

ТЕЧЕНИЕ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В. Е. ЕПИХИН, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Изучается истечение осесимметричной капиллярной струи вязкой несжимаемой жидкости в пространство, заполненное другой жидкостью. Численным методом получено решение задачи о стационарном течении в струе и окружающей среде под воздействием вязкости, капиллярных сил и силы тяжести. Поставлена задача о неустойчивости этого течения к малым возмущениям в виде бегущих волн и получены численные решения этой задачи. Выявлено значение безразмерных параметров Рейнольдса, Вебера, Фруда, а также влияние начального профиля скоростей в струе на характер течения, его неустойчивость и последующий распад струи на капли.

**1. Постановка задачи.** Имеется ряд работ, посвященных изучению неустойчивости течения в струе в постановке идеальной жидкости [1]. В то же время известно, что при определенных условиях вязкость может существенно влиять на развитие неустойчивости струи [2-5]. Это влияние проявляется двояким образом: вязкость изменяет среднее течение и профиль скоростей; вязкость влияет на величину коэффициента нарастания возмущений. Некоторые модельные постановки задачи с учетом вязкости рассмотрены в [3-6]. В работах [3-5] вязкость учитывалась лишь в уравнениях для возмущений, профиль скоростей считался равномерным, не искаженным действием вязкости. В [6] применялась кусочно-линейная аппроксимация профилей скоростей.

В данной работе рассчитывается совместное течение жидкости в струе и окружающей среде и рассматривается задача об устойчивости этого течения в целом с учетом реальных профилей скоростей и поверхности раздела, формирующихся под воздействием вязкости, силы тяжести и капиллярных сил.

Введем цилиндрическую систему координат  $O, x, y$  так, что ось  $x$  направлена вдоль оси струи, начало координат расположено в центре выходного отверстия. Выберем в качестве характерных размерных величин радиус выходного отверстия  $R_*$ , максимальную скорость истечения  $U_*$ , плотность и кинематическую вязкость жидкости  $\rho_1, \nu_1$ . Течение вязкой несжимаемой жидкости в струе и внешней среде описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \frac{du_j}{dt} = -\nabla p_j + \frac{\nu_j}{\nu_1 \text{Re}} \Delta u_j + \frac{2-j}{\text{Fr}} \mathbf{i}, \quad \text{div } \mathbf{u}_j = 0 \quad (j=1, 2)$$
$$\text{Re} = \frac{U_* R_*}{\nu_1}, \quad \text{Fr} = \frac{U_*^2}{GR_*}, \quad \text{We} = \frac{\rho_1 U_*^2 R_*}{\gamma}$$

Из условия непроницаемости поверхности струи  $y=h(x, t)$  получаем уравнение

$$(1.2) \quad dh/dt = v, \quad y=h(x, t)$$

На оси струи должно выполняться условие симметрии (будем рассматривать течения, при которых ось струи остается прямолинейной), на поверхности струи — условия непрерывности скоростей и касательных напряжений, а также скачок нормальных напряжений, вызванный капиллярными силами; в окружающей среде, вдали от поверхности струи, выполняется условие перехода в равномерный невозмущенный поток. Эти условия имеют вид

$$(1.3) \quad v_1=0, \quad \partial u_1 / \partial y=0, \quad y=0$$

$$(1.4) \quad [\mathbf{u}]=0, \quad [\bar{\sigma}]N=-2N / We R_s, \quad y=h(x, t), \quad x \geq 0$$

$$(1.5) \quad u_2 \rightarrow U_\infty(x), \quad y \rightarrow \infty$$

В начальном сечении  $x=0$  следует задать профили скоростей в струе и окружающей среде. Будем считать, что набегающий поток во внешней среде равномерный, а стационарное течение в струе имеет только продольную компоненту скорости

$$(1.6) \quad u_j(0, t, y) = U_{0j}(y) \quad (j=1, 2), \quad h(0, t) = 1, \quad x=0$$

В уравнениях (1.1), граничных условиях (1.3)–(1.5) и начальных условиях (1.6)  $\mathbf{u}_j = \{u_j, v_j\}$  ( $j=1, 2$ ) — вектор скорости соответственно в струе и окружающей среде;  $G_i$  — вектор массовых сил в струе;  $\bar{\sigma}$  — тензор вязких напряжений [7]; квадратные скобки в формулах (1.4) обозначают скачок соответствующей величины на межфазной поверхности с внешней нормалью  $N$ ;  $\gamma$  — коэффициент межфазного натяжения;  $R_s$  — средний эффективный радиус кривизны разделяющей поверхности, определяемый формулой

$$\frac{2}{R_s} = \cos \theta \left( \frac{1}{h} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right), \quad \cos \theta = \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

**2. Стационарное течение.** Задача (1.1)–(1.6) имеет стационарное решение, которое соответствует истечению жидкости из отверстия во внешний равномерный спутный поток  $u_j^\circ(x, y)$ ,  $p_j^\circ(x, y)$ ,  $h^\circ(x)$  ( $j=1, 2$ ).

Для расчета этого течения допустим, что параметры потока вдоль оси струи изменяются медленнее, чем в поперечном направлении

$$\partial / \partial x \ll \partial / \partial y$$

Это предположение, принимаемое обычно в теории пограничного слоя, оправдывается в рассматриваемой задаче в том случае, когда поток в начальном сечении не имеет поперечной составляющей скорости. Проводя оценку членов в (1.1)–(1.6), приведем задачу для стационарного течения к следующему виду:

$$(2.1) \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{Fr}$$

$$\frac{\partial y u_1}{\partial x} + \frac{\partial y v_1}{\partial y} = 0$$

$$(2.2) \quad u_2 \frac{\partial u_2}{\partial s} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = - \frac{\partial p_2}{\partial s} + \frac{v_0}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial n} \left( h_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right)$$

$$\frac{\partial h_1 u_2}{\partial s} + \frac{\partial h_1 v_2}{\partial n} = 0$$

$$(2.3) \quad u_1 \frac{\partial h}{\partial x} = v_1, \quad y = h(x)$$

$$(2.4) \quad v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad y = 0$$

$$(2.5) \quad u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 2\tau(s), \quad p_1 = p_2 + \frac{1}{We h}, \quad y = h(x)$$

$$v_0 = v_2 / v_1, \quad \mu_0 = \mu_2 / \mu_1 = \rho_0 v_0$$

$$(2.6) \quad u_1(0, y) = U_0(y), \quad h(0) = 1$$

Здесь течение внешней среды рассматривается во внутренней ортогональной системе координат  $s, n$ , связанной с поверхностью раздела [7];  $h_1(s, n)$  — параметр Ламе

$$(2.7) \quad h_1(s, n) = h(s) + n \cos \theta, \quad \sin \theta = \partial h / \partial s$$

С точностью до членов порядка  $O(h_s'^2)$  можно принять  $\cos \theta = 1, s = x$ . Для решения краевой задачи (2.1) — (2.6), следуя методу [8], введем в рассмотрение  $M$  поверхностей тока  $y^{(m)}(x)$ , так что  $y^{(m)}(x) = h$  соответствует поверхности струи. Обозначим через  $u_1^{(m)}(x), v_1^{(m)}(x)$  значения составляющих скорости по осям  $x, y$  на этих поверхностях. Тогда имеют место следующие равенства на поверхности с номером  $m$ :

$$(2.8) \quad \frac{du_1^{(m)}}{dx} \equiv \dot{u}_1^{(m)} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^{(m)} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{(m)} \dot{y}^{(m)}$$

$$(2.9) \quad \frac{dy^{(m)}}{dx} \equiv \dot{y}^{(m)} = \frac{v_1^{(m)}(x)}{u_1^{(m)}(x)}$$

Выразив  $\partial u_1 / \partial x$  из первого уравнения (2.8) и подставив в (2.1), получим уравнение для  $u_1^{(m)}(x)$

$$(2.10) \quad \dot{u}_1^{(m)} = \frac{1}{u_1^{(m)}} \left[ \frac{\dot{h}}{We h^2} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{(m)} + \frac{1}{Fr} \right]$$

Из уравнения неразрывности получаем  $M-1$  интегральных соотношений вида

$$\int_{y^{(m)}(x)}^{y^{(m+1)}(x)} y u_1(x, y) dy = A^{(m)}, \quad A^{(m)} = \text{const}$$

Вычисляя эти интегралы по формуле трапеций, дифференцируя получающиеся соотношения по  $x$  и исключая  $\dot{u}_1^{(m)}$  с помощью (2.10), выведем уравнения для  $y^{(m)}(x)$

$$(2.11) \quad \dot{y}^{(1)} = 0, \quad \dot{y}^{(m)} = A_m(x) \frac{B_m(x)}{1 - A_m(x)} + B_m(x)$$

Коэффициенты в правой части (2.11) задаются рекуррентными соотношениями, которые содержат зависимые переменные, со следующими значениями при  $m=1$ , вытекающими из первого уравнения (2.11)

$$A_1 = B_1 = 0$$

Для определения входящих в правую часть (2.10) вязких напряжений необходимо вычислять производные  $\partial u_1 / \partial y$ ,  $\partial^2 u_1 / \partial y^2$ . Аппроксимируем решение с помощью системы функций  $V_\mu(\eta)$ , обладающих свойством полноты и удовлетворяющих следующим однородным граничным условиям на оси и на поверхности струи

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial y} = 0, \quad y=0, \quad y=h(x)$$

$$V_1=1, \quad V_\mu(\eta) = \eta^{2\mu-2} \left( 1 - \frac{\mu-1}{\mu} \eta^2 \right), \quad \eta = \frac{y}{h(x)}$$

$$(2.12) \quad u_1(x, y) = \frac{\tau(x)}{h(x)} y^2 + \sum_{\mu=1}^M \alpha_\mu(x) V_\mu \left[ \frac{y}{h(x)} \right]$$

Коэффициенты  $\alpha_\mu(x)$  подбираются из того условия, что (2.12) совпадает с точным значением решения  $u_1^{(m)}(x)$  на поверхностях  $y^{(m)}(x)$ , рассчитываемых по уравнениям (2.10), (2.11). Определение  $\alpha_\mu$  сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений в последовательных сечениях  $x = \text{const}$ . В начальном сечении  $y^{(m)}(0)$  можно выбрать достаточно произвольно, тогда как  $u_1^{(m)}(0)$  определяются начальным профилем  $U_0(y)$ . Удобно принять

$$(2.13) \quad y^{(m)}(0) = (m-1)/(M-1), \quad u_1^{(m)}(0) = U_{01}[y^{(m)}] \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

Начальный профиль в струе задавался одним из распределений

$$(2.14) \quad U_0(y) = U_* [1 + 2(\epsilon - 1)y^2(1 - 1/2y^2)]$$

$$(2.15) \quad U_0(y) = U_* [\epsilon + (1 - 2\epsilon)(1 - y^2)], \quad U_* = 2u_*$$

В первом случае профиль скоростей имеет точки перегиба и отвечает нулевому касательному напряжению на поверхности струи; во втором — он слабо отличается от параболического профиля Пуазейля, соответствующего течению вязкой жидкости в длинной трубке со среднемассовой скоростью  $u_*$ . Параметр  $\epsilon$  характеризует скорость на поверхности струи в начальном сечении, вводится чтобы избежать деления на нуль в уравнениях (2.10) при  $m=M$ . Таким образом, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.10), (2.11) с начальными условиями (2.13), (2.14) для определения  $u_1^{(m)}(x)$ ,  $y^{(m)}(x)$ . Дополним эту систему уравнением для определения величины касательного напряжения на межфазной поверхности. Вследствие вязкого взаимодействия увлекаются слои внешней среды, прилегающие к поверхности струи. Для определения течения в развивающемся пограничном слое воспользуемся методом интегральных соотношений. Аппроксимируя профиль скоростей в пограничном слое квадратным трехчленом и интегрируя первое уравнение системы (2.2) по  $n$  в пределах  $0 \leq n \leq \delta(x)$ , получим уравнение для определения толщины пограничного слоя

$$(2.16) \quad (2\delta L_{20} + L_{10}) \frac{d\delta}{dx} = \left[ 2\nu_0 \frac{h(x)}{\text{Re } \delta(x)} - \frac{1}{f(x)} (\delta^2 L_2' + \delta L_1' + U_\infty I_0) \right]$$

$$\delta(0) = \delta_0$$

$$L_j = f(x) L_{j0} \quad (j=1, 2), \quad L_{10} = \left( \frac{U_\infty}{3} - \frac{f}{5} \right) h, \quad L_{20} = \frac{U_\infty}{12} - \frac{f}{30}$$

$$f(x) = U_{\infty}(x) - (u_2)_{n=0}, \quad I_0 = \left( \frac{h}{3} + \frac{\delta}{12} \right) \delta f$$

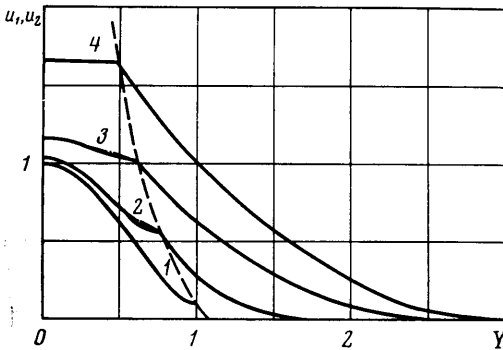
$$(2.17) \quad u_2(x, n) = U_{\infty}(x) - f(x) \left[ 1 - \frac{n}{\delta(x)} \right]^2$$

В формуле (2.16) штрихи обозначают дифференцирование по  $x$ , величина  $\tau(x)$  выражается через  $\delta(x)$  по формуле

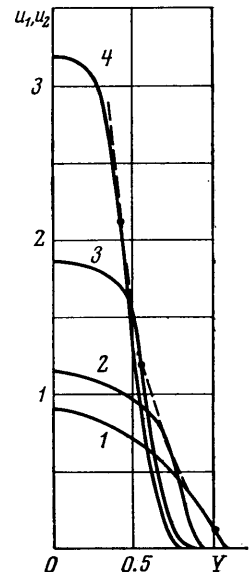
$$(2.18) \quad \tau(x) = \mu_0 f(x) / \delta(x)$$

Система уравнений (2.10), (2.11), (2.16) с соответствующими начальными условиями интегрируется совместно методом Рунге — Кутты.

Примеры расчетов течений вязких струй в затопленном пространстве даются на фиг. 1, 2, где линии 1—4 изображают рассчитанные профили скоростей в сечениях  $x=0, 1.2, 4, 12$  и  $x=0, 1, 4, 12$  соответственно, развивающиеся из начального профиля (2.14) в случае истечения воды в воздух ( $\rho_0=10^{-3}$ ,  $\mu_0=1$ ) при значениях критериев  $Re=100$ ,  $We=100$ ,  $Fr=10$ ,  $\delta_0=0.1$ , а также струи четыреххлористого углерода в неподвижной



Фиг. 1



Фиг. 2

воде ( $\rho_0=0.625$ ,  $\mu_0=1.03$ ) при значениях критериев  $Re=584.5$ ,  $We=1.763$ ,  $Fr=2.180$ . В качестве начального здесь использовался профиль (2.15). Штриховые линии на этих фигурах изображают форму межфазной поверхности; слева от нее показаны профили скоростей в струе, а справа — в среде. В этих расчетах  $\varepsilon=0.1$ . В указанных примерах в струе примерно при  $x=12$  достигаются асимптотические условия течения. Были проведены расчеты течений струи четыреххлористого углерода в воде при значениях критериев  $Re=1100$ ,  $We=15.90$ ,  $Fr=27.65$  и начальном распределении скоростей (2.15) при различных значениях  $\varepsilon$ . Результаты слабо меняются при изменении  $\varepsilon$  в пределах  $0.05 \leq \varepsilon \leq 0.2$ . Для получения хорошей точности достаточно взять  $M=10$ , так как начиная с  $M=7$  результаты расчетов отличаются незначительно.

Штрихпунктирные линии на фиг. 1 изображают аппроксимации рассчитанных профилей, использовавшиеся при исследовании устойчивости.

**3. Устойчивость стационарных течений.** Обратимся теперь к исследованию устойчивости рассчитанных стационарных течений в струе и окружающей среде методом малых возмущений [9]. Представим векторы ско-

ростей, давления в средах, а также уравнение поверхности раздела в следующем виде:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_j(x, y, t) &= u_j^\circ(x, y) + U_j(x, y, t) \\ p_j(x, y, t) &= p_j^\circ(x, y) + P_j(x, y, t) \\ h(x, t) &= h^\circ(x) + H(x, t) \end{aligned}$$

Здесь  $u_j^\circ(x, y)$ ,  $p_j^\circ(x, y)$ ,  $h^\circ(x)$  — стационарное решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.6);  $U_j(x, y, t)$ ,  $P_j(x, y, t)$  ( $j=1, 2$ ),  $H(x, t)$  — малые возмущения, квадратами и произведениями которых можно пренебречь.

Допустим, что при выводе уравнений для возмущений можно пренебречь зависимостью основного течения от продольной координаты  $x$ . Это предположение является обычным при исследовании течений, средние параметры которых медленно изменяются в продольном направлении [9, 10]. Подставляя (3.1) в исходную систему (1.1)–(1.6) и проводя линеаризацию относительно возмущений, получим линейные уравнения, коэффициенты которых зависят только от  $y$ ; входящая в эти коэффициенты переменная  $x$  в силу принятого предположения рассматривается как параметр.

Для решения линеаризованной системы уравнений воспользуемся функцией тока для поля скоростей возмущений

$$U_j = \{U_j, V_j\}, \quad U_j = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \Psi_j), \quad V_j = -\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \quad (j=1, 2)$$

Частные решения полученной системы можно искать в виде бегущих в направлении оси  $x$  со скоростью  $c_r$  волн с длиной  $2\pi\alpha^{-1}$ , амплитуда которых изменяется со временем пропорционально  $\exp(\alpha c_r t)$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Psi_j(x, y, t) &= \Phi_j(y) \exp \xi, \quad P_j(x, y, t) = P^*(y) \exp \xi \\ H(x, t) &= H^* \exp \xi, \quad \xi = i\alpha(x - ct), \quad c = c_r + ic_i \quad (j=1, 2) \end{aligned}$$

Проводя необходимые выкладки с использованием (3.2), получим следующую однородную краевую задачу:

$$(3.3) \quad (u_j - c)(L - \alpha^2) \Phi_j + \left( \frac{u_j'}{y} - u_j'' \right) \Phi_j = \frac{v_j}{v_j i \alpha \operatorname{Re}} (L - \alpha^2)^2 \Phi_j \quad (j=1, 2)$$

$$L = ( )'' + \frac{1}{y} ( )' - \frac{1}{y^2}$$

$$(3.4) \quad [\Phi] = 0, \quad [\Phi' + u'H^*] = 0, \quad [\mu(L\Phi + \alpha^2\Phi + u''H^*)] = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mu}{\mu_1 i \alpha \operatorname{Re}} \left\{ (L\Phi)' + \frac{1}{y} L\Phi - \alpha^2 \left( 3\Phi' + \frac{\Phi}{y} \right) \right\} \right] - \\ & - \left[ \frac{\rho}{\rho_1} \left\{ (u-c) \left( \Phi' + \frac{\Phi}{y} \right) - u'\Phi \right\} \right] = -\frac{1 - \alpha^2 y^2}{\operatorname{We} y^2} H^*, \end{aligned}$$

$$H^* = -\frac{\Phi_1}{u_1 - c}, \quad y = h(x)$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Phi_1 = \Phi_1'' &= 0, \quad y = 0 \\ \Phi_2 \rightarrow 0, \quad y &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

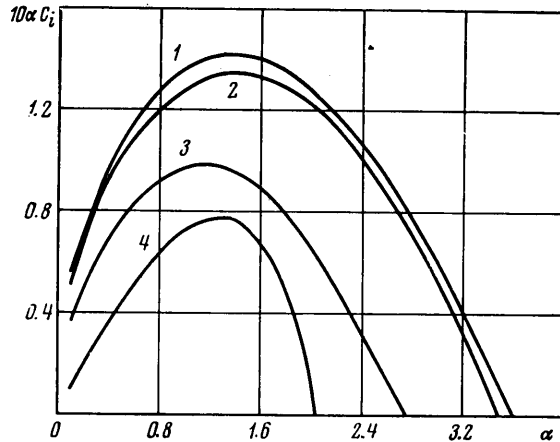
В соотношениях (3.3)–(3.5) штрихом обозначено дифференцирование по  $y$ ,  $u_j(y)$  — локальный профиль скоростей в струе и окружающей среде

( $j=1, 2$ ),  $h(x)$  — локальная толщина струи,  $c$  — собственное число задачи (3.3)–(3.5). Квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины на поверхности струи. Определим  $c$  для конкретных профилей, соответствующих сечениям  $x=\text{const}$ . Тем самым исследуем параметрическую зависимость характеристик устойчивости от  $x$ . Практически расчет основного течения и последующее решение задачи об устойчивости при фиксированных, заранее выбранных  $x=x_c$  были включены в единый вычислительный алгоритм.

Будем искать ненулевое решение задачи (3.3)–(3.5) в виде

$$(3.6) \quad \Phi_1(y) = A_1 \Phi_{I}(y) + A_2 \Phi_{II}(y), \quad \Phi_2(y) = A_3 G_I(y) + A_4 G_{II}(y)$$

Здесь  $A_k$  — произвольные постоянные. Вне пограничного слоя стационарный профиль выходит на постоянное значение и (3.3),  $j=2$ , превраща-



Фиг. 3

ется в уравнение с постоянными коэффициентами. Ограниченные при  $y \rightarrow \infty$  решения этого уравнения имеют вид

$$(3.7) \quad \Phi_2(y) = A_3 K_1(\alpha y) + A_4 K_1(\alpha_* y), \quad \alpha_* = [\alpha^2 + i\alpha \text{Re } v_0^{-1}(U_\infty - c)]^{1/2}$$

Здесь  $K_1$  — модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка.

Используя решение (3.7), получим условия на верхней границе пограничного слоя  $y=Y_*$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} G_I(Y_*) &= K_1(\alpha Y_*), & G_I'(Y_*) &= -[\alpha K_0(\alpha Y_*) + K_1(\alpha Y_*) / Y_*] \\ G_I''(Y_*) &= (\alpha^2 + 1 / Y_*^2) K_1(\alpha Y_*) - G_I'(Y_*) / Y_* \\ G_I'''(Y_*) &= (\alpha^2 + 2 / Y_*^2) G_I'(Y_*) - (G_I'' + 2G_I / Y_*^2) / Y_* \end{aligned}$$

Для  $G_{II}(y)$  условия получаются из (3.8) заменой  $\alpha$  на  $\alpha_*$ . При больших значениях  $|\alpha_*|$  можно упростить эти соотношения с помощью асимптотических формул

$$(3.9) \quad \begin{aligned} G_{II}(Y_*) &= \exp(-\alpha_* Y_*) (\pi / 2\alpha_* Y_*)^{1/2}, & G_{II}'(Y_*) &= -\alpha_* G_{II}(Y_*) \\ G_{II}''(Y_*) &= \alpha_*^2 G_{II}(Y_*), & G_{II}'''(Y_*) &= -\alpha_*^3 G_{II}(Y_*) \end{aligned}$$

Значения  $K_0, K_1$  вычисляются разложением в ряды. Вблизи оси струи уравнение (3.3),  $j=1$ , имеет пару ограниченных решений, допускающих

асимптотические разложения в ряды по  $y$

$$(3.10) \quad \Phi_I(y) = y + y^5 \Phi_5^{(I)} + y^7 \Phi_7^{(I)} + \dots,$$

$$\Phi_{II}(y) = \frac{1}{6} y^3 + y^5 \Phi_5^{(II)} + y^7 \Phi_7^{(II)} + \dots$$

Отсюда можно получить значения  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$  и производных этих функций до третьего порядка в точке  $y=Y_0$  вблизи оси. Функции  $G_{I, II}$  определяются численным интегрированием уравнения (3.3),  $j=2$ , от  $y=Y_*$  до  $y=h$ ; функции  $\Phi_{I, II}$  — численным интегрированием уравнения (3.3),  $j=1$ , от  $y=Y_0$  до  $y=h$ . Начальные значения вычисляются по (3.8) — (3.10).

Невязку граничных условий представим в символическом виде

$$Z_l = Z_l^{(1)} \Phi_1 - Z_l^{(2)} \Phi_2 \quad (l=1, 2, 3, 4)$$

Коэффициенты  $A_k$  ( $k=1, \dots, 4$ ) в формулах (3.6) следует подобрать так, чтобы все  $Z_l$  обращались в нуль

$$(3.11) \quad Z_l = 0$$

Условием существования ненулевых  $A_k$  является обращение в нуль определителя системы (3.11)

$$(3.12) \quad \Delta(c) = 0$$

Вычисление корня уравнения (3.12) сводится к циклическому интегрированию уравнений (3.3) и подбору подходящего значения  $c$  по методу касательных в плоскости комплексного переменного. Условие окончания итераций состоит в выполнении неравенства

$$|dc| < \varepsilon^\circ$$

В расчетах принималось  $Y_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon^\circ = 10^{-4} \div 10^{-6}$ .

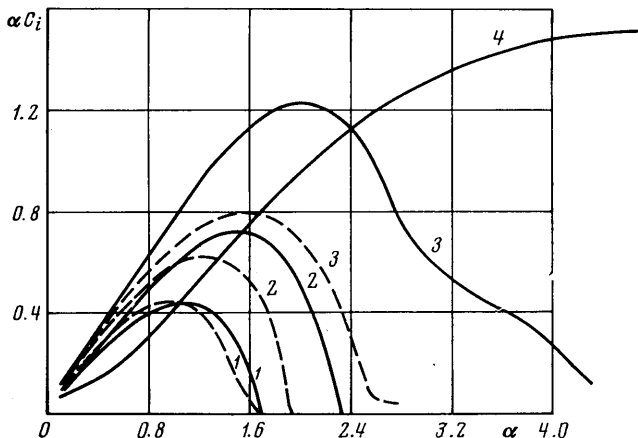
Рассмотрим результаты исследования устойчивости. На фиг. 3 дана зависимость коэффициента нарастания возмущений  $\alpha c_i$  от волнового числа  $\alpha$  для струи воды в воздухе. Линии 1—4 соответствуют профилям скоростей в сечениях  $x=0, 1.2, 4, 12$ , приведенным на фиг. 1. Коэффициент нарастания  $\alpha c_i$  заметно изменяется вдоль развивающейся струи: его значение в сечении вблизи выходного отверстия превышает значение для развившегося профиля скоростей при  $x=12$  почти в 2 раза. При этом длина волны наиболее растущего возмущения почти не изменяется. Чтобы отделить влияние формы профиля от влияния вязкости среды на коэффициент нарастания, были проведены расчеты для свободной струи с тем же профилем скоростей. Результаты расчетов оказываются близки к соответствующим расчетам для полной двухфазной постановки, так что в данном случае прямое влияние вязкости среды на коэффициент нарастания невелико; действие вязкости жидкости проявляется в основном через профиль скоростей в струе, формирующий под ее воздействием. Неустойчивость развивается так же, как в свободной капиллярной струе с заданным профилем скоростей.

Для свободной струи было изучено влияние чисел  $Re$  и  $We$  на коэффициент нарастания. В свободной капиллярной струе с равномерным профилем скоростей, коэффициент нарастания растет с увеличением  $Re$ . Максимальное значение  $\alpha c_i$  растет от  $\alpha c_i = 1.578 \cdot 10^{-3}$  при  $Re=1$  до  $3.409 \cdot 10^{-2}$  при  $Re=3000$ . Наиболее растущими являются соответственно возмущения



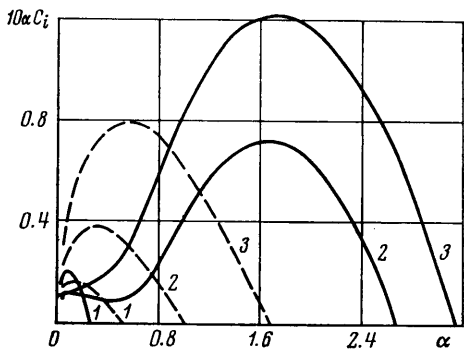
с волновыми числами  $\alpha=0.2$  и  $0.7$ . При  $Re=500$  практически достигается зависимость  $\alpha c_i$  от  $\alpha$  для невязкой струи (решение Рэля [1]). В струе с профилем скоростей (2.14),  $U_1(1)=0.62$ ,  $0 \leq y \leq 1$  коэффициент нарастания длинноволновых возмущений растет с уменьшением  $We$ ; для коротковолновых возмущений этот коэффициент уменьшается, а область неустойчивости сужается. При  $Re=100$ ,  $We=100$  величина  $(\alpha c_i)_{\max}=0.082$ ; при  $We=11.1$  имеем  $(\alpha c_i)_{\max}=0.091$ , если  $We=4$ , то  $(\alpha c_i)_{\max}=0.131$ . Для возмущения с волновым числом  $\alpha=1$  значение  $\alpha c_i=0.082$  при всех  $We$ .

На фиг. 4 дана зависимость коэффициента нарастания возмущений  $\alpha c_i$  от волнового числа  $\alpha$  для струи четыреххлористого углерода в воде, показанной на фиг. 2. Этот случай соответствует сильному взаимодействию



Фиг. 4

струи с окружающей средой, так как здесь  $\mu_0=1.03$ ,  $\rho_0=0.625$ . Кривые 1–3 соответствуют профилям в сечениях  $x=1, 4, 12$  на фиг. 2. Можно видеть, что коэффициент нарастания изменяется вдоль струи в три с лишним раза, причем в противоположность случаю взаимодействия с воздухом



Фиг. 5

здесь он нарастает вдоль струи. В два с лишним раза изменяется также длина волны наиболее растущего возмущения. Пунктирными линиями на фиг. 4 даны результаты расчета коэффициента нарастания для свободной струи с профилями скоростей, соответствующими сечениям  $x=1, 4, 12$  на фиг. 2. Видно, что касательные напряжения на поверхности струи оказывают заметное прямое воздействие на коэффициент нарастания, увеличивая его в 1,5 раза на расстояниях, удаленных от выходного отверстия. В данном случае оба механизма воздействия вязкости на устойчивость являются существенными.

Сильное влияние на развитие возмущений оказывает  $We$ . Линия 4 на фиг. 4 соответствует  $We=10^6$  для профиля скоростей в сечении  $x=12$ . Отсюда видно, что капиллярные силы сильно стабилизируют коротковолновые возмущения. На фиг. 5 представлены результаты исследования устой-

чивости совместного течения струи масла в неподвижной воде ( $\rho_0 = \mu_0 = 1$ ,  $Re = We = 100$ ,  $Fr = 10$ ). Обозначения на фиг. 5, а также результаты аналогичны данным на фиг. 4. Сопоставляя эти серии расчетов, можно видеть влияние сужения струй вследствие ускорения полем массовых сил, а также межфазного натяжения на устойчивость совместного течения.

Поступила 2 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей (Дж. В. Стрэтт). Теория звука, т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1944.
2. Rayleigh (J. W. Strutt). On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. London, Edinburg and Dublin Philos. Mag., 5 Ser., 1892, vol. 34, No. 207.
3. Tomotika S. The instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. Proc. Roy. Soc. London (A), 1935, vol. 150, No. 870.
4. Assenov A., Penchev I., Radev S. Effect of outflow velocity and physico-chemical properties on the stability of a cylindrical jet in a liquid-liquid system. Теор. и прилож. мех., 1977, т. 8, № 1.
5. Лышевский А. С. Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск, Новочеркасск. политехн. ин-т, 1961.
6. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1977.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2. М., Физматгиз, 1963.
8. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Науч. тр. ин-та механ. МГУ, 1973, № 25.
9. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.