МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1979

УДК 534.222

О ВЕРОЯТНОСТНОЙ СТРУКТУРЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ ЗВУКА, ПОРОЖДЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В. И. КЛЯЧКИН

(Ленинград)

Уравнение для поля звукового давления в форме Лайтхилла в турбулентной среде рассматривается как динамическое соотношение, связывающее случайные поля давления и пульсаций скорости.

В связи с заданной формой уравнений движения конструируется уравнение в вариационных производных для совместных характеристических функционалов (ХФ) поля давлений и пульсаций скорости, строится его решение в форме континуальных интегралов, вычисляемых при гауссовой структуре полей пульсаций скорости.

В результате определяются ХФ и моментные функции поля давления при излучении звука турбулентностью в терминах ХФ пульсаций скорости в потоке сжимаемой жидкости; исследуется влияние сжимаемости на структуру пространственно-временных корреляционных функций поля давления.

Как известно (например, [1, 2]), поле давления звука, порождаемого турбулентностью, определяется волновым уравнением, решение которого может быть представлено через функцию Грина волнового оператора и объемный источник, билинейно связанный с пульсационной скоростью потока; аналогичную структуру образует пульсационная компонента давления в потоке несжимаемой жидкости с тем единственным отличием, что функция Грина в этой задаче определяется для уравнения Пуассона. Изучение первых статистических моментов поля давления в обоих случаях не представляет принципиальных затруднений; соответствующие результаты приводятся в [1].

Однако анализ высших статистических моментов для многомерных функций распределения становится практически невыполнимым; естественно поэтому, что переход к бесконечномерному (континуальному) случаю требует использования иных методов. В этом плане представляется перспективным изучение характеристических функционалов поля при известных формах уравнений движения, задающих условия связи полей и их источников. В упомянутых выше двух задачах речь идет об установлении зависимости ХФ поля давления и ХФ пульсационной скорости, связанных нелинейно через соответствующие уравнения движения. На примере этих задач демонстрируется возможность использования ХФ в целях изучения вероятностной структуры случайных полей достаточно общего вида.

Метод ХФ уже нашел применение при анализе уравнений Навье – Стокса в теории турбулентности (например, [1]), при изучении распространения волн в средах со случайными неоднородностями [3, 4], а также при построении конструктивных моделей случайных процессов [5]. При этом исследование волновых полей, подчиняющихся нелинейным и параметрическим уравнениям движения, наиболее интересно, так как изучение преобразования вероятностной структуры линейной системой не представляет существенных трудностей (например, [5–7]).

Имея в виду в конечном счете изучить вероятностную структуру полей давлений звука, порождаемого турбулентностью, и полей давлений в потоке несжимаемой жидкости, построим первоначально уравнение в вариационных производных для совместного ХФ полей давлений и пульсаций скорости. Для этого установим динамическую связь между этими полями на основе анализа уравнений гидродинамики вязкой жидкости; развивая методологию работ [8, 9], перейдем затем к уравнениям для ХФ.

1. Исходная система уравнений имеет обычный вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho v_i=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\rho v_i+\frac{\partial}{\partial x_j}[\rho v_i v_j+\sigma_{ij}]=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}=p\delta_{ij}-\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+\zeta\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

Здесь η, ζ — коэффициенты вязкости, ρ, $\mathbf{v}$ и p — поля плотности, скорости и давления.

Исключая из (1.1) член, содержащий ρv_i, приходим к эквивалентной форме

$$\Delta\left[p-\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\operatorname{div}\mathbf{v}\right]-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho=-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\rho v_i v_j \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho v_i=0$$

Полагая далее $\rho=\rho_0+\rho_a$ и используя линеаризованую форму уравнения состояния $p=p_0+c^2p_a$, где c — скорость звука и p_0, ρ_0 — постоянные давление и плотность жидкости, получим с точностью до членов второго порядка малости основное динамическое уравнение задачи ($p_a\to p$)

$$\left(\Delta_{\mathbf{x}}-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p+\frac{1}{\rho_0c^2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\Delta p=-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v_iv_j \tag{1.3}$$

В частотной области уравнению (1.3) отвечает уравнение Гельмгольца

$$(\Delta_{\mathbf{x}}+k^2)p=-\rho_0 q,\quad q=F\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v_iv_j\right\}\frac{k^2}{k_0^2} \tag{1.4}$$

$$k^2=k_0^2\left[1-j\omega\frac{1}{\rho_0c^2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\right]^{-1},\quad k_0=\frac{\omega}{c} \tag{1.5}$$

Здесь $F\{\cdot\}$ — фурье-трансформанта; k — комплексное волновое число, ω — круговая частота.

Отбрасывая в (1.3) вязкие члены, приходим к чисто волновому уравнению относительно поля p

$$\left(\Delta_{\mathbf{x}}-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p=-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v_iv_j \tag{1.6}$$

Уравнению (1.6) в частотной области, очевидно, также отвечает уравнение (1.4) при $k=k_0$.

Уравнение (1.6) является основным соотношением теории Лайтхилла [2], посвященной изучению механизма генерации звука турбулентным потоком. Установившееся решение уравнений (1.3) и (1.6), как известно, имеет вид

$$p(\mathbf{x},t)=\rho_0\int_0^\infty I(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}v_i(\mathbf{y},\tau)\times \tag{1.7}$$

$$\times v_j(\mathbf{y},\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau\quad (i,j=1,2,3)$$

Здесь $I(\mathbf{x},t/\mathbf{y},\tau)$ — функция Грина для выбранной области.

Придавая в (1.7) функции $I(\mathbf{x},t/\mathbf{y},\tau)$ смысл функции Грина линейных операторов

$$\left[1+\frac{1}{\rho_0c^2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\Delta_{\mathbf{x}}-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad \Delta_{\mathbf{x}}-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

определяющих структуру левой части уравнений (1.3) или (1.6), тем самым дальнейший анализ можно строить по одной схеме. Особенно просто переход от случая (1.3) к случаю (1.6) проводится в частотной области путем формальной замены $k_0 \to k$ согласно смыслу уравнения (1.4) и формулы (1.5).

2. Введем теперь совместный ХФ случайных полей $p(\mathbf{x}, t)$ и $v(\mathbf{x}, t)$

$$\theta\{\varkappa, \eta\} = \langle \exp[i(\varkappa, p) + (\eta, \mathbf{v})] \rangle \tag{2.1}$$

Осреднение в (2.1) проводится по вероятностной мере поля $\mathbf{v}$; скалярные произведения в показателе экспоненты распространены по четырехмерной области $\mathbf{x}$, t. Будем полагать, что статистическая структура поля скорости, заданная через посредство ХФ $V\{\eta\}$, является известной; конкретная форма ХФ $V\{\eta\}$ будет указана ниже. Дальнейшая задача будет состоять в определении совместного функционала $\theta\{\varkappa, \eta\}$ и его частной формы $p\{\varkappa\} = \theta\{\varkappa, 0\}$, являющейся, очевидно, полной статистической характеристикой случайного поля пульсаций давления $p(\mathbf{x}, t)$.

Для получения основного уравнения задачи умножим обе части соотношения (1.7) на $\exp i[(\varkappa, p) + (\eta, \mathbf{v})]$ и осредним по вероятностной мере поля $\mathbf{v}$. Получим

$$\begin{aligned} &\langle p(\mathbf{x}, t) \exp i[(\varkappa, p) + (\eta, \mathbf{v})] \rangle = \\ &= \rho_0 \iint I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \langle v_i(\mathbf{y}, \tau) v_j(\mathbf{y}, \tau) \times \\ &\times \exp i[(\varkappa, p) + (\eta, \mathbf{v})] \rangle d\mathbf{y}\, d\tau \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вводя операторы вариационных производных и учитывая определение (2.1), получаем уравнения для ХФ $\theta\{\varkappa, \eta\}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\partial \varkappa(\mathbf{x}, t)} \theta\{\varkappa, \eta\} = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_V I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\delta}{\delta \eta_i(\mathbf{y}, \tau)} \frac{\delta}{\delta \eta_j(\mathbf{y}, \tau)} \theta\{\varkappa, \eta\} d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \tag{2.3}$$

Это уравнение следует решать при граничном условии

$$\theta\{0, \eta\} = V\{\eta\} \tag{2.4}$$

вытекающем из (2.1).

Будем искать решение (2.3) в виде континуального интеграла

$$\theta\{\varkappa, \eta\} = \int_{\Omega_\mu} \theta_1\{\varkappa, \mu\} \exp i(\eta, \mu)\, d\Gamma(\mu) \tag{2.5}$$

где Ω_μ — пространство функций $\mu(\mathbf{x}, t)$, $d\Gamma(\mu)$ — мера функционального объема в смысле Е. Д. Новикова (см. [10]). Из (2.3) и (2.5) для неизвестного функционала θ_1 получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\partial \varkappa(\mathbf{x}, t)} \ln \theta_1\{\varkappa, \mu\} = i\rho_0 \iint I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \times \\ &\times \mu_i(\mathbf{y}, \tau) \mu_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6), получим

$$\begin{aligned} &\theta_1\{\varkappa, \mu\} = \theta_0\{\mu\} \exp i \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{VV} \varkappa(\mathbf{x}, t) I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t- \\ &-\tau) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mu_i(\mathbf{y}, \tau) \mu_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и используя граничное условие (2.4), получаем связь неизвестного функционала $\theta_0\{\mu\}$ и заданного функционала $V\{\eta\}$

$$V\{\eta\}=\int_{\Omega_\mu}\theta_0\{\mu\}\exp i(\eta,\mu)\,d\Gamma(\mu) \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что

$$\theta_0\{\mu\}=(2\pi)^{-3}\int_{\Omega_\beta}V\{\beta\}\exp-i(\beta,\mu)\,d\Gamma(\beta) \tag{2.9}$$

Используя (2.5), (2.7) и (2.9), получаем следующую форму решения уравнения (2.3):

$$\theta(\varkappa,\eta)=\int_{\Omega_\beta}V\{\beta\}G\{\varkappa,\eta-\beta\}d\Gamma(\beta) \tag{2.10}$$

$$G\{\varkappa,\eta-\beta\}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega_\mu}\exp\left[i\left(k,\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\mu_i\mu_j\right)+(\mu[\eta-\beta])\right]d\Gamma(\mu) \tag{2.11}$$

При этом линейный функционал $K\{\varkappa\}$ имеет вид

$$K\{\varkappa\}=\rho_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_V\varkappa(\mathbf{x},t)I(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{x}\,dt\equiv K\{\varkappa,\mathbf{y},\tau\} \tag{2.12}$$

Перейдем к вычислению функционала $G\{\varkappa,\eta-\beta\}$. Для неограниченного пространства по теореме Грина получаем

$$\left(K,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}\mu_i\mu_j\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}K,\mu_i\mu_j\right)=(K_{ij},\mu_i\mu_j) \tag{2.13}$$

Выражение для функционала G представится теперь в форме

$$G\{\varkappa,\eta-\beta\}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega_\mu}\exp\{i[(K_{ij},\mu_i\mu_j)+(\mu[\eta-\beta])]\}d\Gamma(\mu) \tag{2.14}$$

Этот континуальный интеграл, как известно (см. [1, 11]), допускает прямое вычисление. В результате для функционала (2.14) получаем

$$G\{\varkappa,\eta-\beta\}=G_0\{\varkappa\}\exp-\frac{i}{4}(\Omega_{ij}[\eta_i-\beta_i],[\eta_j-\beta_j]) \tag{2.15}$$

$$G_0\{\varkappa\}=(2\pi)^{-3}\int_{\Omega_\xi}\exp i(K_{ij}\xi_i\xi_j)\,d\Gamma(\xi)= \tag{2.16}$$

$$=(2\pi)^{-3/2}\iint\ln\left\{\mathrm{Det}^{1/2}\left[\frac{i}{2}\delta_{ij}\right]\mathrm{Det}^{-1/2}[K_{ij}(\mathbf{x},t)]\right\}dx\,dt$$

Здесь матрица $K_{ij}^{-1}=\Omega_{ij}$ определена в (2.12), (2.13).

Рассмотрим теперь в связи с (2.15) общее выражение (2.10) для ХФ $\theta\{\varkappa,\eta\}$ в предположении, что функционал $V\{\eta\}$ случайных пульсаций скорости $\mathbf{v}$ имеет форму линейной суперпозиции

$$V\{\eta\}=\int_0^\infty V_0\{z,\eta\}dF(z) \tag{2.17}$$

где $F(z)$ — заданная функция, V_0 — гауссов функционал вида

$$(2.18)\qquad V_0\{z,\eta\}=\exp\left\{-\frac{z}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\iint\limits_{VV}B_{ij}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}'t')\times\right.$$
$$\left.\times\eta_i(\mathbf{x},t)\eta_j(\mathbf{x}'t')d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dtdt'\equiv\exp\left\{-\frac{z}{2}(B\eta,\eta)\right\}\right.$$

Функция $B_{ij}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}',t')=M\{v_i(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{x}'t')\}$, как обычно, тензор вторых статистических моментов поля скорости.

Поле пульсаций $\mathbf{v}$ будем считать центрированным, т. е. $\langle\mathbf{v}\rangle=0$. Тем самым дальнейший анализ охватывает случай излучения звука однородной турбулентностью.

При $dF(z)=\delta(z-1)dz$ из (2.17) следует чисто гауссов случай.

Другой разновидностью линейной суперпозиции гауссовых функционалов может служить представление

$$(2.19)\qquad V\{\eta\}=\int\limits_{\Omega_B}V_0\{1,B,\eta\}dE\{B\}$$

где $E\{B\}$ — функционал (мера) на множество Ω_B функций вторых моментов задачи; для чисто гауссова процесса $dE\{B\}=D\{B-B_0\}d\Gamma(B)$, где B_0 — заданный тензор вторых моментов; $D\{\cdot\}$ — дельта-мера на Ω_B.

Из (2.17) и (2.10) следует представление для (2.18) и (2.19) соответственно

$$(2.20)\qquad \theta\{\varkappa,\eta\}=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^\infty\theta_0\{z,\varkappa,\eta\}dF(z)\\[2ex] \displaystyle\int\limits_{\Omega_B}\theta_0\{1,\varkappa,\eta,B\}dE\{B\}\end{cases}$$

Функционал θ_0 в обоих случаях определится континуальным интегралом

$$(2.21)\qquad \theta_0\{\varkappa,\eta\}=G_0\{\varkappa\}\int\limits_{\Omega}\exp\left\{-\frac{1}{2}(B\beta,\beta)-\right.$$
$$\left.-\frac{i}{4}(\Omega_{ij}[\eta_i-\beta_i][\eta_j-\beta_j])\right\}d\Gamma(\beta)$$

причем $B\to zB$ для первого из соотношений (2.20); функционал $G_0\{\varkappa\}$ в (2.21) определен формулой (2.16).

Снова проводя вычисление гауссова континуального интеграла (2.21), получаем для $\theta_0\{\varkappa,\eta\}$ окончательное выражение вида

$$(2.22)\qquad \theta_0\{\varkappa,\eta\}\equiv\theta_0\{K,\eta\}=[\operatorname{Det}D_{jj}\{\Phi\}]^{-1/2}\exp[{}^1/_4(R\Omega\eta,\eta)]$$

Здесь $D_{ij}\{\Phi\}$ — матрица определителей Фредгольма для ядер

$$(2.23)\qquad \Phi_{ij}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}',t')=2iK_{is}(\mathbf{x},t)B_{sj}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}',t')$$

Показатель экспоненты в (2.22) есть выражение

$$(2.24)\qquad (R\Omega\eta,\eta)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\iint\limits_{VV}R_{ij}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}',t')\Omega_{jj'}(\mathbf{x},t)\times$$
$$\times\eta_i(\mathbf{x},t)\eta_{j'}(\mathbf{x}',t')d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dtdt'$$

в котором R_{ij} — резольвента ядер Φ_{ij}.

Возникающая в (2.16) бесконечная константа в процессе интегрирования (2.21) исчезает из окончательного результата.

3. Из (2.22) следует выражение для ХФ поля давлений

$$p\{\varkappa\}=\theta_0\{\varkappa,0\}=[\operatorname{Det} D_{jj}\{\Phi\}]^{-1/2} \tag{3.1}$$

В представлении следов $\varkappa_m\{\Phi\}$ ядра Φ получаем более удобное для физического анализа решение

$$p\{\varkappa\}=\exp\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\varkappa^{(m)}\{\Phi\} \tag{3.2}$$

Для использования выражений (2.22)—(3.1) придадим функционалам $\varkappa^{(m)}\{\Phi\}$ форму степенных разложений по функциям $\varkappa(\mathbf{x},t)$.

Используем определение следа

$$\varkappa^{(m)}\{\Phi\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V \Phi_{ii}^{(m)}\ \{\Phi(\mathbf{x},t|\mathbf{x}t)\}d\mathbf{x}dt \tag{3.3}$$

где $\Phi_{ij}^{(m)}$ — матрица итерированных ядер.

Тогда с учетом (2.12) получаем

$$\varkappa^{(m)}\{\varkappa\}=(2i)^m\int_{-\infty}^{\infty}\int_V\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_V \varkappa(\mathbf{y}_1\tau_1)\ldots \tag{3.4}$$

$$\ldots\varkappa(\mathbf{y}_m\tau_m)\Gamma_m(\mathbf{y}_1\tau_1\ldots\mathbf{y}_m\tau_m)dy_1\ldots dy_m d\tau_1\ldots d\tau_m$$

Функционал Γ_m дается формулой

$$\Gamma_m(\mathbf{y}_1\tau_1\ldots\mathbf{y}_m\tau_m)=\rho_0{}^m\int_{-\infty}^{\infty}\int_V\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\int_V d\mathbf{x}_1dt_1\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{x}_m\,dt_m\frac{\partial^2}{\partial x_{j1}\,\partial x_{s1}}I(\mathbf{y}_1\mathbf{x}_1;\,\tau_1-t_1)\times \tag{3.5}$$

$$\times B_{s1,j2}(\mathbf{x}_1t_1|x_2t)\ldots\frac{\partial^2}{\partial x_{jm}\partial x_{sm}}I(\mathbf{y}_m,\mathbf{x}_m;\,\tau_m-t_m)B_{smj1}(\mathbf{x}_mt_m|\mathbf{x}_1t_1)$$

Как видно из (3.5), пространственно-временная структура функции Γ_m $(m=1,\ 2,\ 3\ldots)$ может рассматриваться как некоторое мультипольное представление решения, в котором матрица вторых моментов поля скорости B_{ij} играет роль источника.

Общие выражения (2.22) и (3.1) для функционалов θ и p создают базу для определения статистических моментов поля давлений в потоке сжимаемой жидкости. Как известно, имеем общее определение (см., например, [1])

$$\langle\{p(\mathbf{x}_1t_1)\ldots p(\mathbf{x}_Nt_N)\}\rangle=(-i)^N\times \tag{3.6}$$

$$\times\frac{\delta^N}{\delta\varkappa(\mathbf{x}_1t_1)\ldots\delta\varkappa(\mathbf{x}_Nt_N)}p\{\varkappa\}\Big|_{\varkappa_1=0}$$

Проводя в связи с (3.3)—(3.6) вариационное дифференцирование, получаем, в частности, формулы для первых двух моментов

$$(3.7)\qquad \langle p(\mathbf{x}, t)\rangle = \Gamma_1(\mathbf{x}, t)$$

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} B_p(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) &= \langle p(x_1 t_1) p(x_2 t_2)\rangle = \\ &= \Gamma_1(\mathbf{x}_1 t_1)\Gamma_1(\mathbf{x}_2 t_2) + 2\Gamma_2(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) = \\ &= \langle p(\mathbf{x}_1 t_1)\rangle\langle p(\mathbf{x}_2 t_2)\rangle + 2\Gamma_2(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) \end{aligned}$$

При этом для $\Gamma_{1,2}$ из (3.5) имеем

$$(3.9)\qquad \Gamma_1(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int_V \frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j} I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) B_{ij}(\mathbf{y}\tau|\mathbf{y}\tau)\,dy\,d\tau$$

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} \Gamma_2(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) = \rho_0^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_V \frac{\partial^2}{\partial y_{j1}\partial y_{s1}} I(\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1, t_1-\tau_1) B_{s1j2}(\mathbf{y}_1\tau_1|\mathbf{z}\tau_2)\times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial z_{j2}\partial z_{s2}} I(\mathbf{x}_2\mathbf{z}_1 t_2-\tau_2) B_{s2j1}(\mathbf{z}\tau_2|\mathbf{y}_1\tau_1)\,dy\,dz\,d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Как видно из (3.8), функция $2\Gamma_2$ — просто функция корреляции пульсаций давления, так как

$$\begin{aligned} &\langle p(\mathbf{x}_1 t_1) p(\mathbf{x}_2 t_2)\rangle - \langle p(x_1 t_1)\rangle\langle p(x_2 t_2)\rangle = \\ &= B_p(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) = \langle [p(\mathbf{x}_1 t_1) - \langle p(\mathbf{x}_1 t_1)\rangle]\times \\ &\times [p(\mathbf{x}_2 t_2) - \langle p(\mathbf{x}_2 t_2)\rangle]\rangle = 2\Gamma_2(\mathbf{x}_1 t_1|\mathbf{x}_2 t_2) \end{aligned}$$

Выражения (3.7)—(3.10) указывают на то, что корреляционная структура поля излучения определяется свойствами квадрупольных источников, мощность которых определяется тензором B_{ij} вторых моментов поля пульсационной скорости в потоке. Нетрудно теперь указать общую формулу для многомерной характеристической функции пульсаций поля давления.

Используя частное представление функционального аргумента в виде $\varkappa(\mathbf{x}, t) = \sum_{\sigma=1}^{N} a_\sigma \delta(\mathbf{x}-x_\sigma)\delta(t-\tau_\sigma)$, из общего выражения (3.2) для ХФ поля давления получаем

$$(3.11)\qquad p\{a_1\ldots a_N\} = \exp\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\varkappa^{(m)}(a_1\ldots a_N)$$

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} \varkappa^{(m)}(a_1\ldots a_N) = \sum_{\sigma_1=1}^{N}\ldots\sum_{\sigma_m=1}^{N} a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}\ldots a_{\sigma_m}\Gamma_m\times \\ \times\{\mathbf{y}_{\sigma_1}\tau_{\sigma_1}\ldots\mathbf{y}_{\sigma_m}\tau_{\sigma_m}\} \end{aligned}$$

Конструкция выражений для θ_0 и p указывает на то, что закономерности распространения пульсаций давления проявляются на вероятностном уровне исключительно через посредство мультиполей, порождаемых функцией Грина оператора динамического уравнения.

Можно показать, что схема Лайтхилла или ее видоизменение согласно (1.3) описывает механизм чисто акустической передачи потенциальной части поля тензора напряжений в сжимаемой жидкости; механизм передачи вихревой части тензора напряжений имеет совершенно иной характер, и в частности при малых числах Маха (см. [12]) распространение вихревой компоненты управляется уравнением теплопроводности.

Полезно далее указать, что разложение (3.2) по различным порядкам следов ядер представляет собой ряд по числу Маха. Размерным анализом функций (см. (3.5)) нетрудно убедиться, что $\Gamma_m \sim M_0^{2m}$, где $M_0 = v_0/c$ – число Маха и v_0 – средняя скорость потока.

Удерживая первые два члена, приходим к гауссовой форме для ХФ поля давлений в сжимаемой жидкости; при $M_0 \to 1$ отклонение от нормального распределения возрастает. Таким образом, число Маха играет роль денормализующего фактора. Однако даже при $M_0 < 1$ приближенно нормальный ХФ p поля давлений, как показывает анализ, в общем случае неоднородной турбулентности отличается от гауссовой формы (2.18) для ХФ поля пульсационной скорости; в формуле (3.2) в этом случае появляются вклады, связанные с первым моментом поля давления, который согласно (3.7) равен $\Gamma_1(\mathbf{y}_1\tau)$. Между тем поле пульсаций скорости по предположению (см. (2.18)) является центрированным. Таким образом, в этом случае возникает постоянная составляющая (среднее поле), исчезающая в случае однородной турбулентности.

Подчеркнем, что предложенная схема анализа полностью сохраняется во всех случаях, когда нелинейность динамической задачи имеет квадратичную природу. В частности, используя для функции Грина в случае безграничной турбулентности выражение

$$I(\mathbf{x}t|\mathbf{y}\tau) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}\delta(t-\tau) \tag{3.13}$$

через (3.1), (3.2) получаем вероятностное описание поля пульсаций давлений в несжимаемой жидкости. Аналогично решается задача определения ХФ поля давлений, излучаемого упругой границей в условиях гидродинамического ее возбуждения (в этом случае функция Грина есть решение задачи о скалярной дифракции точечного акустического источника).

Могут быть указаны и иные примеры физических приложений данного метода, в нелинейной механике и оптике, статистической радиофизике, теории автоматического регулирования и т. п.

4. Проведем теперь более детальный анализ пространственно-временной структуры функции корреляции поля давлений, общий вид которой определен соотношениями (3.7)–(3.10). Ограничимся случаем однородности и стационарности поля пульсаций скорости, что отвечает условиям установившейся турбулентности. При этом

$$B_{ij}(x_1t_1|x_2t_2) = B_{ij}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|t_2-t_1) \tag{4.1}$$

Тогда из выражений (3.7) и (3.9) с учетом теоремы Грина вытекает

$$\langle p(x_1,t_1)\rangle = \rho_0 B_{ij}(0|0)\times \tag{4.2}$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{V}\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}I(\mathbf{x}|y,t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau = 0$$

т. е. поле звукового давления в этом случае является центрированным.

Перейдем теперь к изучению пространственно-временной структуры корреляционной функции $B_p(\mathbf{x}_1t_1|\mathbf{x}_2t_2)$ на основе дальнейшего анализа выражений (3.8) и (3.10).

Преобразуя выражение (3.10) с учетом теоремы Грина, получим следующее представление для функции корреляции пульсаций давления:

$$B_p(\mathbf{x}_1t_1|\mathbf{x}_2t_2) = 2\rho_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{V} I(\mathbf{x}_1;\mathbf{y};t_1-\tau_1)\times \tag{4.3}$$
$$\times I(\mathbf{x}_2;\mathbf{z};t_2-\tau_2)\frac{\partial^4}{\partial y_i\partial y_s\partial z_\sigma\partial z_j}\times$$
$$\times B_{sj}(\mathbf{y},\tau_1|\mathbf{z},\tau_2)B_{\sigma i}(\mathbf{z},\tau_2|\mathbf{y},\tau_1)\,dy\,dz\,d\tau_1\,d\tau_i$$

Поскольку во втором порядке малости (см. [1]) в динамических уравнениях (1.3) и (1.6) пульсации скорости v_i можно полагать несжимаемыми, удобно воспользоваться соотношением

$$(4.4)\qquad \Delta_y\Delta_z B_{p\infty}(\mathbf{y}\tau_1|\mathbf{z}\tau_2)=2\rho_0^2\frac{\partial^4}{\partial y_i\partial y_s\partial z_\sigma\partial z_j}\times$$
$$\times B_{sj}(\mathbf{y}\tau_1|\mathbf{z}\tau_2)B_{\sigma i}(\mathbf{y}\tau_1|\mathbf{z}\tau_2)$$

В (4.4) величина $B_{p\infty}$ — функция корреляции поля пульсаций давления в потоке несжимаемой жидкости, а правая часть представляет собой производные от осредненного четвертого момента пульсаций скорости в случае использования, как и выше, представления о нормальности этого поля.

Объединяя (4.3) и (4.4) и снова используя теорему Грина, получим

$$(4.5)\qquad B_p(\mathbf{x}_1t_1\,|\,\mathbf{x}_2t_2)=\int\limits_V\int\limits_V\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \Delta_{\mathbf{y}}I(\mathbf{x}_1;\,\mathbf{y};\,t_1-\tau_1)\,\Delta_z I(\mathbf{x}_2;\,\mathbf{z};\,t_2-\tau_2)\times$$
$$\times B_{p\infty}(\mathbf{y}\tau_1\,|\,\mathbf{z}\tau_2)\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z}\,d\tau_1\,d\tau_2$$

Для случая стационарной турбулентности с учетом (4.1) и (4.4) имеем

$$(4.6)\qquad B_{p\infty}(\mathbf{y}\tau_1|\mathbf{z},\,\tau_2)=B_{p\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{z};\;\tau_2-\tau_1)$$

Удобнее для дальнейшего перейти к спектральным компонентам.

С учетом (4.6) выражение (4.5) в частотной области имеет вид

$$(4.7)\qquad Q_p(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2,\,\omega)=\int\limits_{V}\int\limits_{V}\Delta_y G^*(\mathbf{x}_1|\mathbf{y},\,\omega)\,\Delta_z G(\mathbf{x}_2|\mathbf{z},\,\omega)\,Q_{p\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{z},\,\omega)\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z}$$

Здесь Q_p, $Q_{p\infty}$ и G — комплексные частотные спектры фурье-функций B_p, $B_{p\infty}$ и I, определяемые соотношениями:

$$(4.8)\qquad B_p,B_{p\infty},I(\mathbf{x}|\mathbf{y},\,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q_p,Q_{p\infty},G(\mathbf{x}|\mathbf{y};\,\omega)\exp-j\omega\tau\,d\omega$$

$$(4.9)\qquad Q_p,Q_{p\infty},G(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y},\,-\omega)=Q_p^*,\,Q_{p\infty}^*,\,G^*(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y},\,\omega)$$

В связи с (1.3) — (1.6) спектр G функции Грина I удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(4.10)\qquad (\Delta_x+k^2)\,G(\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\omega)=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Обычный прием, используемый как в акустических задачах, так и при определении излучения звука турбулентностью (см., например, [1]), состоит в том, что при интегрировании по объему, занимаемому турбулентностью (или вообще акустическим источником), этот объем считают конечным и точки наблюдения $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ помещают в дальнее поле (зону Фраунгофера); при этом появляется малый параметр (отношение размеров области источника к расстоянию до точки наблюдения) и тем самым существенно упрощается методология построения решения, хотя поле излучения уже теряет свойства статистической однородности.

Очевидно, что вероятностная структура поля в этих условиях определяется не только собственно статистикой порождающих источников, но и в существенной мере зависит от геометрии задачи. Поэтому в дальнейшем будем полагать объем V, занятый турбулентностью, безграничным и содержащим точки наблюдения $\mathbf{x}_1$: $\mathbf{x}_2$. Однако при этом интеграл (4.7) с функцией Грина, определенной из (4.10) для бесконечного пространства, будет существовать только при учете диссипации в исследуемой системе, т. е. в условиях использования динамического уравнения (1.3). Соответственно волновое число k в (4.10) будем считать далее комплексным и заданным посредством соотношения (1.5).

В этих предположениях о модели будет проведен последующий анализ.

Исключая теперь из (4.7) величину ΔG при помощи (4.10), получаем

$$Q_p(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2,\omega)=\Big\{|k^2|^2\iint\limits_{VV}G^*(\mathbf{x}_1|\mathbf{y},\omega)\times$$

$$\times G(\mathbf{x}_2|\mathbf{z},\omega)Q_{p\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{z},\omega)d\mathbf{y}\,d\mathbf{z}+$$

$$+(k^2)^*\int\limits_V G^*(\mathbf{x}_1|\mathbf{y},\omega)Q_{p\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_2,\omega)d\mathbf{y}+$$

$$+k^2\int\limits_V G(\mathbf{x}_2|\mathbf{y},\omega)Q_{p\infty}(\mathbf{x}_1|\mathbf{y},\omega)d\mathbf{y}+Q_{p\infty}(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2,\omega)\Big\},\ldots \tag{4.11}$$

Будем считать турбулентность изотропной и используем соотношения

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y},\omega)=G(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\omega)=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}\exp ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

$$Q_{p\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{z},\omega)=Q_{p\infty}(|\mathbf{y}-\mathbf{z}|,\omega) \tag{4.12}$$

При этом можно выполнить в (4.11) интегрирование по угловым координатам. В результате получим

$$Q_p(\rho,\omega)=\Big\{Q_{p\infty}(\rho,\omega)+A(k)\frac{\sin k\rho}{k\rho}\varepsilon(k^*)+ \tag{4.13}$$

$$+8\pi\operatorname{Re}\left[\frac{k}{\rho}\exp ik\rho\varepsilon(k)\right]\Big\},\qquad \rho=|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|$$

$$A(k)=8\pi^2\frac{k|k|^2}{\operatorname{Im}k},\qquad k=\frac{k_0}{\sqrt{1-j\mu}},\qquad \mu=\frac{\omega}{\rho_0c^2}\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right) \tag{4.14}$$

$$k_0=\frac{\omega}{c},\qquad \varepsilon(k)=\int\limits_0^\infty Q_{p\infty}(\sigma,\omega)\sin k\sigma\sigma d\sigma$$

Здесь символ $\operatorname{Im}k$ обозначает мнимую часть комплексного волнового числа k.

Поскольку для водных и воздушных сред в звуковом диапазоне частот параметр μ малый, то из (4.13)–(4.14) следует более простая форма

$$Q_p(\rho,\omega)=Q_{p\infty}(\rho,\omega)+A_0(\omega)\frac{\sin k_0\rho}{k_0\rho}\varepsilon(k_0) \tag{4.15}$$

$$A_0(\omega)=(4\pi)^2\rho_0\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)^{-1}\omega=a_0\omega;\qquad k_0=\frac{\omega}{c}$$

Второе слагаемое в (4.15), очевидно, представляет собой вклад, связанный с эффектами сжимаемости, который обращается в нуль при $k_0\to0$ $(c\to\infty)$. Для спектра интенсивности $J_p(\omega)=Q_p(0,\omega)$ получаем $J_p(\omega)=J_{p\infty}(\omega)+A_0(\omega)\varepsilon(k_0)$.

Входящий в формулы (4.11)–(4.15) спектр $Q_{p\infty}(\sigma,\omega)$ может быть получен на основе известного выражения для корреляционной функции поля пульсаций давления несжимаемой жидкости [1, 13].

Используем формулу

$$B_{p\infty}(\sigma,\tau)=2\rho_0^2\int\limits_\sigma^\infty\left(x-\frac{\sigma^2}{x}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}B_{LL}(x,\tau)\right]^2dx \tag{4.16}$$

где B_{LL} — функция корреляции продольных компонент поля скорости; получим

$$(4.17)\qquad Q_{p\infty}(\sigma, \omega) = 2\rho_0{}^2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} \left(x - \frac{\sigma^2}{x} \right) V_{LL}(x, \omega)\, dx$$

$$V_{LL}(x, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} Q_{LL}(x, \nu)\, \frac{\partial}{\partial x} Q_{LL}(x, \omega - \nu)\, d\nu$$

В (4.17) функция Q_{LL} представляет собой частотный спектр функции корреляции B_{LL}.

Объединяя теперь выражения (4.14), (4.15) и (4.17), для спектра получим

$$(4.18)\qquad Q_p(\rho, \omega) = 2\rho_0{}^2 \int\limits_{0}^{\infty} D(\rho, x, \omega)\, V_{LL}(x, \omega)\, dx$$

$$(4.19)\qquad D(\rho, x, \omega) = \theta(x|\rho) \left(x - \frac{\rho^2}{x} \right) + 2a_0 c x^2 j_0(k_0\rho)\, j_2(k_0 x)$$

Здесь $j_m(z)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, j_0(z) = \sin z/z$ — сферические функции Бесселя;

$$\theta(x|\rho) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \rho \\ 1, & \rho \leqslant x < \infty \end{cases}$$

Частотный спектр интенсивности $J_p(\omega) = Q_p(0, \omega)$ определится из (4.18), причем согласно (4.19)

$$(4.20)\qquad D(0, x, \omega) = x + 2a_0 c x^2 j_2(k_0 x), \quad j_0(0) = 1, \quad \theta(x|0) = 1$$

5. Пространственно-временное представление для корреляционной функции поля давлений $B_p(\rho, \tau)$ получится из (4.18) посредством преобразования Фурье в частотной области с использованием (4.15)—(4.18).

После вычислений получим

$$(5.1)\qquad B_p(\rho, \tau) = B_{p\infty}(\rho, \tau) + \frac{1}{4\rho} \int\limits_{\tau - \rho/c}^{\tau + \rho/c} B_{p,c}(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$(5.2)\qquad B_{p,c}(\varepsilon) = a_0 c^2 \rho_0{}^2 \int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_{-x}^{x} dy \left(x - \frac{3y^2}{x} \right) W_{LL}\left(x \,|\, \varepsilon - \frac{y}{c} \right)$$

Функция $B_{p\infty}$ в (5.1) определена выражением (4.16); функция W_{LL} дается формулой

$$(5.3)\qquad W_{LL}(x|\mu) = \left[\frac{\partial}{\partial x} B_{LL}(x|\mu) \right]^2$$

Из (5.1) вытекают частные формы для функций пространственной корреляции $\Phi_p(\rho) = B_p(\rho, 0)$, автокорреляции $\psi_p(\tau) = B_p(0, \tau)$ и интенсивности поля $J_p = B_p(0|0)$

$$(5.4)\qquad \Phi_p(\rho) = \Phi_{p\infty}(\rho) + \frac{1}{4\rho} \int\limits_{-\rho/c}^{\rho/c} B_{\rho,c}(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$\psi_p(\tau)=\psi_{p\infty}(\tau)+\frac{1}{2c}B_{p,c}(\tau),\quad J_p=J_{p\infty}+\frac{1}{2c}J_{p,c}$$

$$J_{p,c}=B_{p,c}(0)=a_0c^2\rho_0^2\int\limits_0^\infty dx\int\limits_{-x}^{x}\left(x-\frac{3y^2}{x}\right)W_{LL}\left(x\;\Big|\;\frac{y}{c}\right)dy \tag{5.5}$$

Здесь функция $B_{p,c}$ определена в (5.2).

Дополнительные вклады в (5.1) и (5.4), содержащие функцию $B_{\rho,c}(\varepsilon)$, порождаются, очевидно, эффектами сжимаемости и, как легко убедиться, эти вклады исчезают при $c\to\infty$.

Используя теперь (5.1) и (5.4), получаем полезные формулы

$$\begin{gathered}B_p(\rho,\tau)=B_{p\infty}(\rho,\tau)+\frac{c}{2\rho}\int\limits_{\tau-\rho/c}^{\tau+\rho/c}[\psi_p(\varepsilon)-\psi_{p\infty}(\varepsilon)]\,d\varepsilon\\ \Phi_p(\rho)=\Phi_{p\infty}(\rho)+\frac{c}{2\rho}\int\limits_{-\rho/c}^{\rho/c}[\psi_p(\varepsilon)-\psi_{p\infty}(\varepsilon)]\,d\varepsilon\end{gathered} \tag{5.6}$$

Они связывают пространственно-временные и пространственные функции корреляции $B_p(\rho,\tau)$, $\Phi_p(\rho)$ с функциями автокорреляции $\psi_p(\varepsilon)$, $\psi_{p,\infty}(\varepsilon)$.

Нетрудно теперь убедиться, что при выполнении очевидного равенства $B_{LL}(\rho,\tau)=B_{LL}(\rho,-\tau)$ из (5.1)–(5.4) следуют соотношения

$$\begin{gathered}B_p(\rho,\tau)=B_p(\rho_1-\tau),\quad \psi_p(\tau)=\psi_p(-\tau)\\ B_{p\infty}(\rho,\tau)=B_{p\infty}(\rho_1-\tau),\quad \psi_{p\infty}(\tau)=\psi_{p\infty}(-\tau)\end{gathered} \tag{5.7}$$

С учетом этих связей из (5.4) вытекает равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_p(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{p\infty}(\tau)\,d\tau \tag{5.8}$$

поскольку в соответствии с (5.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{p,c}(\tau)\,d\tau=0$$

Используя (5.4) и (5.8), для временного масштаба корреляции T_p, поля давления получаем

$$T_p=\frac{1}{J_p}\int\limits_0^\infty\psi_p(\tau)\,d\tau=T_{p\infty}\left[1+\frac{1}{2c}\frac{J_{p,c}}{J_{p\infty}}\right]^{-1} \tag{5.9}$$

$$T_{p\infty}=\frac{1}{J_{p\infty}}\int\limits_0^\infty\psi_{p\infty}(\tau)\,d\tau$$

Из формулы (5.9) видно, что наличие конечной сжимаемости ($c<\infty$) приводит к уменьшению времени автокорреляции поля давлений, т. е. к расширению частотного спектра по отношению к случаю турбулентности в несжимаемой жидкости.

Используя теперь первое из соотношений (5.4), приходим к аналогичным результатам в пространственной области

$$\int_0^\infty \Phi_p(\rho)\,d\rho = \int_0^\infty \Phi_{p\infty}(\rho)\,d\rho \tag{5.10}$$

При этом, как нетрудно видеть, оказывается выполненным равенство

$$\frac{c}{2}\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho}\int_{-\rho/c}^{\rho/c} [\psi_p(\varepsilon)-\psi_{p\infty}(\varepsilon)]\,d\varepsilon=0 \tag{5.11}$$

Здесь интеграл (5.11) понимается в смысле главного значения, учитываются также соотношения (5.7) и (5.8).

Для интегрального масштаба L_p пространственной корреляции получаем

$$L_p=\frac{1}{J_p}\int_0^\infty \Phi_p(\rho)\,d\rho=L_{p\infty}\left[1+\frac{1}{2c}\frac{I_{p,c}}{J_{p\infty}}\right]^{-1},\quad L_{p\infty}=\frac{1}{J_{p\infty}}\int_0^\infty \Phi_{p\infty}(\rho)\,d\rho \tag{5.12}$$

Полученный в (5.12) результат позволяет подобно (5.9) сделать вывод о том, что учет конечной сжимаемости приводит к уменьшению пространственного масштаба корреляции поля давления, т. е. к расширению спектра пространственных масштабов относительно случая турбулентности в несжимаемой жидкости.

Разумеется, оба этих эффекта физически являются результатом дополнительных движений сжимаемой жидкости, связанных с акустическим механизмом распространения поля давлений, порождаемых турбулентной структурой поля скорости.

Интересно отметить, что из (5.9) и (5.12) вытекает простое соотношение

$$L_p/T_p=L_{p\infty}/T_{p\infty} \tag{5.13}$$

т. е. параметр L_p/T_p оказывается нечувствительным к влиянию сжимаемости.

6. Очевидно, что вклад сжимаемости в структуру второго момента поля давлений (и в величину расширения пространственно-временного спектра) определится численным значением параметра

$$\alpha=J_{p,c}/2cJ_{p\infty} \tag{6.1}$$

Для оценки этого параметра учтем, что в выражении (5.5) зависимость убывающей функции $W_{LL}\left(x\,\middle|\,\frac{y}{c}\right)$ от параметра y/c может быть достаточно точно аппроксимирована рядом Тейлора

$$W_{LL}\left(x\,\middle|\,\frac{y}{c}\right)\cong W_{LL}(x|0)-{}'\,W_{LL\mu\mu}(x|0)\,\Big|\,\frac{y^2}{c^2} \tag{6.2}$$

$$|W_{LL\mu\mu}(x|0)|=\left|\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}W_{LL}(x|\mu)\right|_{\mu=0}$$

Аппроксимация (6.2) вытекает из неравенств

$$y/c<|x|/c<\lambda v/c=\lambda vu/uc=\tau_v M_0$$

где $\tau_v=\lambda v/u$ — время автокорреляции пульсаций скорости в потоке с характерным масштабом λ_v и средней скоростью u и $M_0=u/c$ — число Маха; для чисел Маха, меньших единицы, $y/c<\tau_v$, и потому степенное разложение (6.2) становится оправданным.

В связи с формулой (5.3) параметры разложения (6.2) принимают форму

$$W_{LL}(x|0)=\left[\frac{\partial}{\partial x}B_{LL}(x|0)\right]^2 \tag{6.3}$$

$$W_{LL\mu\mu}(x|0)=\left|\frac{\partial}{\partial x}B_{LL}(x|0)\right|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}B_{LL}(x|\mu)\Big|_{\mu=0}$$

Используя теперь выражения (6.2), (4.16) и (5.5), для параметра α получаем

$$\alpha=\frac{2}{15}\frac{a_0}{c}\int\limits_0^\infty x^4W_{LL\mu\mu}(x|0)\,dx\left[\int\limits_0^\infty xW_{LL}(x|0)\,dx\right]^{-1} \tag{6.4}$$

Здесь согласно (4.15) $a_0=(4\pi)^2\rho_0/(^4/_3\eta+\zeta)$. Введем в (6.3) безразмерные координаты $x=\lambda_v\xi$ и $\mu=\tau_v\chi$ и обозначим $B_{LL}(x|\mu)=B_{LL}(\lambda_v\xi|\tau_v\chi)=$ $=B_{LL}(\xi|\chi)$. В этих обозначениях приведем (6.4) к форме

$$\alpha=\frac{8}{5}\pi^2M_0\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \xi^4w_{LL\chi\chi}(\xi/0)\,d\xi\times \tag{6.5}$$

$$\times\left[\int\limits_0^\infty \xi w_{LL}(\xi|0)\,d\xi\right]^{-1}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\zeta}{\eta}\right)^{-1}.$$

Здесь $\mathrm{Re}\,u\lambda_v/\nu_k$; $\nu_k=\eta/\rho_0$ — число Рейнольдса и кинематическая вязкость жидкости; $w_{LL\chi\chi}$ и w_{LL} — безразмерная форма соотношений (6.3).

Таким образом, параметр α определяется характеристиками потока: $\alpha=b_0M_0\,\mathrm{Re}$, где b_0 — некоторая константа.

Эффекты сжимаемости становятся значимыми при $\alpha\gtrsim1$, т. е. при средней скорости потока u, удовлетворяющей условию

$$u\gtrsim\sqrt{\nu_kc/\lambda_vb_0} \tag{6.6}$$

Таким образом, относительный вклад в общую интенсивность (см. (5.4)) компонент, порождаемых эффектами сжимаемости, растет с ростом M_0 и Re. Поскольку, как известно, интенсивность $J_{p\infty}$ в несжимаемой жидкости пропорциональна четвертой степени числа Маха, слагаемое $J_{p,c}=\alpha J_{p\infty}$ будет зависеть от пятой степени числа Маха, что находится в согласии с ранее известными результатами (см. [1]).

Автор признателен С. А. Христиановичу за внимание к работе и стимулирующее обсуждение результатов.

Поступила 7 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 1 и 2. М., «Наука», 1965–1967.
2. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. Ceneral theory. Proc. Rov Soc., 1952, A211, No. 1107, p. 564–587.
3. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука» 1967.
4. *Барабаненков Ю. И., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И.* Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде. Усп. физ. н., 1970, т. 102, № 1.
5. *Скороход А. В.* Конструктивные методы задания случайных процессов. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 3.
6. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., «Мир», 1963.

7. *Клячкин В. И.* О характеристических функционалах некоторых гидроакустических полей. Тр. 2-й Всес. школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, «Наука», 1971.
8. *Клячкин В. И.* К теории нелинейных преобразований случайных процессов. Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 1.
9. *Клячкин В. И., Иоффе М. И.* Определение характеристического функционала на выходе системы перемножитель – фильтр. Изв. вузов, Радиофизика, 1975, т. 18, № 5.
10. *Новиков Е. Д.* Решение некоторых уравнений с вариационными производными. Усп. матем. н., 1961, т. 16, № 2.
11. *Фейнман Р. П.* Операторное исчисление, имеющее приложение в квантовой электродинамике. В сб.: «Проблемы современной физики», вып. 3. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
12. *Клячкин В. И.* Поля напряжений в сжимаемой жидкости и задача возбуждения упругих оболочек. Акуст. ж., 1977, т. 23, вып. 5.
13. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.