

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
БЫСТРОВРАЩАЮЩИХСЯ РАДИАЛЬНЫХ КАНАЛОВ  
ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Е. М. СМЕРНОВ

(Ленинград)

На примере решения задачи о сопротивлении щелеобразного канала показан характер перестройки течения с ростом интенсивности вращения. Определен вид асимптотических формул сопротивления быстровращающихся каналов с конечным отношением сторон при числе Россби порядка единицы. Отмечено хорошее согласование с экспериментальными данными. В конечном виде получено асимптотическое решение, справедливое при малых числах Россби.

1. Несжимаемая вязкая жидкость движется по радиальному каналу прямоугольного поперечного сечения  $2h \times 2L$ , который равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, перпендикулярной стенкам канала шириной  $2L$ . Процесс установился во времени. Рассматривая сечения канала, достаточно удаленные от входа, будем считать движение стабилизированным. Это влечет за собой неизменность распределения составляющих скорости во всех нормальных сечениях канала.

Введем декартову систему координат  $x'y'z'$ , жестко связанную с каналом и ориентированную так, чтобы ось  $y'$  была направлена по оси вращения, ось  $z'$  — параллельно стенкам канала в сторону течения, а начало координат расположено в срединной плоскости канала (фиг. 1). Примем полувысоту канала  $h$  и скорость  $U$ , имеющую порядок среднерасходной, за масштабы изменения длины и скорости в рассматриваемой задаче. Уравнения движения запишем в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{Ro}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial y} \right] &= \frac{E}{2} \Delta \Delta \psi - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{Ro}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha}{2\omega U} + \frac{E}{2} \Delta w + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \alpha &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z'} = -\frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2}{2} [(x')^2 + (z')^2] + D \right\} = \text{const} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ;  $x, y, z$  — безразмерные координаты;  $\psi$  — безразмерная функция тока;  $u, v, w$  — безразмерные проекции вектора скорости соответственно на оси  $x', y', z'$ ;  $Ro = U / \omega h$  — число Россби;  $E = \nu / \omega h^2$  — число Экмана;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность жидкости;  $D$  — потенциал массовых сил;  $\Pi$  — модифицированное давление, в дальнейшем просто давление. Координаты  $x$  и  $y$  меняются в пределах  $(l = L/h) - l \leq x \leq l, -1 \leq y \leq 1$ .

Решение системы (1.1) должно удовлетворять условиям

$$(1.2) \quad w = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm l$$

$$(1.3) \quad w = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = \pm 1$$

Следствием непроницаемости боковых стенок протяженностью  $2h$  является полезное для дальнейшего равенство

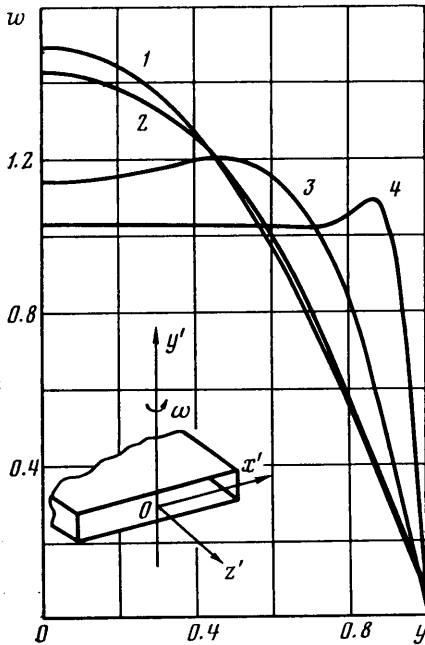
$$(1.4) \quad \int_{-1}^1 u(x, y) dy = 0$$

Нетривиальность решения обеспечивается заданием величины  $Q$  — объемного расхода жидкости через поперечное сечение канала

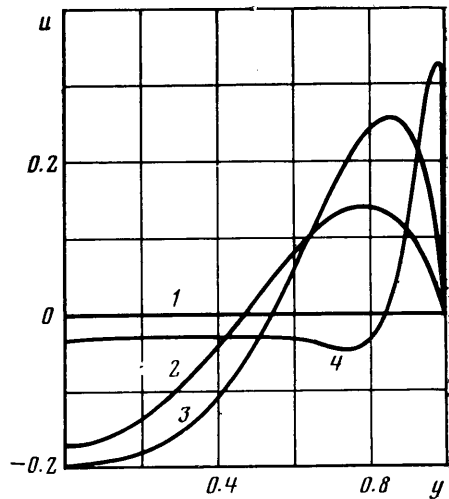
$$(1.5) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w(x, y) dx dy = \frac{Q}{Uh^2}$$

Полагая  $\psi = 0$  в плоскости  $y = 0$  и проводя замену  $\psi \rightarrow -\psi$ ,  $y \rightarrow -y$ , убедимся, что картина течения должна быть симметрична относительно этой плоскости.

2. В простейшем случае щелеобразного канала, когда  $l \gg 1$ , производ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ные по  $x$  в системе (1.1) могут быть опущены везде, кроме областей, прилегающих к боковым стенкам высотой  $2h$ . Вместо граничных условий (1.2) достаточно использовать (1.4). Вводя для сечения  $x = \text{const}$  величину расхода на единицу ширины канала  $q_0$  и выбирая среднюю по высоте скорость  $w_0 = q_0/2h$  в качестве масштаба  $U$ , заменим условие (1.5) на следую-

щее:

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 w(y) dy = 2$$

Легко проверить, что решение системы (1.1) с отброшенными производными по  $x$ , удовлетворяющее условиям (1.3), (1.4), (2.1), может быть записано в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w &= C \{ A [\operatorname{sh}(\gamma y) \sin(\gamma y) - \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma] + \\ &+ B [\operatorname{ch}(\gamma y) \cos(\gamma y) - \operatorname{ch} \gamma \cos \gamma] \} \\ u &= C [\sin 2\gamma - \operatorname{sh} 2\gamma - A \operatorname{ch}(\gamma y) \cos(\gamma y) + B \operatorname{sh}(\gamma y) \sin(\gamma y)] \\ A &= 2(\operatorname{ch} \gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma - 2\gamma \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma) \\ B &= 2(\operatorname{sh} \gamma \cos \gamma + \operatorname{ch} \gamma \sin \gamma - 2\gamma \operatorname{ch} \gamma \cos \gamma) \\ C &= 4\gamma / (A^2 + B^2), \quad \gamma = E^{-1/2} \end{aligned}$$

На фиг. 1, 2 приведены профили компонент  $w$  и  $u$ , рассчитанные по формулам (2.2) для нескольких значений параметра  $\gamma$ . Кривым 1–4 соответствуют значения  $\gamma = 0, 2, 4, 16$ .

Изменение картины течения, проиллюстрированное на фиг. 1 и связанное с развитием вторичных токов, является характерным для быстровращающихся систем. В большей части канала распределение скорости при  $E \ll 1$  неизменно вдоль оси вращения, силы вязкости пренебрежимо малы, а силы Кориолиса уравновешены перепадом давления. Снижение скорости до нуля происходит в тонком слое Экмана, в котором вязкие силы имеют один порядок с кориолисовыми и силами давления. Решение Экмана [1] следует из (2.2) при  $\gamma \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u &= \exp[-\gamma(1 \pm y)] \sin[\gamma(1 \pm y)], \\ w &= 1 - \exp[-\gamma(1 \pm y)] \cos[\gamma(1 \pm y)] \end{aligned}$$

Знаки плюс и минус относятся соответственно к областям потока вблизи  $y = -1$  и  $y = 1$ .

Таким образом, характерная безразмерная толщина слоя, в котором существенны силы вязкости, имеет порядок  $E^{1/2}$  при  $E \ll 1$ . Поскольку в этом слое  $u = O(1)$ , то безразмерная функция тока также порядка  $E^{1/2}$ .

3. Обратимся теперь к случаю, когда  $l$  порядка единицы. Примем, что число  $Ro \ll M$ , где  $M = O(1)$ . На стенках, перпендикулярных оси вращения, толщина слоя, в котором существенна роль вязких членов в (1.1), по-прежнему имеет порядок  $E^{1/2}$  при  $E \ll 1$ . Количество жидкости, переносимой вторичным течением, того же порядка. Введем  $\Phi = \psi / E^{1/2}$  и перейдем к функции  $\Phi = O(1)$  в уравнениях (1.1)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{Ro E}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta \Phi)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta \Phi)}{\partial y} \right] &= \frac{E^{1/2}}{2} \Delta \Delta \Phi - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{Ro}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha}{2\omega U E^{1/2}} + \frac{E^{1/2}}{2} \Delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}$$

При  $E \rightarrow 0$  в области с характерными размерами порядка единицы (очевидно, это будет центральная область) члены с множителем  $E$  в степени выше нулевой могут быть опущены и система (3.1) упрощается

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{Ro_0}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{dw_1}{dx_0} &= \frac{\alpha}{2\omega U E^{1/2}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ x_0 = x/l; \quad Ro_0 = lRo = U/\omega L \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует:

$$\Phi_1 = g_1(x_0)y, u_1 = E^{1/2}g_1, \sigma = \alpha / (2\omega UE^{1/2}) = O(1)$$

в результате чего это уравнение можно записать в виде

$$(3.2) \quad g_1 \left( \frac{Ro_0}{2} \frac{dw_1}{dx_0} - 1 \right) = \sigma$$

Для вывода упрощенных уравнений, описывающих течение вблизи стенок, перпендикулярных оси вращения, введем (рассматривая в силу симметрии течение лишь вблизи стенки  $y = -1$ ) координату  $\eta = (1+y)/E^{1/2}$ .

Переходя к координате  $\eta$  в (3.1) и отбрасывая малые члены, получим

$$(3.3) \quad \frac{Ro_0}{2} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x_0 \partial \eta^2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_0} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial \eta^4} - \frac{\partial w_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{Ro_0}{2} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial w_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_0} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}$$

Граничные условия на стенке прежние

$$(3.4) \quad w_2 = \Phi_2 = \partial \Phi_2 / \partial \eta = 0, \quad \eta = 0$$

на внешней границе слоя граничные условия определяются требованием асимптотического выхода на решение, соответствующее центральной области

$$(3.5) \quad \eta \rightarrow \infty, w_2 \rightarrow w_1(x_0), u_2 = \partial \Phi_2 / \partial \eta \rightarrow$$

$$\rightarrow u_1(x_0), \partial^2 \Phi_2 / \partial \eta^2 \rightarrow 0$$

Так как  $u_2 = O(1)$ , а  $u_1 = O(E^{1/2})$ , то второе из условий (3.5) заменим на следующее:

$$(3.6) \quad \partial \Phi_2 / \partial \eta \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Распишем равенство (1.4) с учетом симметрии потока

$$\int_{y_*}^0 u_1(x_0) dy + \int_{-1}^{y_*} u_2(x_0, y) dy = 0$$

Здесь  $y_* = -1 + O(E^{1/2})$ .

При  $E \rightarrow 0$  получим

$$(3.7) \quad g_1(x_0) = -\Phi_2(x_0, \infty)$$

Начальные профили  $w_2$  и  $u_2$  определяются процессом разворота в области, прилегающей к угловой точке ( $x_0 = 1, y = \pm 1$ ).

При  $E \rightarrow 0$  эти профили по координате  $\eta$  будут стремиться к некоторым асимптотическим. Тогда соотношения (3.2)–(3.7) составят замкнутую систему уравнений и граничных условий, не содержащих величины  $E$ . Значение постоянной  $\sigma$  определяется из условия, чтобы величина, принятая за масштаб скорости, в безразмерной форме равнялась единице. Следовательно,  $\sigma = \sigma(Ro_0)$ . Центральная область при  $E \rightarrow 0$  занимает практически все поперечное сечение канала, распределение скорости  $w$  в ней не зависит от  $E$  и отношение среднерасходной скорости  $W = Q / (4Lh)$  к масштабу  $U$  есть функция лишь параметра  $Ro_0$ .

Вводя коэффициент сопротивления вращающегося канала  $\lambda_* = 4h\alpha / W^2$  и числа  $Re^* = 2hW / \nu$ ,  $Ro^* = W / (\omega L)$ , получим на основании изложенного

асимптотическую формулу

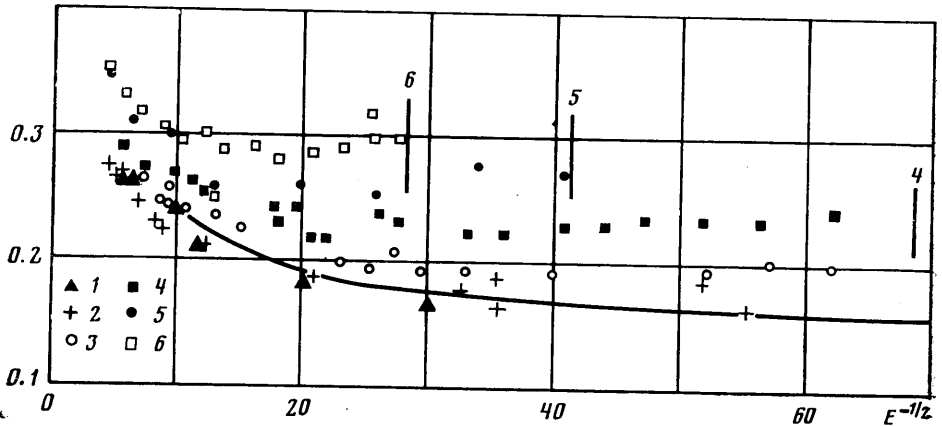
$$\lambda_{\omega} = \frac{8h\omega E^{1/2}\sigma U}{W^2} = \frac{\varphi(\text{Ro}^*)}{\text{Re}^* E^{1/2}}$$

В случае невращающегося канала данного поперечного сечения коэффициент сопротивления  $\lambda_0$  обратно пропорционален  $\text{Re}^*$ , т. е.  $\lambda_0 = S(l)/\text{Re}^*$ , тогда

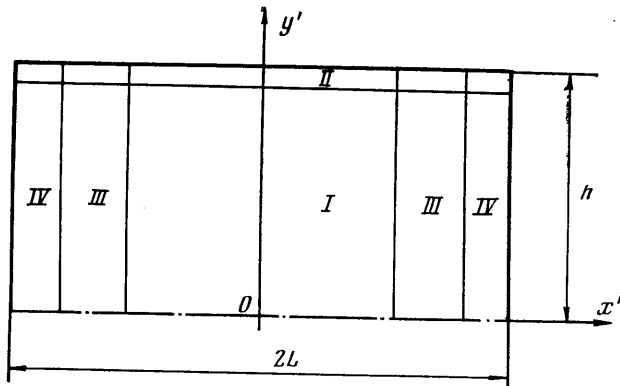
$$(3.8) \quad \lambda_{\omega} E^{1/2} / \lambda_0 = S(l) \varphi(\text{Ro}^*)$$

Экспериментальные данные [2] для канала квадратного сечения ( $l=1$ ), обработанные в соответствии с видом формулы (3.8), представлены

$\lambda_{\omega} E^{1/2} / \lambda_0$



Фиг. 3



Фиг. 4

на фиг. 3. Цифры 1–6 относятся к  $\text{Ro}^* = 0.5, 1, 2, 4, 6.67, 10$ . Вертикальные штрихи отмечают переход к турбулентному режиму движения. Приведенные данные подтверждают справедливость формулы (3.8). Важен для практических расчетов следующий из анализа фиг. 3 вывод о том, что функция  $\varphi$  относительно слабо зависит от  $\text{Ro}^*$ .

4. Для  $\text{Ro} \ll 1$ , когда члены в левой части уравнений (3.1) пренебрежимо малы, рассматриваемая задача линейна. При  $E \ll 1$  можно получить асимптотическое решение в аналитическом виде. Родственные задачи рассматривались в [3–6].

Разобьем сечение канала соответственно характерным областям течения (фиг. 4). Область I — центральное ядро постоянной скорости с размерами порядка единицы, область II — слой Экмана, прилегающий к стенкам, перпендикулярным оси вращения и имеющий толщину порядка  $E^{1/2}$ . На боковых стенках канала, параллельных оси вращения, образуются слои с характерной толщиной порядка  $E^{1/4}$  и  $E^{1/2}$  [5, 6], в которых осуществляется разворот поперечного потока и перенос массы из центрального ядра в слой Экмана. Выбирая значение продольной компоненты скорости в центральной области в качестве масштаба  $U$  и пользуясь методами работ [3, 4], получим асимптотическое решение задачи.

Центральное ядро

$$w = w_1 = 1, \quad \psi = -E^{1/2}y/2 \quad -l + \delta_1 < x < l - \delta_1, \quad -1 + \delta_2 < y < 1 - \delta_2$$

слои на боковых стенках

$$\begin{aligned} w &= w_{3,4} = 1 - \exp(-\xi) + E^{1/4}F(\theta, y) \\ \psi_{3,4} &= E^{1/2} \{ y [\exp(-\xi) - 1] / 2 + E^{1/2}G(\theta, y) \} \\ \xi &= (l \pm x) / E^{1/4}, \quad \theta = (l \pm x) / E^{1/4} \quad (-1 + \delta_2 < y < 1 - \delta_2) \end{aligned}$$

слой Экмана, примыкающий к центральному ядру

$$\begin{aligned} w &= w_2 = 1 - \exp(-\eta) \cos \eta, \quad \psi_2 = \pm E^{1/2} \int_0^\eta \exp(-\eta) \sin \eta d\eta, \\ \eta &= (1 \pm y) / E^{1/2} \quad (-l + \delta_1 < x < l - \delta_1) \end{aligned}$$

слой Экмана в угловых областях

$$\begin{aligned} w &= w_2^* = [1 - \exp(-\xi) + E^{1/4}F(\theta, \pm 1)] [1 - \exp(-\eta) \cos \eta] \\ \psi_2^* &= \pm E^{1/2} [1 - \exp(-\xi) + E^{1/4}F(\theta, \pm 1)] \int_0^\eta \exp(-\eta) \sin \eta d\eta \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_1 = O(E^{1/4})$ ,  $\delta_2 = O(E^{1/2})$ , функции  $F$  и  $G$  определены суммами

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi n} \left\{ \exp(-b_n \theta) - \exp\left(-\frac{b_n \theta}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \theta\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \theta\right) \right] \right\} \cos(n\pi y) \end{aligned}$$

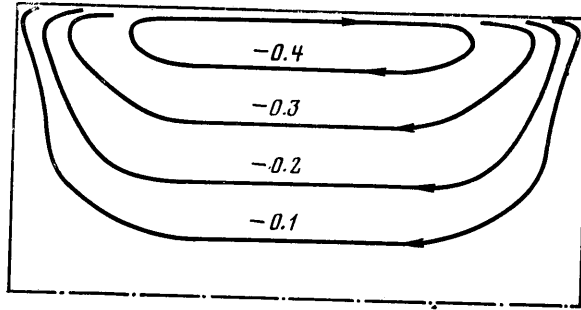
$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi n)^{1/2}} \left\{ -\exp(-b_n \theta) + \exp\left(-\frac{b_n \theta}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \theta\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \theta\right) \right] \right\} \sin(n\pi y) \end{aligned}$$

$$b_n = (2\pi n)^{1/2}$$

Выбор величины продольной компоненты скорости в центральном ядре в качестве масштаба скорости для рассматриваемого случая  $Ro \ll 1$  приводит к значению

$$(4.1) \quad \sigma = \frac{\alpha}{2\omega UE^{1/2}} = \frac{1 + E^{1/2}/2}{2}$$

На фиг. 5 в качестве примера для канала квадратного сечения изображена картина линий тока, полученная при  $E=0.002$  расчетом по приведенным асимптотическим формулам. Числа у кривых соответствуют зна-



Фиг. 5

чениям функции  $\Phi = \psi/E^{1/2}$ . Отметим, что при  $Ro \ll 1$  картина течения симметрична также относительно плоскости  $x=0$ .

Выполним интегрирование в (1.5), учитывая симметрию потока и принятое разбиение его на характерные области, в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{W}{U} &= \frac{1}{4l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w dx dy = 1 + \frac{1}{l} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 (w-1) dx dy = \\ &= 1 + \frac{1}{l} \left[ -E^{1/2} \int_{-1}^0 dy \int_0^{\infty} \exp(-\xi) d\xi + E^{1/2} \int_{-1}^0 dy \int_0^{\infty} F(\theta, y) d\theta - \right. \\ &\quad \left. - E^{1/2} \int_{-1}^0 dx \int_0^{\infty} \exp(-\eta) \cos \eta d\eta + O(E^{1/2}) \right] \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{-1}^0 dy \int_0^{\infty} F(\theta, y) d\theta = 0$$

Проводя остальные вычисления, найдем

$$(4.2) \quad W/U = 1 - E^{1/2}/l - E^{1/2}/2 + O(E^{1/2})/l$$

Используя (4.1), (4.2), получим

$$\lambda_0 = 8 / \{ \text{Re} \cdot E^{1/2} [1 - E^{1/2}/l - E^{1/2} + O(E^{1/2})/l] \}$$

Запишем формулу для коэффициента сопротивления невращающегося канала

$$\lambda_0 = 128 / \text{Re} \cdot \tau(l)$$

$$\tau(l) = f(\kappa), \quad \kappa = l \quad (l \geq 1)$$

$$\tau(l) = f(\kappa) / \kappa, \quad \kappa = 1/l \quad (l \leq 1)$$

Функция  $f(\kappa)$  задана таблицами, например, в [7]. Подчеркнем, что в [7]  $\text{Re}^*$  строится по наименьшей стороне прямоугольного сечения, в то время как в настоящей работе — всегда по размеру стороны, параллельной оси вращения.

Составляя отношение величин  $\lambda_\infty$  и  $\lambda_0$ , найдем

$$(4.3) \quad \frac{\lambda_\infty E^{1/2}}{\lambda_0} = \frac{\tau(l)}{16[1 - E^{1/2}/l - E^{1/2} + O(E^{1/2})/l]}$$

Кривая, полученная при вычислениях по формуле (4.3) для канала квадратного сечения, приведена на фиг. 3. Тот факт, что (4.3) хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до значений  $Ro^*$  порядка единицы, позволяет рекомендовать эту формулу для практических расчетов, особенно применительно к каналам, удлинненным по сечению в плоскости вращения.

Исходя из порядка толщины вязкого слоя на стенках протяженностью  $2h$  следует наложить дополнительное условие на величину  $E$ , при которой справедлива формула (4.3), а именно

$$E^{1/2} \ll l$$

Это существенно уменьшает диапазон допустимых значений параметра  $E$  для каналов, вытянутых в направлении оси вращения.

Поступила 9 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. Dobner E. Über den Strömungswiderstand in einem rotirenden Kanal, Diss., Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1959.
3. Stewartson K. On almost rigid rotations. J. Fluid Mech., 1957, vol. 3, pt 1.
4. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1975.
5. Hocking L. M. Boundary and shear layers in a curved rotating pipe. J. Math. Phys. Sci., 1967, vol. 1, No. 1, 2.
6. Bennetts D. A., Hocking L. M. Pressure - induced flows at low Rossby numbers. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 9.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.