

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ
АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ
ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

К. И. АРТАМОНОВ, А. П. ВОРОБЬЕВ

(Москва)

Рабочий процесс во многих энергетических установках, протекающий с выделением энергии, при определенных условиях является акустически неустойчивым в линейном приближении. Практический интерес представляет задача определения амплитуд неустойчивых волн, устанавливающихся вследствие перекачки энергии от неустойчивой моды к затухающим при их нелинейном взаимодействии. В работе выведены уравнения для установившихся амплитуд плоских акустических колебаний в трехволновом приближении при учете граничных импедансов, нарушающих «внутренний» резонанс возбуждаемых акустических обертонов. Рассмотрение проведено применительно к высокотемпературному тепловыделяющему газу, общие условия устойчивости которого сформулированы в [1], а также рассматривались в [2, 3].

1. Уравнения термогазодинамики при выполнении условий локального термодинамического равновесия и диффузионном описании лучистых тепловых потоков имеют вид [4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla S \right) = \rho \epsilon - Q$$
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad p = \rho R T, \quad S = c_v \ln p \rho^{-\gamma}$$

Здесь $\rho \epsilon$ и Q — тепловыделение и теплоотвод на единицу объема. Влиянием вязкости пренебрегается, так как вязкая диссипация акустических колебаний мала по сравнению с диссипацией лучистой теплопроводностью.

Будет рассматриваться термоакустическая устойчивость тепловыделяющей среды, тепловыделение в которой пропорционально ее плотности ($\epsilon = \text{const}$). Стационарное состояние при $\mathbf{V} = 0$ достигается при равенстве теплоподвода, определяемого объемным тепловыделением, теплоотводу через боковую стенку канала в направлении, перпендикулярном его оси $\rho \epsilon = F(T, \rho)$, где $F(T, \rho)$ — функция, описывающая сток тепла в поперечном направлении.

При рассмотрении колебаний теплоотвод запишем в виде

$$Q = F(T, \rho) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad F = \alpha(T - T_0), \quad \alpha = \text{const}$$

где z — координата вдоль оси канала, λ — коэффициент лучистой теплопроводности. Такое представление теплоотвода при большом отношении длины канала к его диаметру позволяет свести задачу устойчивости к одномерной и учесть диссипацию колебаний теплопроводностью.

Заметим, что рассмотрение других механизмов сброса тепла, разобранных в [3], не представляет принципиальных трудностей и может быть проведено аналогично.

Положим $V=0+V^{(1)}$, $p=p^{(0)}+p^{(1)}$ и т. д., где величины, отмеченные индексом 1, отвечают отклонениям соответствующих параметров от их стационарных значений, отмеченных индексом 0, который далее опустим.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\eta = \frac{p^{(1)}}{\rho a^2}, \quad \delta = \frac{\rho^{(1)}}{\rho}, \quad u = \frac{V^{(1)}}{a}, \quad \theta = \frac{T^{(1)}}{T}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{at}{L}$$

где a — скорость звука в среде, L — длина канала.

Записанная в безразмерной форме система уравнений для колебаний с сохранением нелинейных членов имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} [(1+\delta)u] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{1+\delta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + (1+\gamma\eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \Gamma_1(\delta-\theta) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

$$(1.3) \quad \gamma\eta = \delta + \theta + \delta\theta$$

$$\Gamma_1 = \frac{\varepsilon L}{c_p T a}, \quad \text{Re} = \frac{aL}{\kappa} \quad \left(\kappa = \frac{\lambda}{c_p \rho} \right)$$

При получении уравнения (1.2) считалось, что температура окружающей среды T_0 значительно меньше температуры тепловыделяющего газа T .

Ограничимся квадратичным приближением, т. е. в уравнениях для колебаний сохраним лишь линейные и квадратичные члены. Безразмерные параметры Γ_1 и Re характеризуют подвод энергии к колебаниям и ее диссипацию теплопроводностью, т. е. неконсервативность колебаний. Для многих задач значения этих параметров удовлетворяют условиям $\Gamma_1, 1/\text{Re} \ll 1$.

При выполнении этих условий безразмерные амплитуды колебаний давления много больше амплитуды колебаний энтропии и при вычислении правой части уравнения (1.2) можно использовать так называемое квазиадиабатическое приближение [1].

При принятых допущениях система уравнений (1.1)–(1.3) приводится к виду

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\eta^2 + u^2), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\eta^2 - u^2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma\eta^2 + u^2) + \Gamma \left(1 + \frac{\gamma-1}{\text{Re} \Gamma} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \eta$$

$$\Gamma = (2-\gamma)\Gamma_1 = (2-\gamma) \frac{\varepsilon}{c_p T} \frac{L}{a}$$

из которой следует нелинейное волновое уравнение для колебаний давления

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u^2 - \eta^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (u^2 + \gamma\eta^2) + \Gamma \left(1 + \frac{\gamma-1}{\text{Re} \Gamma} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$$

В этом уравнении первые два слагаемых в правой части характеризуют нелинейность гидродинамической системы, а третий член — неконсервативность колебаний.

2. Для линейной консервативной системы вместо (1.4) имеем обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0$$

Решение этого уравнения в канале конечной длины можно представить в виде суммы стоячих волн

$$(2.1) \quad \eta = \frac{1}{2} \sum \eta_n + K = \frac{1}{2} \sum A_n e^{i\omega_n \tau} \cos(k_n \xi + \varphi_n) + K, \quad \omega_n^2 = k_n^2$$

где A_n — произвольная амплитуда, ω_n — собственная частота моды колебаний с номером n , φ_n — фаза, K означает комплексно-сопряженную часть.

Значения k_n и φ_n определяются из граничных условий линейной задачи. Если торцы канала акустически закрыты (условия $u=0$ при $\xi=0$ и $\xi=1$), то $k_n = n\pi$, $\varphi_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$), при этом значение $n=1$ отвечает основной моде собственных колебаний, $n=2$ — второй моде и т. д., причем частоты этих колебаний образуют гармонический ряд.

Рассмотрим более общие граничные условия, выраженные через импедансы акустических колебаний на торцах [5]. Сохраним граничные условия консервативными (не вносящими раскочки или диссипации в систему), т. е. будем считать импедансы чисто мнимыми величинами. Тогда граничные условия для каждого собственного колебания ($n=1, 2, \dots$) имеют вид

$$(2.2) \quad \left. \frac{\eta_n}{u_n} \right|_{\xi=0} = -iZ_{0n}, \quad \left. \frac{\eta_n}{u_n} \right|_{\xi=1} = iZ_{1n}$$

Отсюда следует:

$$(2.3) \quad k_n = n\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{Z_{0n}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{Z_{1n}}$$

(случай акустически закрытых границ соответствует $Z_{0n}, Z_{1n} \rightarrow \infty$).

Ограничимся рассмотрением случая, когда влияние конечной проводимости торцов не приводит к появлению низкочастотного собственного колебания с $n=0$, и в дальнейшем будем считать, что в канале могут присутствовать собственные колебания со значениями $n=1, 2, \dots$

3. Рассмотрим линейную часть уравнения (1.4) с учетом неконсервативного члена. Подставляя в это уравнение решение в виде (2.1), для каждой моды колебаний получим соотношение

$$(3.1) \quad \omega_n^2 + i\omega_n \Gamma \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\operatorname{Re} \Gamma} k_n^2 \right) - k_n^2 = 0$$

в котором значение волнового числа k_n определяется в (2.3). Из соотношения (3.1) при выполнении $\Gamma, 1/\operatorname{Re} \Gamma \ll 1$ получаем

$$\omega_n \approx \pm k_n - \frac{i\Gamma}{2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\operatorname{Re} \Gamma} k_n^2 \right)$$

из которого следует, что условием термоакустической устойчивости является

$$(3.2) \quad k_n^2 > k_*^2 = \frac{\operatorname{Re} \Gamma}{\gamma - 1}$$

Колебания с волновыми числами $k_n^2 > k_*^2$ будут затухать за счет диссипации теплопроводностью, а с волновыми числами $k_n^2 < k_*^2$ будут неустойчивыми. Значение критического волнового числа (3.2) совпадает со значением, полученным в [2].

4. Нелинейные члены в волновом уравнении (1.4) приводят к взаимодействию различных мод колебаний, что ограничивает амплитуды неустойчивых колебаний.

Будем искать решение полного уравнения (1.4) в виде

$$(4.1) \quad \eta = \frac{1}{2} \sum_n A_n e^{i\omega_n \tau} \cos \chi_n + K, \quad u = -\frac{i}{2} \sum_n A_n e^{i\omega_n \tau} \sin \chi_n + K,$$

$$\omega_n^2 = k_n^2, \quad \chi_n = k_n \xi + \varphi_n$$

причем k_n и φ_n определяются из граничных условий (2.2). Однако будем считать, что комплексные амплитуды A_n являются медленноменяющимися функциями времени τ и координаты ξ

$$\left| \frac{\partial A_n}{\partial \tau} \right| \ll \omega_n |A_n|, \quad \left| \frac{\partial A_n}{\partial \xi} \right| \ll k_n |A_n|$$

Идея решения нелинейного волнового уравнения (1.4) состоит в подстановке выражений (4.1) в это уравнение и приравнении членов левой и правой частей, имеющих одну и ту же временную и пространственную зависимости, так называемых резонансных членов, друг другу.

Используя (4.1), можно показать, что резонансные члены для η^2 и u^2 выражаются одинаково и имеют вид

$$(4.2) \quad \eta_0^2 = u_0^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{m,n} [A_m A_n e^{i(\omega_m + \omega_n)\tau} \cos(\chi_m + \chi_n) + A_m A_n^* e^{i(\omega_m - \omega_n)\tau} \cos(\chi_m - \chi_n)] + K$$

где * — знак комплексной сопряженности. Это обстоятельство позволяет записать уравнение (1.4) в упрощенном виде

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\eta_0^2) + \Gamma \left(1 + \frac{1}{k_*^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + H$$

где H означает нерезонансные члены.

Подставив выражение для η (4.1) в уравнение (4.3) и используя (4.2), получим

$$(4.4) \quad \sum_n \left[i\omega_n \left(\frac{\partial A_n}{\partial \tau} - \alpha_n A_n \right) e^{i\omega_n \tau} \cos \chi_n + k_n \frac{\partial A_n}{\partial \xi} e^{i\omega_n \tau} \sin \chi_n \right] + K =$$

$$= -\frac{\gamma+1}{16} \sum_{m,n} [(\omega_m + \omega_n)^2 A_m A_n e^{i(\omega_m + \omega_n)\tau} \cos(\chi_m + \chi_n) +$$

$$+ (\omega_m - \omega_n)^2 A_m A_n^* e^{i(\omega_m - \omega_n)\tau} \cos(\chi_m - \chi_n)] + K + H$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{k_n^2}{k_*^2} \right)$$

При акустически закрытых торцах $\omega_n = k_n = n\pi$, $\chi_n = n\pi\xi$ и без дальнейших преобразований можно приравнять резонансные члены в (4.4) друг другу. Заметим, что при этом $\partial A_n / \partial \xi = 0$.

Будем интересоваться случаем, когда торцы близки к закрытым. Положим $\omega_n = k_n = n\pi + \delta_n$ ($n=1, 2, \dots$), тогда $\chi_n = n\pi\xi + \varphi_n$, где $\varphi_n = \delta_n\xi + \varphi_n$, причем δ_n и φ_n определяются из условий (2.2).

Из рассмотрения линейной задачи устойчивости следует, что величина коэффициента затухания колебаний для затухающих мод возрастает с номером моды. Поэтому при учете нелинейного взаимодействия ограничимся случаем взаимодействия трех мод колебаний. Приравнявая резонансные члены уравнения (4.4), пропорциональные $\exp(i n \pi \tau) \cos n \pi \xi$ или $\exp(i n \pi \tau) \sin n \pi \xi$, друг другу, получим следующую систему уравнений:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} i\omega_1 \left[\frac{\partial B_1}{\partial \tau} - (\alpha_1 + i\delta_1) B_1 \right] &= -2b_{21} B_1^* B_2 \cos(\psi_2 - 2\psi_1) - \\ &- 2b_{32} B_2^* B_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \\ i\omega_2 \left[\frac{\partial B_2}{\partial \tau} - (\alpha_2 + i\delta_2) B_2 \right] &= -a_{11} B_1^2 \cos(\psi_2 - 2\psi_1) - \\ &- 2b_{31} B_1^* B_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \\ i\omega_3 \left[\frac{\partial B_3}{\partial \tau} - (\alpha_3 + i\delta_3) B_3 \right] &= -2a_{12} B_1 B_2 \cos(\psi_3 - \psi_1 - \psi_2) \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} k_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} &= 2b_{21} B_1^* B_2 \sin(\psi_2 - 2\psi_1) + 2b_{32} B_2^* B_3 \sin(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1) \\ k_2 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} &= a_{11} B_1^2 \sin(2\psi_1 - \psi_2) + 2b_{31} B_1^* B_3 \sin(\psi_3 - \psi_2 - \psi_1) \\ k_3 \frac{\partial B_3}{\partial \xi} &= 2a_{12} B_1 B_2 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \\ B_n &= A_n e^{i\theta_n \tau}, \quad a_{mn} = \frac{\gamma + 1}{16} (\omega_m + \omega_n)^2, \\ b_{mn} &= \frac{\gamma + 1}{16} (\omega_m - \omega_n)^2 \quad (m, n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Считая, что пространственное распределение каждой из трех мод колебаний слабо отличается от пространственного распределения соответствующей гармоники (торцы близки к акустически закрытым), можно пренебречь зависимостью B_n от ξ , поскольку в этом случае правые части в уравнениях (4.6) будут иметь более высокий порядок малости, чем в уравнениях (4.5). Поэтому вместо системы (4.6) будем исследовать систему трех уравнений

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} - (\alpha_1 + i\delta_1) B_1 &= i\beta B_1^* B_2 + i\beta B_2^* B_3, \quad \beta = \frac{(\gamma + 1)\pi}{8} \\ \frac{\partial B_2}{\partial \tau} - (\alpha_2 + i\delta_2) B_2 &= i\beta B_1^2 + 2i\beta B_1^* B_3, \quad \alpha_n \simeq \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{k_*^2} \right) \\ \frac{\partial B_3}{\partial \tau} - (\alpha_3 + i\delta_3) B_3 &= 3i\beta B_1 B_2 \quad (n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

где β — коэффициент, близкий к единице.

Введем в рассмотрение действительные амплитуды и фазы, т. е. положим $B_n = p_n e^{i\theta_n}$ ($n = 1, 2, 3$), где p_n — амплитуда, θ_n — фаза.

Отделяя в уравнениях (4.7) действительные и мнимые части и обозначая сдвиги фаз $\Delta_1 = \theta_2 - 2\theta_1$, $\Delta_2 = \theta_3 - \theta_2 - \theta_1$, получим систему уравнений, описывающую модель нелинейного трехчастотного взаимодействия в квад-

ратичном приближении

$$(4.8) \quad \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = \alpha_1 p_1 - \beta p_1 p_2 \sin \Delta_1 - \beta p_2 p_3 \sin \Delta_2$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} = \alpha_2 p_2 + \beta p_1^2 \sin \Delta_1 - 2\beta p_1 p_2 \sin \Delta_2, \quad \frac{\partial p_3}{\partial \tau} = \alpha_3 p_3 + 3\beta p_1 p_2 \sin \Delta_2$$

$$(4.9) \quad \frac{\partial \Delta_1}{\partial \tau} = \gamma_1 + \beta \left(\frac{p_1^2}{p_2} - 2p_2 \right) \cos \Delta_1 + 2\beta \left(\frac{p_1 p_3}{p_2} - \frac{p_2 p_3}{p_1} \right) \cos \Delta_2$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \tau} = \gamma_2 - \beta \left(\frac{p_1^2}{p_2} + p_2 \right) \cos \Delta_1 + \beta \left(\frac{3p_1 p_2}{p_3} - \frac{2p_1 p_3}{p_2} - \frac{p_2 p_3}{p_1} \right) \cos \Delta_2$$

где $\gamma_1 = \delta_2 - 2\delta_1 = k_2 - 2k_1$; $\gamma_2 = \delta_3 - \delta_2 - \delta_1 = k_3 - k_2 - k_1$, а значения δ_n ($n=1, 2, 3$) определяются из граничных условий.

Если сложить уравнения (4.8) между собой, умножив предварительно каждое из них на p_1, p_2, p_3 соответственно, то получим соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \alpha_3 p_3^2$$

из которого следует, что необходимым условием существования установившихся амплитуд колебаний, отличных от нуля, является наличие хотя бы одной моды, неустойчивой по линейному приближению, и хотя бы одной моды, затухающей в линейном приближении, т. е. хотя бы одна пара из α_n ($n=1, 2, 3$) должна иметь противоположные знаки. Если все $\alpha_n < 0$, то амплитуды $p_n \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Если все $\alpha_n > 0$, то колебания нарастают со временем и квадратичного приближения для нахождения установившихся амплитуд недостаточно.

5. Рассмотрим двухволновое взаимодействие в случае, когда основная мода является неустойчивой по линейному приближению ($\alpha_1 > 0$), а вторая — затухает за счет диссипации теплопроводностью ($\alpha_2 < 0$). Взаимодействие мод колебаний описывается системой

$$(5.1) \quad \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = \alpha_1 p_1 - \beta p_1 p_2 \sin \Delta_1, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \tau} = -|\alpha_2| p_2 + \beta p_1^2 \sin \Delta_1$$

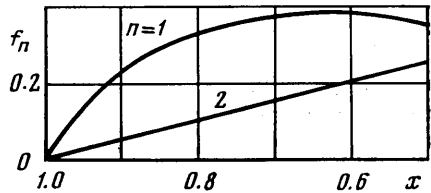
$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \tau} = \gamma_1 + \beta \left(\frac{p_1^2}{p_2} - 2p_2 \right) \cos \Delta_1$$

Эта система аналогична приведенной в работе [6].

Значения установившихся амплитуд находятся из этой системы, если производные по времени положить равными нулю. Значения установившихся амплитуд колебаний записываются в виде

$$(5.2) \quad p_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1 |\alpha_2|}}{\beta \sin \Delta_1}, \quad p_2 = \frac{\alpha_1}{\beta \sin \Delta_1}, \quad \Delta_1 = \arctg \left[\frac{2\alpha_1 - |\alpha_2|}{\gamma_1} \right]$$

При $\gamma_1 = 0$, т. е. когда вторая мода является гармоникой основного тона ($\omega_2 = 2\omega_1$), значения установившихся амплитуд минимальны ($\Delta_1 = \pi/2$).



Фиг. 1

Запишем (5.2) в виде

$$p_1 = \frac{\sqrt{(1-x)(4x-1)}}{2\beta} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma_1}{2x-1}\right)^2}$$

$$p_2 = \frac{1-x}{2\beta} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma_1}{2x-1}\right)^2}, \quad x = \frac{\pi^2}{k_*^2} = \frac{(\gamma-1)\pi^2}{\Gamma \text{Re}}.$$

Полученные установившиеся амплитуды были исследованы на устойчивость по линейному приближению путем возмущения системы (5.1). Исходя из условия устойчивости получено ограничение: $1/2 < x < 1$.

Поведение амплитуд p_1 и p_2 в зависимости от удаления от границы устойчивости в случае $\gamma_1=0$ представлено на фиг. 1 ($f_n = \beta p_n / \Gamma$, $x = \pi^2 / k_*^2$).

Из сравнения амплитуд в случаях, когда торцы обладают конечной проводимостью ($\gamma_1 \neq 0$) и акустически закрыты ($\gamma_1 = 0$), следует

$$\frac{p_n}{p_{n0}} = \sqrt{1+y^2}, \quad y = \mu \frac{x}{2x-1}, \quad \mu = \frac{2}{3} \frac{\gamma_1 \text{Re}}{(\gamma-1)\pi^2}$$

где p_n — амплитуда n -й моды при $\gamma_1 \neq 0$, p_{n0} — амплитуда n -й моды при $\gamma_1 = 0$.

Поскольку $\text{Re} \gg 1$, то коэффициент μ может быть значительно больше единицы даже при малой величине γ_1 . При больших μ величина амплитуды p_n может значительно превышать величину амплитуды при акустически закрытых торцах. Поведение p_n / p_{n0} ($n=1, 2$) в зависимости от удаления от границы устойчивости при различных значениях μ представлено на фиг. 2 ($g_n = p_n / p_{n0}$, $x = (\pi / k_*)^2$).

Как следует из проведенного анализа, существование установившихся амплитуд акустических колебаний является следствием нелинейного гидродинамического взаимодействия основной моды, неустойчивой по линейному приближению, со второй затухающей модой. Установившаяся амплитуда имеет минимальное значение в случае акустически закрытых границ, т. е. когда имеет место наибольшее взаимодействие колебаний между собой.

6. Рассмотрим трехволновое взаимодействие колебаний в случае, когда основная мода является неустойчивой по линейному приближению ($\alpha_1 > 0$), а две другие — затухающие за счет диссипации теплопроводностью ($\alpha_2, \alpha_3 < 0$). Полученные результаты сопоставим со случаем двухволнового взаимодействия. Ограничимся рассмотрением акустически закрытых границ. При этом следует исследовать систему (4.8), (4.9), положив $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Установившиеся амплитуды колебаний определяются из выражений

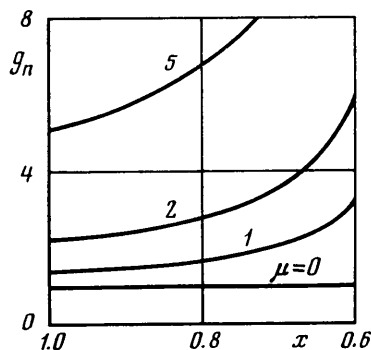
$$(6.1) \quad p_2 = \frac{|\alpha_3|}{6\beta} \left(\sqrt{1 + 12 \frac{\alpha_1}{|\alpha_3|} - 1} \right), \quad p_1^2 = \frac{|\alpha_2| p_2}{\beta (1 - 6\beta p_2 / |\alpha_3|)},$$

$$p_3 = \frac{3\beta p_1 p_2}{|\alpha_3|}$$

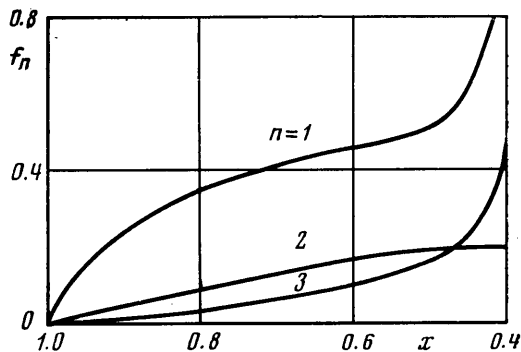
причем сдвиги фаз $\Delta_1 = \Delta_2 = \pi / 2$.

При приближении к границе устойчивости по линейному приближению, т. е. при $x \rightarrow 1$, из (6.1) следует, что амплитуды приближаются к значениям (5.2), полученным в случае двухволнового взаимодействия при акустически закрытых торцах.

Установившиеся амплитуды, определяемые при помощи (6.1), были исследованы на устойчивость по линейному приближению путем возмущения системы (4.8), (4.9) при $\Delta_1 = \Delta_2 = \pi/2$. В результате был получен диапазон допустимых значений x : $5/13 < x < 1$, в котором полученные установившиеся амплитуды устойчивы. Из сравнения диапазонов допустимых значений x следует, что при учете трехволнового взаимодействия выражения для установившихся амплитуд справедливы при большем удалении от границы устойчивости, чем в случае двухволнового взаимодействия.



Фиг. 2



Фиг. 3

Поведение амплитуд p_n ($n=1, 2, 3$), определяемых выражениями (6.1), в зависимости от удаления от границы устойчивости, представлено на фиг. 3 ($f_n = \beta p_n / \Gamma$, $x = \pi^2 / k_*^2$).

Из рассмотрения зависимостей $p_n(x)$ ($n=1, 2$), представленных на фиг. 1 и 3, следует, что значения установившихся амплитуд колебаний в обоих случаях вблизи границы устойчивости (x близко к единице) слабо отличаются друг от друга. Это дает основания ограничиваться при оценке установившихся амплитуд колебаний вблизи границы устойчивости достаточно простым двухволновым взаимодействием.

Поступила 2 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонов К. И. Термоакустическая устойчивость высокотемпературного тепло-выделяющего газа. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3.
2. McNeil H., Becker M. Acoustic instabilities in a constant flux gas core nuclear rocket. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 2. (Рус. перев.: Акустическая неустойчивость газового реактора ядерного ракетного двигателя с постоянным нейтронным потоком. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 2.)
3. Новиков В. М. О гидродинамике делящихся веществ. 2. Нелинейные решения типа простой волны. М., Препринт Ин-та атомной энергии, 1974, № 2380.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Исакович М. А. Общая акустика. М., «Наука», 1973.
6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.