

**ЗАДАЧА О ПОРШНЕ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ  
ЭКЗОТЕРМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**А. С. ЛЕЙБЕНЗОН**

(Москва)

Рассмотрены одномерные нестационарные течения горючей смеси газов с учетом нелинейной теплопроводности. Изучаются возможности существования автомодельных решений и приводятся условия, при выполнении которых такие решения имеются. Приводятся результаты численного расчета автомодельных задач о поршне и о самоподдерживающейся тепловой волне.

В работах [1, 2] были исследованы автомодельные решения одномерных нестационарных задач о поршне, самоподдерживающейся волне и сосредоточенном взрыве в горючей смеси газов с учетом конечной скорости течения химических реакций. В них дана математическая постановка задачи и приведен ряд численных решений. Предполагалось, что реакция начинается сразу за фронтом ударной волны, теплопроводность не учитывалась. Аналогичная задача о движении газа, нагреваемого излучением, рассматривалась в работе [3]. В работах [4, 5] изучена автомодельная задача о поршне, движущемся в теплопроводном газе, с учетом плоской симметрии. Предполагалось, что среда представляет собой полностью ионизованную плазму, коэффициент теплопроводности которой  $\kappa$  равен  $\kappa_0 T^{3/2}$ . Такой характер теплопроводности приводит к существованию тепловых волн, распространяющихся по первоначально холодному веществу. В работах [4, 5] приведены результаты численного расчета для различных режимов теплоподвода на поршне.

В данной работе изучаются движения среды с учетом нелинейной теплопроводности и экзотермических реакций. Решения приводятся для сферически симметричного случая.

Рассмотрим одномерные движения идеального газа с учетом нелинейной теплопроводности и экзотермических реакций. Будем изучать течения с плоскими, осесимметричными и сферическими волнами. Уравнения, описывающие движения среды, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + R \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{RT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \\
 (1) \quad & \frac{R\rho}{\gamma-1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) - RT \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \\
 & + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\beta Q) + v \frac{\partial}{\partial r} (\beta Q) \right] + \frac{\partial w}{r^2 \partial r} = 0 \\
 & \frac{\partial \beta}{\partial t} + v \frac{\partial \beta}{\partial r} = -k_1 \beta^\alpha \rho^z T^s \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad w = -r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$ ,  $v$  и  $T$  — плотность, скорость и температура среды,  $\beta$  — концентрация непрореагировавших молекул,  $w$  — поток тепла за счет теплопроводности,  $E$  и  $Q$  — энергия активации и полное тепловыделение в единице массы газа,  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $v=0$ . 1, 2 для плоского, осесимметричного и сферического случаев,  $k_1$  — предэкспоненциальный множитель,  $\alpha$  — порядок реакции,  $z$  и  $s$  — некоторые постоянные.

Предположим, что зависимость величин  $\kappa$ ,  $Q$  и  $E/R$  от параметров течения имеет вид

$$\kappa = \kappa_0 T^a \rho^b, \quad Q = Q_0 T^{a_1} \rho^{b_1}, \quad E/R = E_1 T^m$$

Будем считать, что в начальный момент времени скорость и температура среды равны нулю, концентрация равна единице, а плотность изменяется по следующему закону:  $\rho_0 = d/r^a$ . Исходя из этих предположений, можно считать, что при нелинейной теплопроводности ( $a > 1$ ) тепло распространяется в виде волны, фронт которой отделяет нагретую область от холодной.

Будем искать автомодельные решения задачи. Такие решения будут существовать при выполнении следующих условий:

$$(2) \quad b_1 = 0, \quad \omega z = 1, \quad (\omega - 1)/\omega = b$$

Единственной независимой безразмерной переменной является величина

$$\tau = \frac{r}{pBt}, \quad B = \frac{\kappa_0 d^{b-1}}{R} \left( \frac{Q_0}{R} \right)^{a/(1-a)}$$

Параметр  $p$  здесь введен для того, чтобы фронт тепловой волны находился в точке  $\tau = 1$ . Значение  $p$  будет определено в дальнейшем.

Введем новые безразмерные неизвестные функции  $\bar{v}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$

$$v = B\bar{v}, \quad \rho = \rho_* t^{-a} \bar{\rho}, \quad T = \left( \frac{Q_0}{R} \right)^{1/(1-a)} \bar{T}, \quad \rho_* = \frac{d}{(pB)^a},$$

$$T_* = \left( \frac{Q_0}{R} \right)^{1/(1-a)}$$

Для безразмерных неизвестных функций из (1) получим с учетом условий (2) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ ):

$$(3) \quad \begin{aligned} T'(\tau) &= \varphi(\tau) \\ \rho'(\tau) &= \frac{\rho[(v-p\tau)(p\omega - v\nu/\tau) + \pi_3 \varphi]}{(v-p\tau)^2 - \pi_3 T} \\ v'(\tau) &= \frac{\pi_3[-\varphi(v-p\tau) + T(v\nu/\tau - p\omega)]}{(v-p\tau)^2 - \pi_3 T} \\ \beta'(\tau) &= \frac{\pi_2 \beta^\alpha \rho^2 T^s \exp(\pi_1 T^{m-1})}{p\tau - v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &= \frac{1}{T^a \rho^b} \left[ \frac{\rho \varphi}{\nu - 1} (v - p\tau) - T \rho' (v - p\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \rho \beta' (v - p\tau) \right] - \frac{b \varphi \rho'}{\rho} - \frac{\nu}{\tau} \varphi - \frac{a \varphi^2}{T} \end{aligned}$$

$$\pi_1 = -E_1 T_*^{m-1}, \quad \pi_2 = k_1 \rho_*^* T_*^s, \quad \pi_3 = \frac{RT_*}{B^2}$$

Зависимость плотности от координаты и времени должна удовлетворять закону сохранения массы

$$(4) \quad \int_{\tau_1}^1 \tau^\omega \rho(v) d\tau = \frac{1}{\nu - \omega + 1}$$

Здесь  $\tau_1$  — положение внутренней границы газа.

Решение системы (3) должно удовлетворять граничным условиям

$$V=T=0; \quad \beta=\rho=1, \quad \tau=1$$

Если рассматривается задача о поршне, движущемся с постоянной скоростью, то к условиям (4) добавляются условия совпадения скоростей газа и поршня  $V=r\tau$ ,  $\tau=\tau_0$  и условие совпадения тепловых потоков в газе и на поршне при  $\tau=\tau_0$ .

Из условий автомодельности следует, что закон выделения тепловой энергии на поршне должен иметь вид  $E(t)=E_0 t^{\nu+1-\alpha}$ . Если рассматривается задача о движении самоподдерживающейся тепловой волны, то к условиям (4) добавляются следующие условия:

$$\tau=0, \quad V=0, \quad \tau^{\nu} \kappa_0 T^{\alpha} \rho^b dT/d\tau=0$$

Рассмотрим уравнения для  $\rho'$  и  $v'$  в системе (3). Знаменателем в правых частях этих уравнений является величина

$$(v-r\tau)^2 - \pi_3 T$$

При  $\tau=1$  это выражение больше нуля, а при  $\tau=0$  оно равно  $-\pi_3 T$ , и, следовательно, если  $T(0) \neq 0$ , то существует точка  $\tau_*$ , в которой знаменатель обращается в нуль. Число Маха в этой точке равно единице. Если числитель в одном из этих уравнений не равен нулю в точке  $\tau=\tau_*$ , то непрерывного перехода через эту точку нет, и в области  $\tau_* < \tau < 1$  должен существовать разрыв, который будет изотермическим скачком уплотнения. Пусть  $D$  — скорость распространения скачка уплотнения. Тогда соотношения на этом скачке в размерном виде выглядят так:

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho_1(u_1-D) &= \rho_2(u_2-D), & \rho_1 u_1(u_1-D) + \rho_1 RT &= \rho_2 u_2(u_2-D) + \rho_2 RT \\ \rho_1(u_1-D) \left( \frac{u_1^2}{2} + \frac{RT}{\gamma-1} \right) + \rho_1 u_1 RT - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)_1 &= \\ = \rho_2(u_2-D) \left( \frac{u_2^2}{2} + \frac{RT}{\gamma-1} \right) + \rho_2 u_2 RT - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)_2 \end{aligned}$$

Здесь индекс «1» относится к величинам перед разрывом, а индекс «2» — к величинам за разрывом.

Два первых соотношения из (5) можно разрешить независимо от третьего. Это дает следующее:

$$\rho_2 = \frac{(u_1-D)^2}{RT} \rho_1, \quad u_2 = D + \frac{RT}{u_1-D}$$

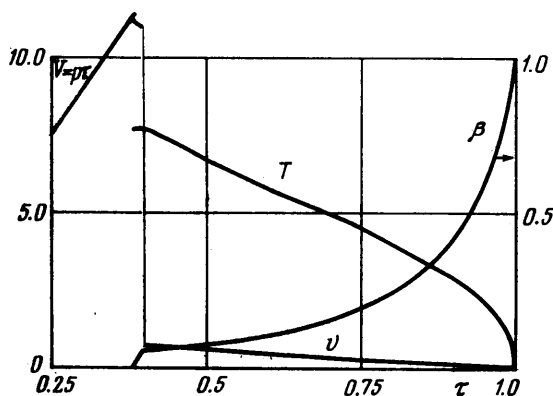
В безразмерном виде соотношения (5) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{(u_1 - p\tau_*)^2}{\pi_3 T} \rho_1, & u_2 &= p\tau_* + \frac{\pi_3 T}{u_1 - p\tau_*} \\ \left( \frac{dT}{d\tau} \right)_2 &= \frac{1}{\pi_3 T^{\alpha} \rho_2^{b-1}} (u_2 - p\tau_*) \left( \frac{u_2^2}{2} + \frac{\pi_3 T}{\gamma-1} \right) + \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^b \left( \frac{dT}{d\tau} \right)_1 - \\ &- \frac{\rho_1}{\pi_3 T^{\alpha} \rho_2^b} (u_1 - p\tau_*) \left( \frac{u_1^2}{2} + \frac{\pi_3 T}{\gamma-1} \right) + \frac{1}{\rho_1^b T^{\alpha}} (\rho_2 u_2 T - \rho_1 u_1 T) \end{aligned}$$

где  $\tau_*$  — положение скачка.

Рассмотрим картину течения на плоскости  $(V, \tau)$ . Прямая  $V=p\tau$  соответствует поршню, движущемуся с постоянной скоростью. Интегральные кривые лежат ниже этой прямой, т. е.  $V \leq p\tau$ . Кривая  $(V-p\tau)^2 - \pi_3 T = 0$  (или  $V = p\tau - \sqrt{\pi_3 T}$ ) дает множество точек, для которых число Маха равно единице. Назовем эту кривую звуковой линией. Если в некоторой точке  $\tau = \tau_*$  находится разрыв, то справа от этой точки кривая  $V = V(\tau)$ , являющаяся интегральной кривой системы (3), лежит ниже звуковой линии, а позади точки  $\tau = \tau_*$  — между прямой  $V = p\tau$  и звуковой линией.

Если значения параметров  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  и  $p$  заданы, то возможны случаи, когда непрерывное решение пересекает звуковую линию. Если в некото-



Фиг. 1

рой точке  $\tau_*$  ввести разрыв, то для  $\tau_* \geq \tau_2$  ( $\tau_2$  — некоторое предельное значение, при  $\tau_* < \tau_2$  решение задачи о поршне не существует) интегральная кривая выходит на прямую  $V = p\tau$  в некоторой точке  $\tau = \tau_0$ . Такое решение соответствует поршню, движущемуся со скоростью  $V = p\tau_0$  (или в размерном виде  $v = p\tau_0 B$ ). Величина  $E_0$  определяется из условия равенства тепловых потоков в точке  $\tau = \tau_0$ . Очевидно, что при  $T'(\tau_0) > 0$  на поршне происходит поглощение энергии; при  $T'(\tau_0) < 0$  — выделение энергии; при  $T'(\tau_0) = 0$  имеем адиабатический поршень.

Так как значения параметров  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  и  $p$  заданы, то задана и скорость движения фронта тепловой волны, отделяющего нагретую часть среды от холодной. Эта скорость равна  $pV$ .

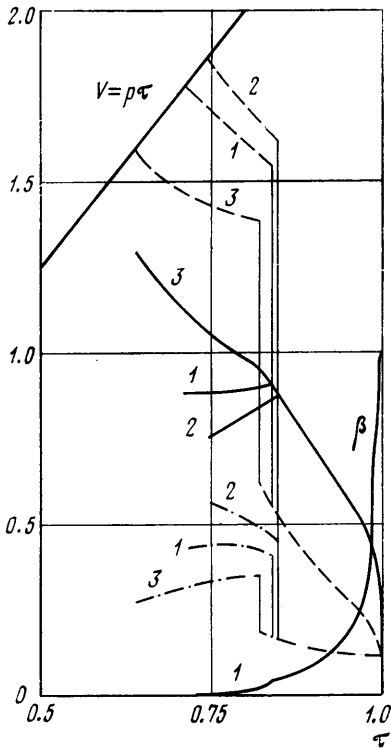
В зависимости от положения точки  $\tau_*$  возможны различные случаи решения задачи о поршне при заданной скорости движения теплового фронта. Так, если при некотором значении  $\tau_*$  имеем адиабатический поршень, движущийся со скоростью  $\tau_0 p$ , то при больших значениях  $\tau_*$  получаем поршень с отводом тепла, движущийся с большей скоростью, чем адиабатический поршень. Если же  $\tau_*$  уменьшать ( $\tau_* \geq \tau_2$ ), то получим поршень с подводом тепла, движущийся с меньшей скоростью, чем адиабатический.

На фиг. 1 приведен пример численного расчета адиабатического поршня при следующих значениях параметров:

$$Q_0 = 10^{17}, \quad d = 100, \quad \nu = 2, \quad \omega = 1, \quad p = 30$$

Остальные параметры соответствуют полностью ионизованной плазме с учетом электронной теплопроводности, в которой происходит экзотермическая реакция синтеза дейтерия и трития [6]. Скорость движения та-

кой тепловой волны равна  $9.6 \cdot 10^9$  см/сек. Скорость движения адиабатического поршня равна  $3.7 \cdot 10^9$  см/сек. Как видно из фиг. 1, картина течения при больших значениях  $p$  получается следующей. На небольшом расстоянии от поршня идет ударная волна и впереди нее на значительном расстоянии — тепловая волна.

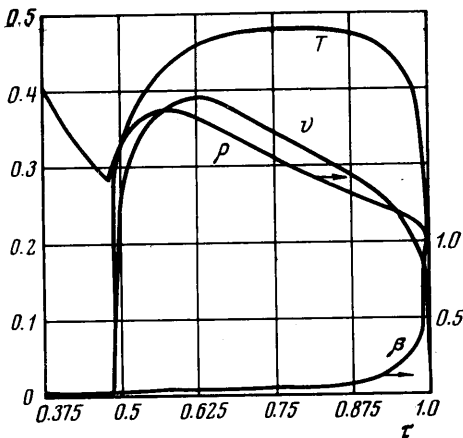


Фиг. 2

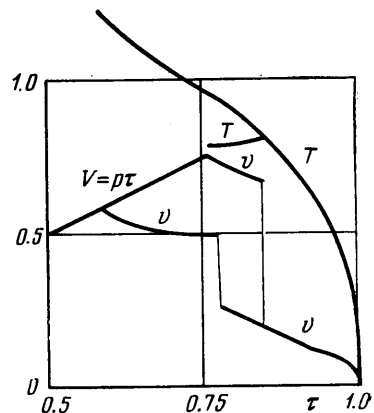
На фиг. 2 приведен пример численного расчета различных типов решения при  $p=2.5$ . Сплошной линией изображены значения температуры, пунктирной — скорости, штрих-пунктирной — значения плотности, уменьшенные в 10 раз. Случай 1 соответствует адиабатическому поршню, случай 2 — поршню с отводом тепла и случай 3 — поршню с подводом тепла. Скорость движения фронта тепловой волны в этом случае равна  $7.9 \cdot 10^8$  см/сек, а скорость движения адиабатического поршня —  $5.6 \cdot 10^8$  см/сек.

Отметим, что при  $p=2.085$  рассматриваемая задача имеет решение типа самоподдерживающейся волны, не содержащее сильных разрывов. Такое решение представляет собой уединенную волну, ограниченную задним и передним тепловыми фронтами. Течение всюду является сверхзвуковым. Такой характер решения связан с немонотонным законом зависимости скорости термоядерной реакции от температуры и со сферической симметрией задачи. За-

метим также, что для этого значения существует также и решение задачи о поршне. Для нахождения соответствующего значения параметра  $p$  так же, как и в задаче о сильном взрыве [7], использовался закон сохранения энергии; при этом энергией, затраченной на создание тепловой волны в



Фиг. 3



Фиг. 4

начальный момент времени, пренебрегаем по сравнению с энергией, выделяемой в результате экзотермической реакции. С учетом этого обстоятельства закон сохранения энергии в безразмерном виде выглядит так:

$$\int_0^1 \rho \left( \frac{T}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2\pi_s} \right) \tau^\nu d\tau = \int_0^1 \rho T^{\alpha_1} (1-\beta) \tau^\nu d\tau$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 3. Скорость движения тепло-вой волны в этом случае равна  $6.7 \cdot 10^3$  см/сек.

На фиг. 4 приведен пример рас-чета адиабатического поршня и поршня с подводом тепла при  $Q_0 = 5 \cdot 10^{16}$ ,  $d=10$ ,  $p=1$ . Остальные па-раметры остались без изменения.

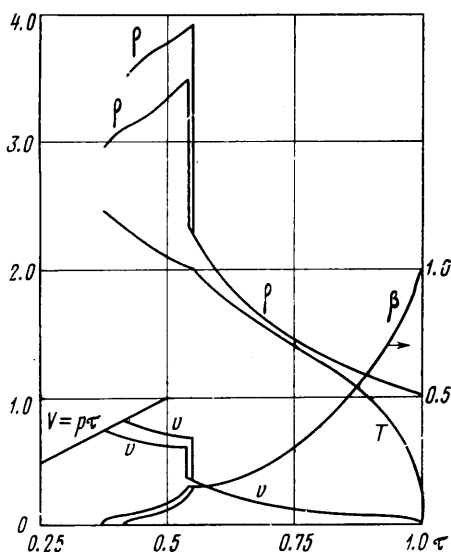
На фиг. 5 приводятся результаты расчетов того же течения при  $p=2$ . Рассматриваются два случая, соот-ветствующие поршню с подводом тепла, когда значения  $\tau_*$  отличаются на величину, равную шагу расчетной сетки. Как следует из расчетов, зависимость температуры от  $\tau$  при этом практически не изменяется, а зависимость скорости и плотности — изме-няется существенно.

Автор выражает благодарность В. А. Левину за постоянную помощь в работе.

Поступила 5 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бишимов Е., Коробейников В. П., Левин В. А., Черный Г. Г. Одномерные нестационарные течения горючей смеси газов с учетом конечной скорости химических реакций. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6.
2. Кроль В. М., Слободкина Ф. А. О предельных режимах автомодельных течений газа с учетом конечной скорости химических реакций. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6.
3. Кроль В. М., Немчинов И. В., Автомодельные движения нагреваемого излучением газа за фронтом ударной волны, инициирующей поглощение. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. Лукьянова Р. Г., Фадеев С. И. Автомодельное решение уравнений Навье-Стокса для полностью ионизованной водородной плазмы (Задача о плоском поршне). ПМТФ, 1969, № 3.
5. Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Бусурина Л. Н., Крус В. П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1.
6. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.



Фиг. 5