

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИЛАТАНТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Л. К. МАРТИНСОН

(Москва)

Исследуются процессы распространения сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях. Анализируется эволюция во времени носителя решения задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения, описывающего такие процессы. Обсуждаются нелинейные эффекты конечной скорости и пространственной локализации сдвиговых возмущений.

1. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} L(u) &= u_t - D(|Du|^{n-1}Du) + cDu + \gamma u = 0 \\ n > 1, \quad c &= \text{const}, \quad \gamma = \text{const} \geq 0, \quad D = \partial/\partial x, \quad x \in R^1 \end{aligned}$$

Это уравнение описывает плоские нестационарные сдвиговые течения несжимаемой неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом (при $n > 1$ такие среды называются дилатантными жидкостями) при наличии массовых сил, пропорциональных скорости движения жидкости $u(t, x)$. В частности, при $\gamma \neq 0$ это уравнение описывает процесс переноса импульса в несжимаемой проводящей дилатантной жидкости при наличии однородного поперечного магнитного поля [1]. Если при этом $c \neq 0$, то вектор скорости $V\{c, 0, u(t, x)\}$ и учитывается конвективный перенос импульса, обусловленный движением среды с постоянной скоростью в поперечном направлении (поперечный снос).

Особенности характера распространения сдвиговых возмущений в процессах, описываемых уравнением (1.1), обусловлены нелинейностью этого уравнения и связаны, в частности, с вырождением уравнения (1.1) при $Du = 0$. Исследуя процесс распространения сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях, будем изучать эволюцию во времени носителя решения задачи Коши для уравнения (1.1). Здесь и далее под носителем $\text{supp } f(x)$ неотрицательной функции $f(x) \in C(R^1)$ понимается замыкание множества точек x , для которых $f(x) > 0$.

Будем предполагать, что начальное распределение скорости $u(0, x) = u_0(x)$, соответствующее начальному сдвиговому возмущению, возникшему в локальной области пространства, описывается неотрицательной ограниченной финитной функцией с компактным носителем $\text{supp } u_0(x) = [-l, +l]$, где $0 < l < +\infty$. Кроме того, будем считать, что асимптотика функции $u_0(x)$ вблизи граничных точек носителя $x = -l$ и $x = +l$ имеет вид

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_0(x) &\simeq U_-(x+l)^{\alpha_1}, \quad x \rightarrow -l+0 \\ u_0(x) &\simeq U_+(l-x)^{\alpha_2}, \quad x \rightarrow +l-0 \\ U_{\pm} &= \text{const} > 0, \quad \min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq 1 \end{aligned}$$

Исследуем сначала особенности распространения сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях, обусловленные зависимостью эффектив-

ной вязкости среды от величины градиента скорости. Для рассматриваемых нелинейно-вязких сред $\nu_{eff} \sim |Du|^{n-1}$ и эффективная вязкость обращается в нуль в тех точках, где $Du=0$.

Пусть в несжимаемой непроводящей дилатантной жидкости, занимающей неограниченное пространство, в начальный момент времени возникает локальное сдвиговое возмущение, описываемое некоторой финитной функцией $u_0(x)$, такой, что $u_0=0$ при $|x| \geq l$. Наличие внутреннего трения в жидкости приведет к переносу импульса от одних слоев жидкости к другим. Возмущение начнет распространяться в среде, и возникнет некоторое одномерное нестационарное сдвиговое течение, причем скорость движения среды в этом течении $u(t, x)$ может быть найдена из решения задачи Коши (задача I) в области $R_+^2 = \{(t, x) : t \in [0, +\infty), x \in R^1\}$ для уравнения

$$(1.3) \quad u_t - D(|Du|^{n-1}Du) = 0, \quad n > 1$$

Под решением задачи I будем понимать функцию $u(t, x) \in C^{0,1}_{t,x}(R_+^2)$, удовлетворяющую уравнению (1.3) (в общем случае в обобщенном смысле [2, 3]) и начальному условию $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$. Требуемые при этом условия гладкости функции $u(t, x)$ связаны с физическими условиями непрерывности скорости и касательных напряжений в рассматриваемом течении. Будем предполагать также, что начальное распределение удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности задачи I [2]. Эти условия естественным образом выполняются, если с задачей I связана физическая постановка, сформулированная выше.

Отметим, что решение задачи I неотрицательно и монотонно зависит от начального условия [3], т. е. если $u_0^{(1)}(x) \geq u_0^{(2)}(x) \quad \forall x \in R^1$, то $u^{(1)}(t, x) \geq u^{(2)}(t, x)$ всюду в R_+^2 . Кроме того, из закона сохранения импульса следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \int_{-l}^{+l} u_0(x) dx = \text{const}, \quad t \in [0, +\infty)$$

На примерах точных автомодельных решений в [4] было показано, что сдвиговые возмущения в дилатантных жидкостях могут распространяться с конечной скоростью в отличие от несжимаемых ньютоновских ($n=1$) и псевдопластических жидкостей ($n < 1$), в которых скорость распространения сдвиговых возмущений бесконечна. Этот результат можно обобщить и на случай произвольного неавтомодельного движения.

Теорема 1. Скорость распространения возмущений в процессах, описываемых задачей I конечна, т. е. для любого $t \in [0, T]$, где $T < +\infty$, $\text{supp } u(t, x) = [x_-(t), x_+(t)]$, причем $|x_{\pm}(t)| < +\infty$.

Доказательство этой теоремы можно провести, используя свойство монотонной зависимости решения задачи I от начального условия. В качестве мажорирующей функции для задачи I можно выбрать функцию $u^*(t, x)$, найденную в [4] и являющуюся точным автомодельным решением (1.3) для $u_0(x) = P\delta(x)$, где $P = \text{const} > 0$, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. При этом финитность решения задачи I следует из финитности функции $u^*(t, x)$ по x для любого $t \in [0, T]$.

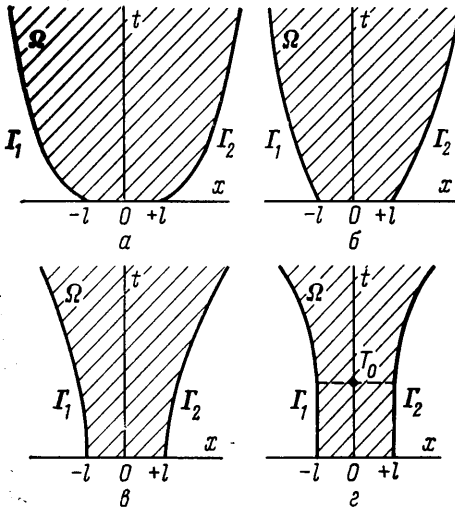
Таким образом, в дилатантных жидкостях сдвиговые возмущения распространяются в виде сдвиговых волн, фронты которых перемещаются в среде с конечной скоростью. Линии Γ_1 и Γ_2 , определяемые соответственно выражениями $x = x_-(t)$ и $x = x_+(t)$, отделяют в R_+^2 область возмущения Ω , где $u > 0$, от невозмущенной области $R_+^2 \setminus \Omega$, где $u = 0$. Граничные точки носителя решения $x_-(t)$ и $x_+(t)$ естественно назвать левой и правой фрон-

товыми точками, так как эти точки в любой момент времени соответствуют фронтам сдвиговой волны возмущения. Очевидно, что $x_-(0) = -l$, а $x_+(0) = +l$.

Исследуем ряд особенностей решения задачи I, определяющих особенности процесса распространения сдвиговых возмущений.

Лемма 1. Размер носителя решения задачи $I H(t) = x_+(t) - x_-(t)$ не уменьшается со временем.

Для доказательства леммы продифференцируем тождества $u(t, x_{\pm}(t)) \equiv 0$ по времени. Тогда для скорости движения фронтовых точек получим следующие соотношения:



Фиг. 1

т. е. размер области возмущения не уменьшается со временем.

Из (1.4) следует также, что распределение скорости движения жидкости вблизи движущихся ($\dot{x}_{\pm} \neq 0$) фронтов возмущения имеет следующую асимптотику:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u(t, x) &\simeq a_-(t) (x - x_-(t))^{n/(n-1)}, \quad x \rightarrow x_- + 0 \\ u(t, x) &\simeq a_+(t) (x_+(t) - x)^{n/(n-1)}, \quad x \rightarrow x_+ - 0 \end{aligned}$$

причем

$$\dot{x}_{\pm}(t) = \pm \left(\frac{n}{n-1} \right)^n a_{\pm}^{n-1}(t)$$

Характер движения фронтовых точек в начальный момент времени определяется асимптотикой начального распределения (1.2) вблизи точек $x = -l$ и $x = +l$. Эволюция носителя решения задачи I во времени показана на фиг. 1. Если $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < n(n-1)^{-1}$, то фронты возмущения приходят в движение сразу, причем $\dot{x}_{\pm}(t) \rightarrow \pm \infty$ при $t \rightarrow 0$ (фиг. 1, а). Если же $\alpha_1 = \alpha_2 = n(n-1)^{-1}$, то фронты возмущения начинают движение с конечной ненулевой скоростью (фиг. 1, б), причем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{x}_{\pm}(t) = \pm \left(\frac{n}{n-1} \right)^n U_{\pm}^{n-1}$$

В случае, когда $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} > n(n-1)^{-1}$, фронты возмущения начинают движение с нулевой скоростью (фиг. 1, в и г). При этом если $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{\pm}(t) &\equiv \frac{dx_{\pm}}{dt} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_{\pm}} \frac{D(|Du|^{n-1} Du)}{Du} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_{\pm}} u^{-1} |Du|^n \operatorname{sgn} Du \end{aligned}$$

Предельные операции в (1.4) соответствуют стремлению к фронтовым точкам из области возмущения, т. е. $x \rightarrow x_- + 0$ и $x \rightarrow x_+ - 0$.

Так как в области возмущения $u > 0$, а вне ее $u = 0$, то в силу непрерывности функции u по x очевидно, что $Du \geq 0$ при $x = x_- + \varepsilon$ и $Du \leq 0$ при $x \rightarrow x_+ - \varepsilon$ для достаточного малого $\varepsilon > 0$. Отсюда с учетом соотношения (1.4) находим, что $\dot{x}_-(t) \leq 0$, а $\dot{x}_+(t) \geq 0$ для любого $t > 0$. Поэтому $\dot{H}(t) = \dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$,

$\geq (n+1)(n-1)^{-1}$, то фазе движения фронтовых точек предшествует метастабильная фаза, когда фронты возмущения остаются неподвижными в течение некоторого конечного промежутка времени, а затем приходят в движение (фиг. 1, з).

Теорема 2. Если $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq (n+1)(n-1)^{-1}$, то решение задачи I метастабильно локализовано, т. е. $\text{supp } u(t, x) = \text{supp } u_0(x) \quad \forall t \in [0, T_0]$, где $0 < T_0 < +\infty$.

Доказательство. Докажем, что если $\alpha_2 \geq (n+1)(n-1)^{-1}$, то правый фронт возмущения метастабильно локализован. Для этого рассмотрим функцию

$$(1.6) \quad w(t, x) = \begin{cases} W_0(l-x)^{(n+1)/(n-1)}(1-t/t_0)^{1/(1-n)}, & x < l \\ 0, & x \geq l \end{cases}$$

$$W_0 = \left[\frac{(n-1)^n}{2n(n+1)^n t_0} \right]^{1/(n-1)}$$

Эта функция для любого значения t_0 из интервала $(0, +\infty)$ является решением уравнения (1.3) в полуплоскости $\Pi = \{(t, x) : t \in [0, t_0), x \in R_+^1 = R^1 \cap \{x > 0\}\}$. Очевидно, что выбором параметра t_0 всегда можно удовлетворить неравенствам $u_0(x) \leq w(0, x) \quad \forall x \in R_+^1$ и $u(t, 0) \leq w(t, 0) \quad \forall t \in (0, t_0)$. Тогда из теоремы сравнения, аналогичной теореме сравнения, доказанной в [5], следует, что $u(t, x) \leq w(t, x)$ всюду в Π и так как $w(t, x) = 0$ при $x \geq l$, то и $u(t, x) = 0$ при $x \geq l$ для любого $t \in [0, t_0)$. С учетом леммы 1 отсюда следует, что $x_+(t) = +l \quad \forall t \in [0, t_0)$, т. е. правый фронт метастабильно локализован в течение промежутка времени $[0, T_+]$, где $T_+ \geq t_0$.

В силу инвариантности уравнения (1.3) относительно инверсии пространственной координаты это доказывает одновременно метастабильную локализацию левого фронта в течение некоторого промежутка времени $[0, T_-]$ в случае, если $\alpha_1 \geq (n+1)(n-1)^{-1}$. Поэтому при выполнении условия $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq (n+1)(n-1)^{-1}$ решение задачи I метастабильно локализовано, причем время его метастабильной локализации $T_0 = \min\{T_+, T_-\} < +\infty$. Теорема доказана.

Заметим, что на фиг. 1 изображен характер движения фронтовых точек (область возмущения Ω для наглядности на фигурах заштрихована) для симметричного относительно точки $x=0$ начального распределения ($\alpha_1 = \alpha_2, U_+ = U_-$). В общем случае, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $U_+ \neq U_-$, можно наблюдать суперпозицию различных режимов движения для левой и правой фронтовых точек.

Так как в задаче I $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого $x \in R^1$, то из (1.5) следует, что $\dot{x}_{\pm}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Однако из закона сохранения импульса вытекает, что в задаче I $x_{\pm}(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, т. е. в движение вовлекаются в конечном итоге все слои жидкости.

2. Если дилатантная жидкость обладает проводимостью, то при движении ее в магнитном поле наблюдаются магнитогидродинамические эффекты. Если предположить, что электрическое поле в среде отсутствует, то одномерное нестационарное сдвиговое течение такой жидкости в однородном внешнем поперечном магнитном поле описывается уравнением [4]

$$(2.1) \quad u_t - D(|Du|^{n-1}Du) + \gamma u = 0$$

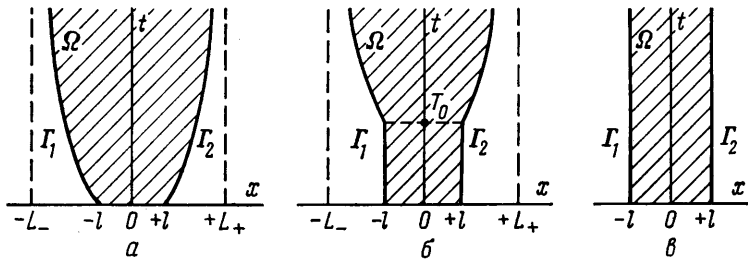
$\gamma = \text{const} > 0, n > 1$

Исследуя процесс распространения сдвиговых возмущений в проводящей дилатантной жидкости, рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.1) в области R_+^2 (задача II) с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$. Как показано в [4], замены $u = v \exp(-\gamma t)$ и $\tau = \tau_m [1 - \exp(-t/\tau_m)]$, где $\tau_m =$

$=[\gamma(n-1)]^{-1}$, приводят задачу II к задаче вида I для функции $v(\tau, x)$ в полосе $S = \{(\tau, x) : \tau \in [0, \tau_m), x \in R^1\}$

$$(2.2) \quad \begin{cases} v_\tau - D(|Dv|^{n-1}Dv) = 0 \\ v(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Конечная скорость распространения возмущений в задаче (2.2), отмеченная в п.1, означает, что для любого $\tau \in [0, \tau_m)$ $\text{supp } v(\tau, x) = [x_-(\tau), x_+(\tau)]$, где $|x_\pm(\tau)| < L_\pm = |x_\pm(\tau_m)| < +\infty$. Поэтому, возвращаясь к задаче II для функции $u(t, x)$, имеем, что носитель решения задачи II $\text{supp } u(t, x) \subset \subset [-L_-, +L_+]$ для любого $t \in [0, +\infty)$, т. е. решение задачи II двусторонне локализовано. С физической точки зрения это означает, что при наличии поперечного магнитного поля ($\gamma \neq 0$) сдвиговые возмущения проникают в



Фиг. 2

проводящую жидкость лишь на конечное расстояние, и размер области возмущения остается ограниченным даже при $t \rightarrow +\infty$. Отметим, что двусторонняя пространственная локализация сдвиговых возмущений в проводящих дилатантных жидкостях при наличии магнитного поля была впервые обнаружена в [4] при анализе свойств точного автомодельного решения задачи II, когда $u_0(x) = \delta(x)$.

Как следует из результатов исследований, проведенных в п.1 настоящей работы, двусторонняя локализация решения задачи II может осуществляться в различных режимах в зависимости от вида асимптотики начального распределения в точках $x = -l$ и $x = +l$ (см. формулу (1.2)). Виды пространственной локализации сдвиговых возмущений показаны на фиг. 2. Если $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < (n+1)(n-1)^{-1}$, то фронты возмущения приходят в движение сразу (фиг. 2, а). Если же $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq (n+1)(n-1)^{-1}$, то в фазе движения фронтовых точек предшествует метастабильная фаза, когда фронты возмущения остаются неподвижными в течение некоторого конечного промежутка времени, а потом приходят в движение (фиг. 2, б). Интересно отметить, что в сильных магнитных полях ($\gamma > \gamma_0$) при выполнении условия $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq (n+1)(n-1)^{-1}$ фронты возмущения вообще могут оставаться неподвижными в течение всего процесса (фиг. 2, в), и течение жидкости происходит в этом случае как бы в некотором «канале» с магнитными стенками. Этот нелинейный эффект можно назвать эффектом магнитного удержания сдвиговых возмущений.

Возможность такого режима стабильной локализации решения задачи II, когда $\text{supp } u(t, x) = \text{supp } u_0(x) = [-l, +l]$ для любого $t \in [0, +\infty)$, вытекает из того, что при выполнении условия $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq (n+1)(n-1)^{-1}$ решение задачи (2.2) метастабильно локализовано (см. теорему 2) при $0 < \tau \leq T_0$. Так как $\tau_m \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$, то всегда найдется такое γ_0 , что при $\gamma > \gamma_0$ будет выполнено неравенство $\tau_m \leq T_0$. Но тогда $\text{supp } v(\tau, x) = \text{supp } u_0(x)$ для любого $\tau \in [0, \tau_m]$. Это означает, что в задаче II $\text{supp } u(t, x) = [-l, +l]$ для любого $t \in [0, +\infty)$.

3. Влияние конвективного переноса импульса, обусловленное движением среды в поперечном направлении, на скорость перемещения фронтальных точек решения задачи Коши для уравнения (1.1) при $c \neq 0$ можно проанализировать, учитывая, что заменой переменных $t=t$, $\xi=x-ct$ эта задача сводится к задаче II для функции $u(t, \xi)$ с начальным распределением $u(0, \xi) = u_0(\xi)$.

Особенностью распространения сдвиговых возмущений в этом случае является их односторонняя пространственная локализация. При этом для $c > 0$ пространственно локализованным оказывается левый фронт возмущения, когда для любого $t \in [0, +\infty)$ $\text{supp } u(t, x) \subset (L, +\infty)$, где $L > -\infty$. Для $c < 0$ пространственно локализован правый фронт, т. е. $\text{supp } u(t, x) \subset (-\infty, L)$ для любого $t \in [0, +\infty)$, причем $L < +\infty$. Отметим, что локализованным оказывается фронт возмущения, движущийся навстречу потоку жидкости.

Поступила 4 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Маргинсон Л. К., Павлов К. Б. Магнитная гидродинамика неньютоновских жидкостей. Магнитная гидродинамика, 1975, № 1.
2. Калашиников А. С. Об условиях единственности обобщенного решения задачи Коши для одного класса квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 12.
3. Граник И. С. Влияние магнитного поля на характер распространения сдвиговых возмущений в дилатантных средах. Магнитная гидродинамика, 1977, № 2.
4. Маргинсон Л. К., Павлов К. Б. Нестационарные сдвиговые течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2.
5. Маргинсон Л. К., Павлов К. Б. Сдвиговые течения жидкости со степенным реологическим законом при наличии постоянной поперечной составляющей скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.