МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1978

УДК 532.546

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. М. ВАЙСМАН, М. А. ГОЛЬДШТИК

(Новосибирск)

Развита теория, учитывающая роль инерционных эффектов при движении жидкости в пористой среде. Для сжимаемой жидкости наряду с гидродинамическими уравнениями сформулированы термодинамические уравнения переноса. Исследованы особенности зарождения, распространения и диссипации вихревого движения. Получены условия сопряжения на границе раздела сред и краевые условия. Дана приближенная постановка задачи, выделяющая внутри пористой среды основную область течения, в которой справедлив классический закон Дарси. В качестве иллюстрации рассмотрен слабовозмущенный поток жидкости в плоском канале со вставкой из пористого материала.

Классическая теория фильтрации предполагает потенциальность течения вследствие малости скорости. Между тем независимо от величины скорости такое предположение, вообще говоря, несправедливо в окрестности границ пористой среды и способно приводить к парадоксам. Например, поток теряет часть касательного импульса при входе в среду. При постоянном давлении на плоской границе потенциальное движение вдоль нее в среде вообще невозможно, хотя снаружи касательная составляющая скорости может быть произвольной. Другим примером является безотрывное обтекание пористого тела. Струи, проходящие сквозь тело, замедляются, в результате чего за телом возникают существенные неоднородности скорости, сохраняющиеся вниз по потоку, что возможно только при вихревом движении. Но вихреобразование несовместимо с потенциальностью течения в замкнутой области, занятой телом.

Устранить подобные противоречия можно лишь при учете инерционных сил, которые могут быть существенны также в тонких пористых слоях [1] или при быстрых течениях в средах с относительно небольшим сопротивлением. В частности, в [2] учитывались динамические эффекты при течении несжимаемой жидкости в предельно разреженной пористой среде, когда наличие пористого материала не сказывается на проходном сечении, хотя среда обладает линейным законом сопротивления.

1. Для сжимаемой жидкости уравнения теории фильтрации с учетом инерционного движения можно записать в виде [3]

$$\rho\, d\mathbf{v}/dt = -\nabla p - \frac{\varepsilon}{\varkappa}\mathbf{v} + \mathbf{f}, \qquad \partial\rho/\partial t + \varepsilon^{-1}\operatorname{div}\varepsilon\rho\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, t — время, $\mathbf{f}=-\rho\nabla\Phi$ — внешняя сила с потенциалом Φ, действующая на единицу жидкого объема, p — давление в жидкости, $\mathbf{v}$ — средняя скорость движения в поровом канале, ε — среднее относительное проходное сечение, $\varkappa$ — коэффициент фильтрации, вообще говоря, зависящий от скорости, поскольку последняя не предполагается малой. В неоднородной среде ε и $\varkappa$ являются, кроме того, функциями координат.

Будем считать жидкость идеальной вне пористого слоя. Тогда уравнения (1.1) формально можно распространить на все течение, рассматривая область, занятую идеальной жидкостью, как среду с параметрами $\varkappa^{-1}=0$, $\varepsilon=1$.

Данная макроскопическая модель пренебрегает реальной микроструктурой среды. Иными словами, предполагается, что масштаб усреднения велик по сравнению с масштабом неоднородностей, так что микроструктура определяет только коэффициент $\varkappa$ и не проявляется в виде членов с высшими производными типа эффективной вязкости (из-за малости пульсаций скорости, связанных с неоднородностями). Вне пористой среды пульсации не могут считаться малыми, но если предположить, что они имеют характер однородной и изотропной турбулентности, то уравнения среднего движения не изменят своего вида.

С целью формулировки закона сохранения энергии рассмотрим изменение полной энергии единицы объема жидкости. Оно определяется мощностью внешних сил, теплообменом Q между пористой средой и жидкостью, потоком тепла в жидкости и, наконец, потоком механической энергии. Имея в виду, что в данной модели унос механической энергии из объема при движении должен совпадать с соответствующим выражением для идеальной жидкости, нетрудно получить уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{1}{2}q^2+e\right)=\mathbf{vf}+Q-\varepsilon^{-1}\operatorname{div}\varepsilon\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}q^2+i\right)-\Lambda\operatorname{grad}T\right] \tag{1.2}$$

Здесь e — внутренняя энергия единицы массы жидкости, i — ее энтальпия, q — модуль скорости $\mathbf{v}$, Λ — коэффициент теплопроводности жидкости, T — ее температура.

Для среды из случайно и плотно засыпанных шариков диаметра d конвективный теплообмен с единицей жидкого объема описывается выражением [4]

$$Q=6(\varepsilon^{-1}-1)\alpha_* d(T_s-T)$$

в котором T_s — температура среды, α_* — коэффициент теплоотдачи.

Переход к уравнению переноса энтропии проводится стандартным способом [5]

$$\rho T ds/dt=R+Q+\varepsilon^{-1}\operatorname{div}\varepsilon\Lambda\operatorname{grad}T,\qquad R=\varepsilon q^2/\varkappa \tag{1.3}$$

Здесь s — энтропия единицы массы жидкости, R — скорость выделения тепла трения.

Используя термодинамическое тождество $c_p dT=Tds+\lambda_p T dp$, можно записать уравнение теплопроводности

$$\rho c_p dT/dt=R+Q+\varepsilon^{-1}\operatorname{div}\varepsilon\Lambda\operatorname{grad}T+\lambda_p\rho T dp/dt \tag{1.4}$$

Здесь c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении, $\lambda_p=(\partial\rho^{-1}/\partial T)_p$ — изобарический коэффициент ее температурного расширения.

Любое из уравнений (1.2)—(1.4) может быть использовано при замыкании системы гидродинамических уравнений.

Рассмотрим отдельно стационарное течение несжимаемой жидкости. Гидродинамические уравнения, которые в этом случае образуют замкнутую систему, можно записать в форме

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\frac{p}{\rho}-\nabla\Phi-\alpha\mathbf{v},\qquad \alpha=\varepsilon/\varkappa\rho \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{v}=0 \tag{1.6}$$

Введем вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ и функцию Бернулли H

$$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v},\qquad H=\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{\rho}p+\Phi \tag{1.7}$$

В новых обозначениях уравнения движения примут вид

(1.8) $\nabla H+\omega\times\mathbf{v}=-\alpha\mathbf{v}$

Рассмотрим законы изменения H и ω. Умножая обе части (1.8) скалярно на $\mathbf{v}/q$, находим скорость убывания H на траектории (dl — дифференциал дуги траектории)

(1.9) $\partial H/\partial l=-\alpha q$

Применив операцию ротора к (1.8), получим

(1.10) $\delta\omega/\delta t\equiv(\mathbf{v}\nabla)\omega-(\omega\nabla)\mathbf{v}=-(\alpha+\operatorname{div}\mathbf{v})\omega+\mathbf{v}\times\nabla\alpha$

Здесь через $\delta\omega/\delta t$ обозначена производная Ли от ω [6].

При постоянных α и ε уравнение переноса вихря и его решение в лагранжевых координатах имеют вид

(1.11) $\delta\omega/\delta t=-\alpha\omega,\quad \omega^i(t)=\omega^i(0)e^{-\alpha t}$

Здесь $\omega^i(0)$ — начальные значения лагранжевых компонент. Отсюда получаем

(1.12) $\omega(t)=\omega_*(t)e^{-\alpha t}$

где $\omega_*(t)$ — «вмороженный» в лагранжеву систему вектор, совпадающий с $\omega(0)$ в начале траектории и имеющий неизменные лагранжевы компоненты.

Таким образом, как и в идеальной жидкости, вихревые линии движутся вместе с жидкостью, т. е. справедлива теорема Гельмгольца. Разница заключается лишь в экспоненциальном затухании $\omega(t)$ по отношению к $\omega_*(t)$. Сказанное означает, что вопрос о постановке, а также существовании и единственности решений краевых задач должен сводиться к аналогичной проблеме в теории идеальной жидкости [7].

В отличие от вязкой жидкости в данной модели диссипация вихря происходит на самой траектории, т. е. он не диффундирует на соседние траектории. Поэтому области потенциального и вихревого течения не смешиваются.

Отметим, что винтовое течение запрещено, т. е. ориентация вихря и скорости не могут совпадать ни на какой, даже элементарной площадке. Это следует из уравнения (1.11) при учете несжимаемости жидкости.

Наиболее интересной особенностью течения в неоднородной среде является возможность самозарождения вихревого движения, так как изменение сопротивления создает момент сил трения, закручивающий жидкость. Этим свойством модель отличается не только от идеальной, но и от вязкой несжимаемой жидкости, в которую вихри вносятся извне или диффундируют с границы. Потенциальное течение в неоднородной среде возможно, но является при этом весьма специальным случаем. Даже при отсутствии внешних источников вихрей оно согласно (1.10) осуществимо лишь при условии параллельности $\mathbf{v}$ и $\nabla\alpha$.

2. Рассмотрим поля, характеризующие течение жидкости на границе раздела сред с параметрами ε^+, α^+ и ε^-, α^-. Границу будем рассматривать как предельный случай переходного слоя, толщина которого стремится к нулю. Предельные значения функций с разных сторон границы будем обозначать знаками плюс и минус. Введем, кроме того, на границе тройку единичных векторов: $\mathbf{n}$ — направление нормальной к границе составляющей скорости, $\boldsymbol{\tau}$ — направление касательной скорости, $\boldsymbol{\vartheta}=\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}$ — бинормаль. Проекции других векторов на эти направления будем отмечать соответствующими индексами.

Предполагая сначала жидкость несжимаемой, рассмотрим поведение величины H в переходном слое. Согласно (1.9) изменение H при конечном α пропорционально толщине слоя и в пределе исчезает

$$[H]=H^+-H^-=0 \tag{2.1}$$

Из уравнения непрерывности в пределе получим

$$[\varepsilon v_n]=0 \tag{2.2}$$

Считая проекцию скорости v_n отличной от нуля, рассмотрим изменение касательной скорости $\mathbf{v}_\tau$. Сохранение перепада значений $\mathbf{v}_\tau$ на границах переходного слоя при уменьшении его толщины привело бы к быстрому росту в слое величины вихря (в пределе – к сингулярности). Это повлекло бы за собой быстрый рост второго члена в левой части (1.8). С другой стороны, учитывая непрерывность H и конечность α и $\mathbf{v}$, находим, что остальные члены уравнения (1.8) существенно не меняются при уменьшении толщины слоя. Таким образом, справедливость (1.8) в переходном слое приводит в пределе к непрерывности $\mathbf{v}_\tau$ на границе

$$[\mathbf{v}_\tau]=0 \tag{2.3}$$

Сформулируем теперь условия сопряжения в случае сжимаемой жидкости. Анализ уравнения переноса температуры (1.4), аналогичный проведенному для (1.8), приводит к следующим соотношениям:

$$[T]=0, \quad \Lambda[\varepsilon \partial T/\partial n]=-\lambda_p \varepsilon \rho v_n T[p] \tag{2.4}$$

причем полагается, что скачок p не сказывается заметно на величинах λ_p и Λ. Точно так же на основании (1.3) доказывается формула

$$[s]=-\lambda_p[p] \tag{2.5}$$

Если можно пренебречь акустическими явлениями и считать ρ функцией только T, то условия (2.1)–(2.3) сохраняются и для сжимаемой жидкости. В общем случае вместо (2.1) нужно потребовать, как нетрудно показать, непрерывности функции $\tilde{H}=q^2/2+\Phi+\varphi$, где φ – термодинамический потенциал единицы массы жидкости. Непрерывность $\mathbf{v}_\tau$ не нарушается, а вместо εv_n будет непрерывна величина $\varepsilon\rho v_n$.

Соотношения (2.1)–(2.3) или их обобщения, а также соотношение (2.4), позволяют формулировать задачу с границей раздела. Однако может представлять интерес переформулировка условий сопряжения в терминах других переменных. Приведем без доказательства соответствующие условия для несжимаемой жидкости

$$[p]=\frac{1}{2}\rho\frac{[\varepsilon^2]}{(\varepsilon^+)^2}(v_n^-)^2=\frac{1}{2}\rho\frac{[\varepsilon^2]}{(\varepsilon^-)^2}(v_n^+)^2 \tag{2.6}$$

$$\omega_n^+-\omega_n^-=0, \quad \varepsilon^+\omega_\tau^--\varepsilon^-\omega_\tau^+=0,$$

$$\varepsilon^+\omega_\vartheta^--\varepsilon^-\omega_\vartheta^+=\varepsilon^+[\alpha]v_\tau^-/v_n^-$$

Скачок давления обусловлен изменением проходного сечения на границе сред. Скачок вихря порожден граничной неоднородностью. Необходимым условием его отсутствия является ортогональность траекторий границе раздела. Этот результат можно рассматривать как частный случай характеристического свойства параллельности потенциального течения градиенту α, о чем уже говорилось.

Выпишем отдельно условия сопряжения на границе раздела между средой и несжимаемой жидкостью. При этом условимся отмечать индексом нуль величины вне среды. Соотношения (2.1)–(2.3) и (2.6) принимают вид

(2.7)
$$H^\circ=H, \quad v_n{}^\circ=\varepsilon v_n, \quad \mathbf{v}_\tau{}^\circ=\mathbf{v}_\tau, \quad \omega_n{}^\circ=\omega_n, \quad \varepsilon\omega_\tau{}^\circ=\omega_\tau$$
$$p^\circ-p={}^1/_2\rho(\varepsilon^{-2}-1)(v_n{}^\circ)^2, \quad \varepsilon\omega_\vartheta{}^\circ-\omega_\vartheta=\varepsilon\alpha v_\tau{}^\circ/v_n{}^\circ$$

Для постановки задачи кроме условий на границах раздела необходимы краевые условия на участках втекания и вытекания. Нетрудно показать, что они могут быть такими же, как и для идеальной жидкости. В частности, в случае плоской задачи для несжимаемой жидкости на участке втекания можно задавать нормальную составляющую скорости и величину вихря, а на участке вытекания — только нормальную составляющую скорости.

Полную формулировку задачи завершает условие непроницаемости на твердых стенках

(2.8) $$v_n=0$$

которое также может быть получено предельным переходом.

3. До сих пор на величину сил инерции не накладывалось никаких ограничений. Чтобы установить характер перехода от данной модели к классическому закону фильтрации, рассмотрим случай медленного движения. Тогда возникает типичная слабонелокальная модель, так как при старшей (в данном случае первой) производной скорости в уравнении движения стоит малый масштабный параметр δ порядка U/α, где U — характерная скорость. Этот параметр определяет толщину погранслоя в окрестности передней кромки, в котором нельзя пренебрегать инерционными эффектами. Согласно (1.12) в погранслое и происходит диссипация вихревого движения, порожденного на границе, так что вне погранслоя движение потенциально.

Малость толщины δ по сравнению с характерным масштабом течения позволяет пренебречь продольными градиентами переменных внутри слоя и записать «погранслойные» уравнения движения и непрерывности в виде

(3.1) $$p'=-\alpha v_n, \quad \rho v_n v_\tau'=-\alpha v_\tau, \quad v_n'=0$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование поперек слоя.

Из уравнений (3.1) следует, что инерционные явления в слое затрагивают только v_τ и никак не сказываются на поведении v_n и p. Поэтому в нулевом приближении по δ можно считать движение потенциальным во всем объеме среды и требовать выполнения только двух условий сопряжения на передней кромке

(3.2) $$v_n{}^\circ=\varepsilon v_n, \quad p^\circ-p={}^1/_2\rho(\varepsilon^{-2}-1)(v_n{}^\circ)^2$$

В этом приближении на границе, вообще говоря, возникает разрыв касательной скорости, отражающий разницу ее значений на границах погранслоя. В следующем приближении, как обычно, «сшиваются» нулевое приближение с решением в погранслое.

Рассмотрим теперь условия на выходе из среды. Согласно последней формуле в (2.7) силы инерции жидкости на границе резко возрастают и имеют ту же величину, что и силы трения при любых ненулевых скоростях. Без учета инерции вихрь, порожденный граничной неоднородностью, остался бы сосредоточенным на границе, и непотенциальность течения свелась бы просто к скачку касательной скорости [8]. Именно инерция препятствует образованию скачка и порождает поток вихря. Существенно, что в отличие от условий на входе поток за задней кромкой может свободно распространяться, не образуя, вообще говоря, никаких погранслоев.

Из сказанного следует, что на этой границе даже при фильтрационных скоростях к условиям (3.2) необходимо добавить условие непрерывности касательных скоростей и тем самым неявно учесть роль сил инерции.

Сформулированная приближенная постановка задачи во многих случаях вполне достаточна. В то же время общая модель, по-видимому, имеет ограниченную применимость для плотных сред типа среды из плотно упакованных сферических частиц. Оценка показывает, что толщина погранслоя при обычных режимах в этом случае порядка или даже меньше диаметра частиц. Следовательно, пренебрежение этой толщиной есть просто необходимое условие макроскопического описания. Однако даже для таких сред общая схема сохраняет свое принципиальное значение, так как именно на ее основе возможна формулировка корректного описания, учитывающего динамические эффекты.

4. С целью иллюстрации установленных выше закономерностей рассмотрим в рамках общей постановки поток несжимаемой жидкости с характерной скоростью U, который движется в плоском горизонтальном канале высотой $2h$, проходя сквозь вертикальную пористую перегородку. Пусть равномерность течения нарушается какой-либо внешней причиной таким образом, что поток перед пористым слоем остается потенциальным и симметричным относительно оси канала. Вследствие удаленности источника возмущения предполагается его малость вблизи границы перегородки.

Расчет будем проводить в безразмерных переменных, сохранив принятые обозначения соответствующих размерных переменных, причем невозмущенную скорость примем равной единице, высоту канала выберем равной 2π, ширину слоя обозначим x_0 (где оси x и y направлены вдоль и поперек оси канала, а начало координат находится на передней границе вставки). Условимся отмечать индексами l, r величины, относящиеся к идеальной жидкости соответственно слева и справа от слоя.

Перейдем к формулировке краевых условий. На твердых стенках канала течение горизонтально. На участке втекания ($x\to-\infty$) одним условием является потенциальность течения. В качестве второго условия потребуем, чтобы потенциал скорости описывался асимптотическим выражением вида

$$\varphi_l=x-\lambda e^{-x}\cos y,\quad x\to-\infty,\quad \lambda\ll 1 \tag{4.1}$$

Первое слагаемое описывает невозмущенный горизонтальный поток, второе — главную часть возмущения, достигающего границы вставки.

На противоположном участке канала при $x\to\infty$ происходит выравнивание давлений и, следовательно, исчезает зависимость функции тока от x

$$\psi_r=\psi_r(y),\quad x\to\infty \tag{4.2}$$

На передней стенке пористой вставки в качестве условий сопряжения выберем следующие:

$$u_l=\varepsilon u,\quad v_l=v,\quad H_l=H\quad (x=0) \tag{4.3}$$

Аналогичный вид имеют условия сопряжения на задней стенке, нужно только заменить индекс l на r.

Можно показать, что в первом приближении по λ уравнениям задачи будут удовлетворять следующие выражения ($H_0=\text{const}$):

$$\begin{gathered}
H_l=H_0,\quad \varphi_l=x-\lambda(a_le^x+e^{-x})\cos y\\
u_l=1+\lambda(-a_le^x+e^{-x})\cos y,\quad v_l=\lambda(a_le^x+e^{-x})\sin y\\
\omega=-\lambda(\sigma^2-1)ce^{-\sigma x}\sin y,\\
\psi=\varepsilon^{-1}y+\lambda(ae^{x-2x_0}+be^{-x}+ce^{-\sigma x})\sin y\\
H=H_0-\varepsilon^{-2}\sigma x+\lambda\sigma\varepsilon^{-1}(-ae^{x-2x_0}+be^{-x}+\sigma^{-1}ce^{-\sigma x})\cos y
\end{gathered}$$

$$u=\varepsilon^{-1}+\lambda(ae^{x-2x_0}+be^{-x}+ce^{-\sigma x})\cos y$$

(4.4)

$$v=\lambda(-ae^{x-2x_0}+be^{-x}+\sigma ce^{-\sigma x})\sin y$$

$$\omega_r=\lambda c_r e^{-x_0}\sin y$$

$$\psi_r=y+\lambda(b_re^{-x}+c_re^{-x_0})\sin y,\quad H_r=H_0-\varepsilon^{-2}\sigma x_0+\lambda c_re^{-x_0}\cos y$$

$$u_r=1+\lambda(b_re^{-x}+c_re^{-x_0})\cos y,\quad v_r=\lambda b_re^{-x}\sin y$$

Здесь $\sigma=\varepsilon\alpha h_0/\pi U=\varepsilon^2 h_0/\pi\varkappa\rho U$ (σ^{-1} — толщина погранслоя).

Формулы (4.4) содержат неопределенные константы a_l, a, b, c, b_r, c_r, которые находятся подстановкой в условия сопряжения и последующим решением возникающей при этом системы линейных уравнений. Приведем выражения для этих констант

$$a=2D^{-1}[-(\sigma+\varepsilon-\varepsilon^2)+\sigma(1+\sigma\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-(\sigma-1)x_0}]$$

(4.5)

$$b=2D^{-1}[(-\sigma+\varepsilon+\varepsilon^2)+\sigma(1+\sigma\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-(\sigma+1)x_0}],\qquad b_r=$$

$$=-4D^{-1}[\varepsilon^2+\sigma(\sigma+1)(\sigma-1+\varepsilon^2)e^{-\sigma x_0}\operatorname{sh}x_0]$$

$$c=2\sigma D^{-1}[\sigma+\varepsilon+\varepsilon^2-(\sigma+\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-2x_0}],\qquad c_r=-4\sigma D^{-1}[\varepsilon-(\varepsilon\operatorname{ch}x_0-$$

$$-(\sigma^2-\sigma\varepsilon-1)\operatorname{sh}x_0)e^{-\sigma x_0}]$$

$$a_l=-1+2(\sigma^2-1)D^{-1}[\sigma+\varepsilon+\varepsilon^2-(\sigma+\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-2x_0}]$$

$$D=(\sigma-1)(\sigma+1+\varepsilon)(\sigma+\varepsilon+\varepsilon^2)-(\sigma+1)(\sigma-1+\varepsilon)(\sigma+$$

$$+\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-2x_0}+2\sigma\varepsilon(1+\sigma\varepsilon-\varepsilon^2)e^{-(\sigma+1)x_0}$$

Вид полученного решения иллюстрирует, в частности, характер вихревого движения, возникающего на границах пористой вставки. Его зарождение в пористой среде обусловлено неортогональностью траекторий к передней границе. При большом значении σ это движение экспоненциально затухает, как $e^{-\sigma x}$, так что течение быстро становится потенциальным, и неравномерность потока затухает, как e^{-x}. Если ширина вставки сравнима или меньше высоты, то возмущения в потоке достигают задней кромки и индуцируют вихревое движение за вставкой. По мере удаления от вставки течение становится горизонтальным и описывается асимптотическими выражениями

$$u_r=1+\lambda c_re^{-x_0}\cos y,\qquad \omega_r=\lambda c_re^{-x_0}\sin y \tag{4.6}$$

Поступила 16 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайсман А. М., Гольдштик М. А.* О течении сквозь тонкий пористый слой (решетку). Изв. АН СССР, 1978, № 4.
2. *Gatamoto K., Yoshida Z.* Flow through a porous wall with convective acceleration. J. Phys. Soc. Japan, 1974, vol. 37, No. 3.
3. *Вайсман А. М., Гольдштик М. А.* Динамическая модель движения жидкости в пористой среде. Минск, 1977.
4. *Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем. ПМТФ, 1973, № 4.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.
7. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6.
8. *Мясников В. П., Котелкин В. Д.* Гидродинамическая модель химического реактора с неподвижным слоем катализатора. В сб. «Аэромеханика». М., «Наука», 1976.