T,\ \tau_v \ll l/a,\quad \tau_T \sim \rho_1 c r^2/\varkappa,\quad \tau_v \sim \rho_1 r^2/\nu \tag{6.2}$$

Видно, что их можно достичь хотя бы за счет достаточно малых r. Значение a находится из условия постоянства фигурных скобок (3.1)

$$a = V[-(\partial p/\partial V)_s]^{1/2} = V\{\gamma' p/[V-(1-x)V_{10}]\}^{1/2} \tag{6.3}$$

Оно совпадает с «адиабатически-изотермической» скоростью звука [12], если в нем учесть условие 1).

Поступила 16 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоркина С. И.* О некоторых движениях аэрозоля. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 3.
2. *Marble F. E.* Dynamics of dusty gases. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 2, Palo Alto, Calif., 1970.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1953.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
5. *Кэй Д., Лэби Т.* Таблицы физических и химических постоянных. М., Физматгиз, 1962.
6. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехтеоретиздат, 1954.
7. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
8. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. *Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В.* Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.
10. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., «Наука», 1972.
11. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. М., Физматгиз, 1962.
12. *Арутюнян Г. М.* Слабые ударные волны в терморелаксирующей среде. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, вып. 4.