

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА,
НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ
ПО ВРЕМЕНИ

А. П. ВИННИЧЕНКО

(Москва)

Работа посвящена исследованию уравнения $u_t + u_x + uu_x = u_{xx} + \alpha u_{xx}$, которое является модельным для задачи нестационарной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей. Для этого уравнения ставится смешанная задача на всей оси — задаются начальное условие $u(0, x)$ и граничные условия на бесконечности. Анализируется решение специального вида $u_0(x - ct)$, скорость распространения которого c определяется из граничных условий. В некотором частном случае доказывается устойчивость этого решения в линейном приближении.

1. Постановка задачи. Решение типа «бегущей волны». При изучении длинных волн на поверхности жидкости в качестве альтернативы к уравнению Кортевега — де Вриза выдвигалось уравнение $u_t + u_x + uu_x = u_{xx}$ [1]. Для него ставилась задача Коши на бесконечной оси с начальной функцией, убывающей на бесконечности. Позже было предложено ввести дополнительно в правую часть «вязкий» член αu_{xx} [2]. Таким образом, это уравнение становится альтернативным к уравнению Кортевега — де Вриза — Бюргера. В [3] рассматривалась новая модель процесса нестационарной неравновесной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей. В безразмерных переменных уравнения, описывающие в рамках этой модели процесс фильтрации, имели вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \operatorname{div} V_1 &= 0, & V_1 &= -f_1(\sigma + \varepsilon_1\partial_t\sigma) \operatorname{grad} p_1 \\ -m\partial_t\sigma + \operatorname{div} V_2 &= 0, & V_2 &= -\mu f_2(\sigma + \varepsilon_1\partial_t\sigma) \operatorname{grad} p_2 \\ p_2 - p_1 &= \varepsilon_2 J(\sigma + \varepsilon_3\partial_t\sigma) \end{aligned}$$

где m — пористость среды; σ — насыщенность среды вытесняющей жидкостью; V_1 и V_2 — безразмерные скорости фильтрации вытесняющей и вытесняемой жидкостей; p_1 и p_2 — безразмерные давления соответственно; f_1 и f_2 — относительные фазовые проницаемости; J — функция Леверетта; $\mu = \mu_1/\mu_2$, где μ_1 и μ_2 — коэффициенты вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей ($\mu_1 < \mu_2$); ε_1 , ε_2 и ε_3 — малые параметры. В [3] пренебрегалось выражением $\varepsilon_2\varepsilon_3\partial_t\sigma J'(\sigma)$, так как оно второго порядка малости. Если же этого пренебрежения не делать, то получим, что первый член внутреннего разложения является решением следующей задачи:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \partial_x \{ VF + \varepsilon_1 V\partial_t F + \mu\varepsilon_2 [f_2 F\partial_x J + \\ + \varepsilon_1\partial_t(f_2 F)\partial_x J + \varepsilon_3 f_2 F\partial_{xt}^2 J] \} &= 0, & F &= f_1/(f_1 + \mu f_2) \\ \sigma(t, -\infty) &= \sigma_-, & \sigma(t, +\infty) &= \sigma_+ \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \sigma(0, x) = \varphi(x), \quad \varphi(-\infty) = \sigma_-, \quad \varphi(+\infty) = \sigma_+$$

где f_2 , F и J — функции от σ ; σ_- , σ_+ и V — некоторые параметры, которые находятся из внешнего разложения ($\sigma_- > \sigma_+$, $V > 0$).

Если искать решение задачи (1.2) в виде бегущей волны $\sigma_0(x-ct)$, то получим для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка граничную задачу на бесконечной оси

$$(1.4) \quad -mc\sigma_0 + VF - \varepsilon_1 c VF' \sigma_0' + \mu \varepsilon_2 \{f_2 F J' \sigma_0' - \\ - c[\varepsilon_1 (f_2' F + f_2 F') J' + \varepsilon_3 f_2 F J''] (\sigma_0')^2 - \varepsilon_3 c f_2 F J' \sigma_0''\} = k$$

$$(1.5) \quad \sigma_0(-\infty) = \sigma_-, \quad \sigma_0(+\infty) = \sigma_+ \\ c = \frac{V}{m} \frac{F(\sigma_-) - F(\sigma_+)}{\sigma_- - \sigma_+}, \quad k = V \frac{\sigma_- F(\sigma_+) - \sigma_+ F(\sigma_-)}{\sigma_- - \sigma_+}$$

Понижая порядок уравнения (1.4) и анализируя особые точки на фазовой плоскости (σ_0, σ_0') можно показать, что точка $(\sigma_+, 0)$ всегда является особой точкой типа седла, а точка $(\sigma_-, 0)$ в зависимости от параметров может быть либо узлом, либо фокусом. Таким образом, решение задачи (1.4), (1.5) может быть как монотонным, так и немонотонным. Численный эксперимент показывает, что как в том, так и в другом случае решение задачи (1.2), (1.3) при $t \rightarrow \infty$ выходит на решение типа бегущей волны.

В данной работе предлагается поставить смешанную задачу для уравнения, альтернативного к уравнению Кортевега — де Вриза — Бюргерса

$$(1.6) \quad u_t + u_x + uu_x = u_{xxt} + \alpha u_{xx}, \quad \alpha > 0$$

$$(1.7) \quad u(t, -\infty) = u_-, \quad u(t, +\infty) = u_+ \\ u(0, x) = \varphi_0(x), \quad \varphi_0(-\infty) = u_-, \quad \varphi_0(+\infty) = u_+$$

где u_- , u_+ и α — некоторые параметры. Для решения задачи (1.6) специального вида $u_0(x-ct)$ получим

$$(1.8) \quad cu_0'' - \alpha u_0' + (1-c)u_0 + 0.5u_0^2 = k \\ u_0(-\infty) = u_-, \quad u_0(+\infty) = u_+, \quad c = 1 + 0.5(u_- + u_+), \quad k = -0.5u_-u_+$$

Постоянные c , k находятся из условия существования решения. Понижая порядок уравнения и исследуя особые точки на фазовой плоскости, можно показать (подробное исследование задачи, аналогичной задаче (1.8), проводится в [4]), что одна из особых точек всегда является особой точкой типа седла, а другая может быть либо узлом, либо фокусом.

Таким образом решения типа бегущей волны задач (1.2), (1.3) и (1.6), (1.7) качественно похожи. Кроме того, в уравнении (1.2) имеется член $\mu \varepsilon_2 \varepsilon_3 f_2 F J' \partial_{xxt}^3 \sigma$ ($f_2 F J' < 0$), а в уравнении (1.6) — член u_{xxt} . Численный эксперимент показывает, что как решение задачи (1.2), (1.3), так и решение задачи (1.6), (1.7) при $t \rightarrow \infty$ стремятся к решениям типа бегущей волны. Поэтому задачу (1.6), (1.7) можно рассматривать в качестве модельной для задачи (1.2), (1.3).

Представим решение задачи (1.6), (1.7) в виде $u(t, x) = u_0(x-ct) + v(t, x)$, где u_0 является решением задачи (1.8). Тогда получаем для v уравнение

$$(1.9) \quad v_t + v_x + (u_0 v)_x + v v_x = v_{xxt} + \alpha v_{xx}$$

и смешанную задачу

$$(1.10) \quad v(t, \pm\infty) = 0, \quad v(0, x) = \varphi_1(x), \quad \varphi_1(\pm\infty) = 0$$

Обращая оператор $1 - \partial_{xx}^2$, запишем уравнение (1.9) в виде

$$(1.11) \quad v_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} \{ \alpha v_{\xi\xi} - v_{\xi} - (u_0 v)_{\xi} - v v_{\xi} \} d\xi$$

Методом, предложенным в [5], легко доказать существование и единственность решения задачи (1.11), (1.10) при малых t . При этом оказывается, что свойство $v(t, \pm\infty) = 0$ автоматически следует из $\varphi_1(\pm\infty) = 0$. Можно доказать, что это решение имеет непрерывными все необходимые производные и, следовательно, является решением задачи (1.9), (1.10) в малом. Учитывая, что $u_0(x-ct)$ определено при любых t , получаем существование и единственность решения задачи (1.6), (1.7) в малом.

2. Случай $u_- = u_+$. Пусть $u_- = u_+$. Заменой переменных $u = v + u_-$, $a = 1 + u_-$ задача (1.6), (1.7) переходит в

$$(2.1) \quad v_t + av_x + vv_x = v_{xxt} + \alpha v_{xx}, \quad v(t, \pm\infty) = 0$$

$$(2.2) \quad v(0, x) = \varphi_2(x), \quad \varphi_2(\pm\infty) = 0$$

Аналогично уравнению Кортевега — де Вриза — Бюргера задача (2.1) имеет единственное решение типа бегущей волны — тождественный нуль. Покажем, что оно играет особую роль для решений задачи (2.1), (2.2), а именно, что решения задачи (2.1), (2.2) стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$.

Умножим уравнение (2.1) на v , проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$ и воспользуемся граничными условиями $v(t, \pm\infty) = 0$.

$$(2.3) \quad d_t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{v_x^2}{2} \right) dx = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dx$$

Следовательно

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2 + v_x^2) dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Если предположить, что v и v_x — малые величины, и линеаризовать уравнение (2.1)

$$(2.5) \quad v_t + av_x = v_{xxt} + \alpha v_{xx}, \quad v(t, \pm\infty) = 0$$

то удастся доказать и поточечную сходимость к нулю, так как в этом случае решение задачи (2.5), (2.2) выписывается в явном виде

$$(2.6) \quad v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \exp \left\{ ix\xi + \frac{ia\xi - \alpha\xi^2}{1 + \xi^2} t \right\} d\xi$$

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x) \exp \{-ix\xi\} dx$$

Отсюда $v(t, x)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Итак, при $u_- = u_+$ решение задачи (1.6), (1.7) при $t \rightarrow \infty$ выходит на решение типа бегущей волны задачи (1.6) — постоянную u_- .

3. Случай $u_- > u_+$. Возмущения, экспоненциально зависящие от t . Пусть скорость c решения типа бегущей волны задачи (1.6) равна нулю.

Из условий $2+u_-+u_+=0$ и $u_->u_+$ вытекает, что $u_->-1$. Заменой переменных $u=u_-+(u_-u_+)v$, $t=\tau/(1+u_-)$, $\beta=\alpha/(1+u_-)$ задача (1.6), (1.7) сводится к задаче

$$(3.1) \quad v_\tau + (v+v^2)_x = v_{xx} + \beta v_{xx}, \quad \beta > 0$$

$$v(\tau, -\infty) = 0, \quad v(\tau, +\infty) = -1$$

(3.2)

$$v(0, x) = \varphi_3(x), \quad \varphi_3(-\infty) = 0, \quad \varphi_3(+\infty) = -1$$

Представим решение этой задачи в виде $v(\tau, x) = v_0(x) + w(\tau, x)$, где $v_0(x)$ — стационарное решение задачи (3.1)

$$(3.3) \quad v_0 = \left(\exp \left\{ -\frac{(x+x_0)}{\beta} \right\} - 1 \right)^{-1}$$

Предполагаем w и w_x малыми, отбрасываем величины второго порядка малости и получаем для w задачу

$$(3.4) \quad w_\tau + (w + 2v_0 w)_x = w_{xx} + \beta w_{xx}, \quad w(\tau, \pm\infty) = 0$$

$$(3.5) \quad w(0, x) = \varphi_4(x), \quad \varphi_4(\pm\infty) = 0$$

Рассмотрим решения задачи (3.4) специального вида $w(\tau, x) = e^{\lambda x} X(x)$

$$(3.6) \quad (\lambda + \beta) X'' - (X + 2v_0 X)' - \lambda X = 0, \quad X(\pm\infty) = 0$$

Асимптотика решений этой задачи на $-\infty$ имеет вид $\exp\{\mu_- x\}$, а на $+\infty$ $\exp\{\mu_+ x\}$, где

$$(3.7) \quad \mu_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda + \beta)}}{2(\lambda + \beta)}, \quad \mu_+ = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda + \beta)}}{2(\lambda + \beta)}$$

Для существования решения задачи (3.6) необходимо, чтобы для показателей μ_- , μ_+ выполнялись условия $\operatorname{Re} \mu_- > 0$, $\operatorname{Re} \mu_+ < 0$.

Исследование показывает, что если λ лежит внутри эллипса

$$(3.8) \quad \left(\chi + \frac{\beta}{2} \right)^2 + (\beta \zeta)^2 = \frac{\beta^2}{4}$$

где $\lambda = \chi + i\zeta$ (фиг. 1), то оба корня μ_- обладают положительной действительной частью, а оба корня μ_+ — отрицательной действительной частью. И напротив, если λ лежит вне этого эллипса, то как среди корней μ_- , так и среди корней μ_+ , один корень имеет положительную, а другой — отрицательную действительную часть.

Рассмотрим решение уравнения (3.6), убывающее на $-\infty$. Такое решение всегда найдется, так как при любом λ существует корень μ_- , имеющий положительную действительную часть. Если λ лежит внутри эллипса (3.8), то это решение на $+\infty$ обязательно убывает, так как оба корня μ_+ лежат в левой полуплоскости. Следовательно, задача (3.6) заведомо разрешима, если λ лежит внутри эллипса (3.8).

Пусть $X(x)$ — решение задачи (3.6) при λ , лежащем вне этого эллипса. Исследование показывает, что при таких λ $\operatorname{Re} 0.5[1 + 4\lambda(\lambda + \beta)]^{0.5}/(\lambda + \beta) \neq 0$, поэтому мы можем заранее указать знаки в выражениях для μ_- и μ_+ , учитывая, что только один знак позволяет удовлетворить условию убывания решения на бесконечности. Следовательно, асимптотики решения $X(x)$ на $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид соответственно

$$(3.9) \quad \exp \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda + \beta)}}{2(\lambda + \beta)} x \right\}, \quad \exp \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda + \beta)}}{2(\lambda + \beta)} x \right\}$$

$$(3.10) \quad \operatorname{Re} = \frac{\sqrt{1+4\lambda(\lambda+\beta)}}{2(\lambda+\beta)} > 0$$

Сделаем замену переменных

$$(3.11) \quad X(x) = Y(x) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+2v_0(\xi)}{\lambda+\beta} d\xi \right\}$$

Задача (3.6) перейдет в

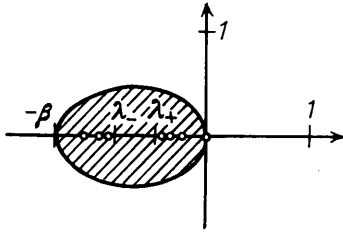
$$(3.12) \quad Y'' - JY = 0, \quad Y(\pm\infty) = 0, \quad J(\lambda, x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+2v_0}{\lambda+\beta} \right)^2 + \frac{\lambda+v_0'}{\lambda+\beta}$$

так как

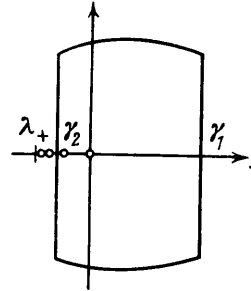
$$(3.13) \quad Y(-\infty) \simeq \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \left\{ \frac{1+\sqrt{1+4\lambda(\lambda+\beta)}}{2(\lambda+\beta)} x - \int_0^x \frac{1+2v_0}{2(\lambda+\beta)} d\xi \right\} = 0$$

благодаря условию (3.10). Аналогично $Y(+\infty) = 0$.

Докажем, что решение задачи (3.12) может существовать только при действительных λ . Умножим уравнение (3.12) на \bar{Y} , а комплексно-сопря-



Фиг. 1



Фиг. 2

женное ему уравнение — на Y , проинтегрируем сначала по x от $-\infty$ до $+\infty$, а затем по частям, воспользовавшись граничными условиями, и вычтем одно из другого

$$(3.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \{J - \bar{J}\} |Y|^2 dx = 0$$

Следовательно, либо $\operatorname{Im} \lambda = 0$, либо при данном λ существует точка x_0 такая, что

$$(3.15) \quad 2[\beta - v_0'(x_0)] - \frac{[1+2v_0(x_0)]^2 (\operatorname{Re} \lambda + \beta)}{|\lambda + \beta|^2} = 0$$

Пусть x_0 пробегает от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда множество (3.15) в комплексной плоскости λ заполняет круг радиуса $1/(4\beta)$ с центром в точке $-\beta + 1/(4\beta)$. Ограничимся рассмотрением случая $\beta \geq 1$ (в терминах первоначальной задачи (1.6), (1.7) это означает, что $\alpha \geq |1+u_-|$). Тогда круг (3.15) лежит внутри эллипса (3.8), который уже рассмотрен. Следовательно, λ вещественное.

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. При $\beta \geq 1$ $\partial_\lambda J > 0$ и при $\lambda = 0$ решение задачи (3.12) выписывается в явном виде с точностью до постоянного множителя

$$(3.16) \quad Y_0(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+2v_0}{\beta} d\xi \right\} > 0$$

Поэтому при $\lambda > 0$ задача (3.12) неразрешима. Более подробный анализ показывает, что на действительной оси существует два счетных множества λ , имеющих точками сгущения фокусы эллипса (3.8)

$$(3.17) \quad \lambda_{-,+} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{2}$$

таких, что задача (3.12) разрешима, если λ принадлежит объединению этих множеств. Эти множества (фиг. 1) целиком лежат на отрезке $[-\beta, 0]$, т. е. принадлежат эллипсу (3.8).

Таким образом, можно сделать вывод: решения задачи (3.4), экспоненциально зависящие от τ с показателем λ , существуют тогда и только тогда, когда λ принадлежит эллипсу (3.8) и, следовательно, не возрастают со временем.

Тем самым доказана устойчивость в линейном приближении стационарного решения задачи (3.1) для возмущений специального вида.

4. Возмущение общего вида. Сделаем преобразование Лапласа решения задачи (3.4), (3.5) [6]

$$(4.1) \quad (\lambda + \beta) W'' - (W + 2v_0 W)' - \lambda W = f, \quad W(\lambda, \pm\infty) = 0$$

$$f(x) = \varphi_1''(x) - \varphi_1(x), \quad W(\lambda, x) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda\tau\} w(\tau, x) d\tau,$$

$$\operatorname{Re} \lambda > \gamma$$

Как известно, общее решение неоднородной задачи представляется в виде суммы частного решения и общего решения однородной задачи

$$(4.2) \quad W = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+2v_0}{\lambda+\beta} d\xi \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y; \lambda) \frac{f(y)}{\lambda+\beta} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^y \frac{1+2v_0}{\lambda+\beta} d\xi \right\} dy + \int_D \varphi(\lambda) X_\lambda(x) d\lambda d\xi$$

где G — функция Грина для задачи (3.12)

$$G(x, y; \lambda) = \frac{Y_\lambda^{(1)}(x) Y_\lambda^{(2)}(y)}{W_0(\lambda)}, \quad x < y$$

$$G(x, y; \lambda) = \frac{Y_\lambda^{(1)}(y) Y_\lambda^{(2)}(x)}{W_0(\lambda)}, \quad x \geq y$$

Здесь $Y_\lambda^{(1)}$, $Y_\lambda^{(2)}$ — не равные тождественно нулю решения уравнения (3.12) с граничными условиями $Y_\lambda^{(1)}(-\infty) = 0$, $Y_\lambda^{(2)}(+\infty) = 0$, W_0 — определитель Вронского для $Y_\lambda^{(1)}$ и $Y_\lambda^{(2)}$, D — эллипс (3.8), φ — некоторая функ-

ция от $\lambda = \chi + i\zeta$, $X_\lambda(x)$ — решение задачи (3.6), нормированное условием $\max_{-\infty < x < +\infty} |X_\lambda(x)| = 1$.

Рассмотрим область $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_+$. Здесь коэффициенты уравнения (3.12) аналитичны по λ . Кроме того, $W_0 = 0$ тогда и только тогда, когда λ принадлежит счетному множеству $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \rightarrow \lambda_+$, изображенному на фиг. 1. В точках $\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots$ функция Грина имеет полюсы первого порядка.

Делая обратное преобразование Лапласа, получаем, что решение задачи (3.4), (3.5) представляется в виде

$$(4.3) \quad w(\tau, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \exp\{\lambda\tau\} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y; \lambda) \frac{f(y)}{\lambda + \beta} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_y^x \frac{1+2\nu_0}{\lambda + \beta} d\xi\right\} \times \\ \times dy d\lambda + \int_D \Phi_1(\lambda) e^{\lambda\tau} X_\lambda(x) d\chi d\zeta$$

где γ_1 — достаточно большая положительная константа. Поменяем порядок интегрирования в первом слагаемом и рассмотрим в комплексной области замкнутый контур интегрирования, изображенный на фиг. 2. Учитывая, что при больших $|\lambda|$ $W_0(\lambda) \rightarrow \text{const}$, находим, что интеграл по дугам стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$, и, следовательно

$$(4.4) \quad \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} G(x, y; \lambda) \frac{\exp\{\lambda\tau\}}{\lambda + \beta} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_y^x \frac{1+2\nu_0}{\lambda + \beta} d\xi\right\} d\lambda = \\ = \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} G(x, y; \lambda) \frac{\exp\{\lambda\tau\}}{\lambda + \beta} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_y^x \frac{1+2\nu_0}{\lambda + \beta} d\xi\right\} d\lambda + \\ + 2\pi i \sum_{j=0}^k \text{вычетов}$$

Первое слагаемое в правой части экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$, так как $\operatorname{Re} \lambda = \gamma_2 < 0$. Вычеты в полюсах функции G соответствуют экспоненциально зависящим от времени решениям задачи (3.4) при $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, попавшим в контур. Окончательно получаем

$$(4.5) \quad w(\tau, x) = \Phi_2(\tau, x) + \sum_{j=0}^k C_j \exp\{\lambda_j \tau\} w_j(x) + \\ + \int_D \Phi_1(\lambda) \exp\{\lambda\tau\} X_\lambda(x) d\chi d\zeta$$

где $|\Phi_2| \leq P \exp\{\gamma_2 \tau\}$; Φ_1, C_j определяются из начальных условий.

Все слагаемые, кроме $C_0 w_0$ и, может быть, интеграла экспоненциально убывают по τ . Наличие неубывающего решения связано с тем, что задача (1.8) не зависела явно от x , и, значит, множество решений этой задачи инвариантно относительно сдвигов по x . Также инвариантно и множество стационарных решений ν_0 задачи (3.1). И формула (4.5) показывает, что решение задачи (3.1), (3.2) при $\tau \rightarrow \infty$ выходит на стационарное решение в том смысле, что среди множества стационарных решений найдется

такое $v_0(x)$, что $v(\tau, x) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} v_0(x)$. Легко видеть, что это решение v_0 определяется однозначно из условия

$$(4.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_3 - \varphi_0) dx = 0$$

Для задачи (3.4), (3.5) это приводит к равенству нулю интеграла от функции w по x , а для разложения (4.5) к $C_0 = 0$ и ограниченности $\Phi_1(\lambda)$ в окрестности нуля.

Таким образом, при некоторых ограничениях (скорость распространения $c=0$, $\alpha \geq |1+u_-|$) доказана устойчивость в линейном приближении решения типа бегущей волны для уравнения (1.6), альтернативного к уравнению Кортвега — де Вриза — Бюргерса. Численный эксперимент показывает, что эта устойчивость имеет место не только в «малом», но и в «большом», а так же без перечисленных ограничений. Это наводит на мысль, что в задаче нестационарной фильтрации [3] проявляется тот же эффект — выход решения смешанной задачи на решение типа бегущей волны — т. е. образование стабилизированной зоны, которую можно было бы наблюдать экспериментально.

В заключение автор благодарит Г. И. Баренблатта за постоянное внимание к данной работе.

Поступила 14 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1972, vol. A272, No. 1220.
2. Bona J. L., Smith R. The initial — value problem for the Korteweg—De Vries equation. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1975, vol. A278, No. 1287.
3. Винниченко А. П. К теории нестационарной неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
5. Benjamin T. B. The stability of solitary waves. Pros. Roy. Soc., 1972, vol. A328, No. 1573.
6. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л., Гидрометеоздат, 1976.