

ВРАЩЕНИЕ ДИСКА В РАСТВОРАХ ПОЛИМЕРОВ
ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

В. Б. АМФИЛОХИЕВ, Н. П. МАЗАЕВА

(Ленинград)

Применение длинномолекулярных полимеров — весьма эффективный способ уменьшения турбулентного трения в воде [1]. Объяснение их влияния основывается, как правило, на использовании неньютоновских реологических моделей или полуэмпирических теорий турбулентности. Например, в [2] предлагается принять длину пути перемешивания $l = \varphi l_0$, где l_0 — длина пути перемешивания в воде, а φ — параметр, учитывающий влияние полимерных добавок, в результате чего профиль осредненной скорости турбулентного течения получается в виде логарифмической зависимости

$$(1) \quad U = \frac{u}{v_*} = \frac{1}{k\varphi} \ln \frac{v_* z}{\nu} + \frac{B}{\varphi}$$

Здесь $k=0.4$ и $B=5.5$ — первая и вторая константы турбулентности, v_* — динамическая скорость; z — координата, перпендикулярная обтекаемой поверхности; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение (1) говорит об изменении наклона профиля, построенного в обычных полулогарифмических координатах, при изменении параметра φ . Если этот параметр зависит только от вида и концентрации полимера и не зависит от формы течения и координаты z , то изменение наклона профиля будет одинаковым при всех значениях аргумента в формуле (1) и для различных потоков. Многочисленные экспериментальные данные не подтверждают такого простейшего изменения. Однако вблизи стенки, т. е. в области, в основном определяющей трение, оно осуществляется с высокой степенью точности, а при умеренных значениях числа Рейнольдса захватывает почти всю пристенную зону (см., например¹, рис. 6). Представляется целесообразным применить столь простую гипотезу и для пограничного слоя, в особенности пространственного.

В качестве примера пространственного пограничного слоя можно использовать течение, вызванное вращающимся диском. Соответствующие уравнения движения в цилиндрических координатах z, r, θ (z — ось вращения диска, r и θ — полярные координаты, лежащие в его плоскости) и в обычных предположениях теории пограничного слоя имеют вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} v_r + \frac{v_\theta v_r}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_r}{\partial r} v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; v_θ, v_r и v_z — окружная, радиальная и осевая составляющие скорости; $\tau_{z\theta}$ и τ_{zr} — окружная и радиальная составляющие касательного напряжения.

Система (2) и кинематические граничные условия

$$z=0: \quad v_\theta = r\omega, \quad v_r = v_z = 0, \quad z \rightarrow \infty: \quad v_r, v_\theta \rightarrow 0$$

¹ Хабахпашева Е. М. Течение и теплообмен водных растворов высокополимеров. Автореф. докт. дис. Новосибирск, 1971.

в которых ω — угловая скорость вращения диска, не зависят от режима течения и типа жидкости, так как правая часть первых двух уравнений системы записана в напряжениях. Универсальными будут и соответствующие интегральные соотношения

$$(3) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^{\infty} v_{\theta} v_r dz \right) = - \frac{r^2}{\rho} \tau_{z\theta} |_{z=0}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\infty} v_r^2 dz \right) - \int_0^{\infty} v_{\theta}^2 dz = \frac{r}{\rho} \tau_{zr} |_{z=0}$$

Для решения системы (3) удобно перейти к координатам, вращающимся вместе с диском, задав направление отсчета полярного угла так, чтобы относительная окружная скорость $u = r\omega - v_{\theta}$ была бы положительной. Тогда радиальная скорость и касательные напряжения в относительном движении

$$v = v_r, \quad z=0: \quad \tau_{zr} = \tau_r, \quad \tau_{z\theta} = -\tau_{\theta}$$

В качестве окружной относительной скорости можно взять логарифмическую зависимость (1), учитывающую влияние полимеров с помощью параметра ϕ , а радиальную записать в соответствии с гипотезой Магера [3]

$$(4) \quad \frac{v}{v_*} = \frac{u}{v_*} \left(1 - \frac{\eta}{\eta_2} \right)^2 \psi$$

$$\eta = \frac{v_* z}{v}, \quad \eta_2 = \frac{v_* \delta}{v}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_{\theta}}{\rho}}, \quad \psi = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \frac{\tau_r}{\tau_{\theta}}$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя.

После преобразований, аналогичных выполненным в [4], система (3) приводится к виду

$$(5) \quad A_1 \frac{dV}{dR} + B_1 \frac{d\psi}{dR} = C_1, \quad A_2 \frac{dV}{dR} + B_2 \frac{d\psi}{dR} = C_2$$

$$V = \frac{\omega r}{v_*}, \quad R = \frac{\omega r^2}{v}, \quad A_1 = 2V \frac{\partial \theta_{12}}{\partial V} + 2\theta_{12}, \quad A_2 = 2V \frac{\partial \theta_{22}}{\partial V} + 2\theta_{22}$$

$$B_1 = 2V \frac{\partial \theta_{12}}{\partial \psi}, \quad B_2 = 2V \frac{\partial \theta_{22}}{\partial \psi}, \quad C_1 = \frac{1}{V^2} - \frac{3V\theta_{12}}{R} - 2V \frac{\partial \theta_{12}}{\partial R}$$

$$C_2 = - \frac{\psi}{V^2} - \frac{V}{R} (\theta_{11} - \theta_1 - 2\theta_{22}) - 2V \frac{\partial \theta_{22}}{\partial R}$$

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{R}}{V^2} I_1, \quad \theta_{11} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} I_2, \quad \theta_{12} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} I_3, \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{R}}{V^2} \psi I_5, \quad \theta_{22} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi^2 I_{11}$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial V} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi \left[\left(\frac{2}{kV} - 2 \right) I_5 - \left(\frac{2}{Vx_2} + \frac{2k}{x_2} \right) I_7 + \frac{2}{V} I_8 + \frac{2}{x_2} (1+kV) I_9 - \frac{1}{k} I_{10} \right]$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial R} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi \left[\left(\frac{V}{2R} - \frac{1}{kR} \right) I_5 + \frac{1}{Rx_2} I_7 - \frac{1}{2R} I_8 + \frac{V}{Rx_2} I_9 + \frac{V}{2kR} I_{10} \right]$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial \psi} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} (VI_5 - I_8), \quad \frac{\partial \theta_{22}}{\partial \psi} = 2 \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi I_{11}$$

$$\frac{\partial \theta_{22}}{\partial V} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi \left[-\frac{2}{kV} I_4 + \left(\frac{4}{Vx_2} + \frac{4k}{x_2} \right) I_6 - \frac{3}{V} I_{11} \right]$$

$$\frac{\partial \theta_{22}}{\partial R} = \frac{\sqrt{R}}{V^3} \psi^2 \left(\frac{1}{kR} I_4 - \frac{2}{Rx_2} I_6 + \frac{1}{2R} I_{11} \right)$$

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} (V-U) dx, \quad I_2 = \int_{x_1}^{x_2} (V-U)U dx, \quad I_{10} = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^2 dx$$

$$I_3 = \int_{x_1}^{x_2} (V-U)U \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^2 dx, \quad I_4 = \int_{x_1}^{x_2} U \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^4 dx$$

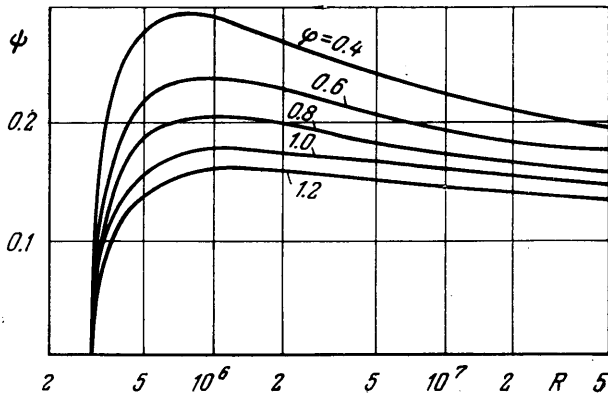
$$I_5 = \int_{x_1}^{x_2} U \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^2 dx, \quad I_6 = \int_{x_1}^{x_2} U^2 \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^3 \frac{x}{x_2} dx$$

$$I_7 = \int_{x_1}^{x_2} U^2 \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \frac{x}{x_2} dx, \quad I_8 = \int_{x_1}^{x_2} U^2 \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^2 dx$$

$$I_9 = \int_{x_1}^{x_2} U \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \frac{x}{x_2} dx, \quad I_{11} = \int_{x_1}^{x_2} U^2 \left(1 - \frac{x}{x_2} \right)^4 dx$$

$$x = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{V}{\sqrt{R}} \eta, \quad x_1 = \frac{V}{\sqrt{R}} e^{-hB}, \quad x_2 = \frac{V}{\sqrt{R}} e^{h(\varphi V - B)}$$

При интегрировании системы (5) следовало бы учесть, что пограничный слой диска состоит из трех участков: ламинарного, переходного и турбулентного. Фор-



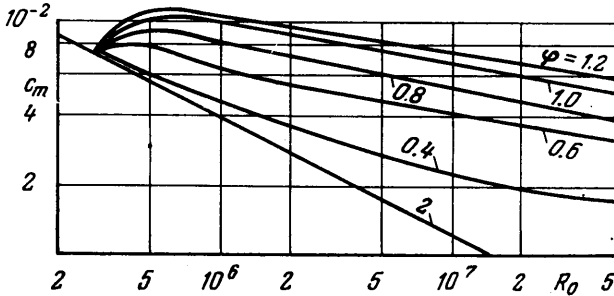
Фиг. 1

мулы для A_i , B_i , C_i , I_i и (4) справедливы для всех трех участков, некоторые из формул θ_i и x_i получены после использования профиля (1), т. е. лишь для турбулентного участка. Однако небольшая протяженность ламинарного и переходного участков при числах Рейнольдса $R_0 \geq 10^6$ и их расположение вблизи оси вращения диска позволяют рассчитывать течение в них довольно приближенно, не внося при этом существенных ошибок в величину суммарного момента сопротивления вращению диска. Кроме того, в [5] показано, что полимеры оказывают очень слабое влияние на течение около диска при ламинарном режиме. Следовательно, для ламинарного участка вместо интегрирования системы (5) можно использовать точное

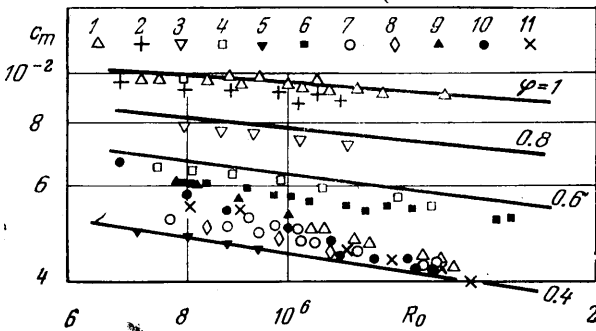
решение Кохрена [6], полученное для ньютоновской жидкости

$$\tau_r' = 0.510 \rho r \sqrt{v \omega^3}, \quad (v_*')^2 = 0.616 r \sqrt{v \omega^3}, \quad \theta_2' = 0.328 R^{1/4}$$

Переходной участок можно заменить условной точкой перехода, удовлетворяющей [4] граничным условиям $\tau_r' = \tau_r^t$, $\theta_2' = \theta_2^t$, в которых индексы l и t соответствуют ламинарному и турбулентному режимам. При этом число Рейнольдса точки



Фиг. 2



Фиг. 3

перехода (индекс T) может быть принято [5] таким же, как для чистой воды. С помощью решения Кохрена граничные условия в точке перехода приводятся к виду

$$I_5(V_T, R_T) = 0.643 R_T^{-1/4}, \quad \psi_T = 0.510 V_T^2 R_T^{-1/2}$$

откуда для $R_T = 3 \cdot 10^5$ получается $V_T = 7.26$ и $\psi_T = 0.049$. Начиная с этих значений для турбулентного участка, т. е. при местных числах Рейнольдса $R > R_T$, методом Рунге - Кутты с интервалом $\Delta R = 0.6$ было выполнено численное интегрирование системы (5), в результате которого получены зависимости $V(R, \phi)$ и $\psi(R, \phi)$. Кривые $\psi(R)$ для пяти значений параметра ϕ приведены на фиг. 1.

Переходя к диску с конечным радиусом r_0 , можно ввести следующие обозначения для числа Рейнольдса диска R_0 , местного коэффициента трения c_f и коэффициента сопротивления вращению диска c_m :

$$R_0 = \frac{\omega r_0^2}{\nu}, \quad c_f = \frac{2\tau_\theta}{\rho \omega^2 r^2} = \frac{2v_*'^2}{\omega^2 r^2} = \frac{2}{V^2}, \quad c_m = \frac{4(M_l + M_t)}{\rho \omega^2 r_0^5}$$

Здесь M_l и M_t — моменты, приложенные на ламинарном и турбулентном участках с одной стороны диска. Для M_t можно использовать формулу Кохрена при $R = R_T$, а

$$M_t = \int_{r_T}^{r_0} r \tau_\theta 2\pi r dr = \pi \rho \omega^2 \int_{r_T}^{r_0} r^4 c_f dr$$

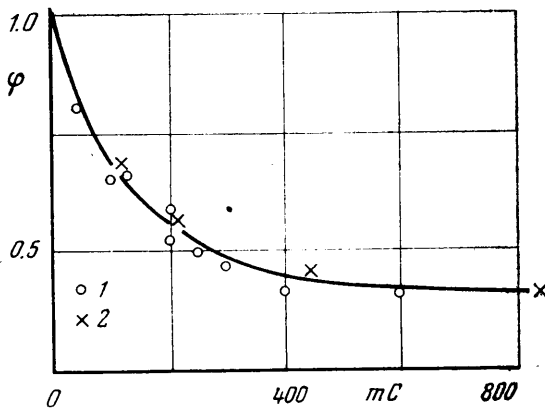
Окончательно

$$c_m = \left(3.87 R_T^2 + 4\pi \int_{R_T}^{R_0} R^{3/2} V^{-2} dR \right) R_0^{-5/2}$$

Кривые c_m построены на фиг. 2, причем кривая для $\varphi=1$ при $R_0 > 8 \cdot 10^5$ практически совпадает с известной [7] формулой $c_m = 0.982 (\lg R_0)^{-2.58}$, выведенной для чисто турбулентного режима течения ньютоновской жидкости, а кривая 2 соответствует чисто ламинарному режиму, т. е. решению Кохрена: $c_m = 3.87 R_0^{-1/2}$.

Для определения параметра φ различных полимерных растворов были использованы эксперименты [8], проведенные с полированным диском радиусом $r_0 = 114$ мм и толщиной $h = 15.2$ мм в кубическом баке со стороной 910 мм. При этом численные значения коэффициентов момента и чисел Рейнольдса, фигурирующие в [8], были исправлены: коэффициенты момента уменьшены в 1.21 раза, что учитывает влияние конечности толщины диска и ограниченности водоема, а числа Рейнольдса пересчитаны путем замены вязкости растворителя вязкостью раствора. Обработанные таким образом экспериментальные данные приведены на фиг. 3, где нанесены также участки расчетных кривых c_m , полученные для нескольких значений φ . Обозначения экспериментальных точек на фиг. 3 соответствуют следующим весовым концентрациям C : 1 — $C=0$ (чистый растворитель — вода); 2–5 — растворы гуаровой смолы (Guar Gum) $C=10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$, $2 \cdot 10^{-4}$, $6 \cdot 10^{-4}$; 6–8 — растворы полиакриламида (ВТ1-А150) $C=10^{-5}$, $4 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-5}$; 9–11 — растворы полиэтиленоксида (WSR-301) $C=5 \cdot 10^{-6}$, 10^{-5} , $6 \cdot 10^{-5}$.

Поведение экспериментальных зависимостей для растворов гуаровой смолы и полиакриламида хорошо соответствует расчетным данным; растворы полиэтиленоксида с ростом числа Рейнольдса увеличивают свою эффективность сильнее, чем это получается при расчетах для $\varphi = \text{const}$.



Фиг. 4

По-видимому, исходное предположение о справедливости (1) с $\varphi = \text{const}$ для растворов полиэтиленоксида не подтверждается, а для гуаровой смолы и полиакриламида оказывается очень удачным. Данные фиг. 3 позволяют установить прямую связь между концентрацией C растворов этих полимеров и параметром φ . Более того, если принять, следуя [9], что эффективность полимера зависит от комплексного параметра $C \mu^{0.85}$, где μ — молекулярный вес полимера, то можно подобрать некоторый множитель m , пропорциональный молекулярному весу в степени 0.85, который сведет две зависимости $\varphi(C)$ к одной — $\varphi(mC)$. Такая универсальная кривая приведена на фиг. 4, причем для гуаровой смолы (точки 1) было принято $m=1$, а для полиакриламида (точки 2) подобрано $m=22$, что говорит о том, что молекулярный вес полиакриламида должен быть приблизительно в 14 раз больше, чем гуаровой смолы. Такое заключение, судя по известным химическим данным, выглядит вполне правдоподобным.

В заключение можно отметить, что максимальному снижению сопротивления, достигнутому с помощью гуаровой смолы и полиакриламида, соответствует значение параметра $\varphi=0.4$.

Поступила 21 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Басин А. М., Короткин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна. Л., «Судостроение», 1968.
2. Артюшков Л. С. Сопротивление трения гладких пластин, обтекаемых турбулентным потоком разбавленных растворов полимеров. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1969, вып. 65.
3. Mager A. Generalization of boundary-layer momentum-integral equations to three-dimensional flows including those of rotating system. NASA Rept No. 1067, 1952.
4. Пилипенко В. Н. Течение слабых полимерных растворов в пограничном слое вращающегося диска. Тр. Ин-та механ. МГУ, 1974, вып. 31.
5. Амфилохийев В. Б., Фергюсон А. М. Вращение диска в полимерном растворе при ламинарном и переходном режиме. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1977, вып. 115.

6. *Cochran W. G.* The flow due to rotating disc. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, vol. 30, No. 3.
7. *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
8. *Амфилозиес В. Б., Фергюсон А. М.* Сопротивление трения шероховатых поверхностей в слабых растворах полимеров. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1971, вып. 74.
9. *Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А.* О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.

УДК 532.5:532.135

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОДИНАМИКИ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА К ДИСПЕРСНЫМ СРЕДАМ

Г. М. АРУТЮНЯН

(Москва)

Известно [1, 2], что в рамках односкоростной модели движения дисперсной среды принято считать аналогичными движениям совершенного газа с некоторым эффективным показателем адиабаты. В работе впервые строго доказывается, что такая аналогия в общем случае возможна, если в процессе движения объем газа близок к объему смеси. При движениях же без поверхностей ударных волн это возможно и тогда, когда плотность газа близка к плотности смеси. Показывается, что эти условия тождественны наложению определенных ограничений на концентрацию и исходное отношение плотностей компонент. Поскольку общий анализ этих ограничений оказывается практически невозможным, задачу приходится решать путем ее сведения к случаям, когда они выполняются заведомо. При этом используется полученное в работе выражение для сжатия в предельно сильных ударных волнах. Это, однако, оказывается сопряженным с нетривиальным анализом рассматриваемых течений, что иллюстрируется на примерах перехода от чисто адиабатических к движениям с одной и особенно с двумя и более поверхностями разрывов.

1. Исходные положения. Под дисперсной средой будем подразумевать газ с равномерно распределенными в нем твердыми или жидкими частицами. Будем считать, что в процессе движения: 1) частицы несжимаемы, 2) частицы и газ находятся в тепловом равновесии, 3) газ совершенен, 4) скорости частиц и газа равны, 5) реакции между компонентами отсутствуют.

Введем соответственно обозначения: p, T, V, s, E, v, v_n — давление, температура, удельные объем, энтропия и внутренняя энергия, скорость вещества и ее нормальная к поверхности разрыва составляющая; индексы 1 и 2 относятся к первой и второй компонентам, 0 — к их значениям в исходном невозмущенном состоянии; $x, \gamma, c_p, \mu, \nu, \kappa$ — массовая концентрация, показатель адиабаты, удельные теплоемкости, молекулярный вес и коэффициенты вязкости и теплопроводности второй компоненты — газа; R — универсальная газовая постоянная; r, ρ_1, c, \dots — размер, плотность и удельная теплоемкость частиц; τ_T, τ_v — времена выравнивания температур и скоростей частиц и газа; l — характерный размер явления; a — скорость звука в дисперсной среде.

Исходное состояние среды будем характеризовать независимыми параметрами x и k_1 , где $k_1 = V_{20}/V_{10}$, или же k и k_1 , где $k = (V_{20}/V_0) - 1$.

2. Об одном свойстве уравнений движения совершенного газа. Система уравнений адиабатических движений совершенного газа имеет вид [3]

$$(2.1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} - V^2 \operatorname{div} \frac{v}{V} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (vV)v = -V\nabla p, \quad \frac{d}{dt} (pV^\gamma) = 0$$

Если поле течения содержит поверхности ударных волн, то в системе, где они покоятся

$$(2.2) \quad \left[\frac{v_n}{V} \right] = 0, \quad \left[p + \frac{v_n^2}{V} \right] = 0, \quad \left[\frac{v_n^2}{2} + pV + E \right] = 0 \quad \left(E = \frac{pV}{\gamma - 1} \right)$$

Скобками в (2.2) обозначены разности соответствующих величин по обе стороны разрыва. Что касается начальных и других граничных условий, то они выражаются через p, V, v и их производные. Например, на контактном разрыве $[v_n] = 0, [p] = 0$.