

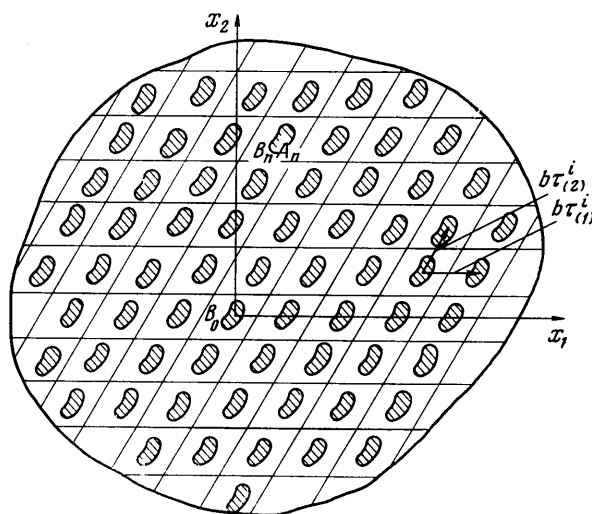
ОБТЕКАНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

А. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ, В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

(Москва)

Рассмотрена задача о потенциальном обтекании периодически расположенных тел. Решение ищется в виде ряда по малому параметру b/l , где b — расстояние между соседними телами, l — характерный макроразмер задачи. Строится замкнутая система уравнений для средних характеристик потока. Получены двусторонние оценки коэффициентов этих уравнений, а при малых объемных концентрациях — точные значения коэффициентов.

1. Постановка задачи. Пусть в некоторой ограниченной области V трехмерного пространства расположено большое число тел A_n одинаковой формы. Центры объемов тел находятся в узлах периодической решетки с периодами $b\tau_{(1)}^i$, $b\tau_{(2)}^i$, $b\tau_{(3)}^i$ (см. фиг. 1); b — максимальный шаг решетки, $\tau_{(1)}^i \tau_{i(1)} = 1$, $\tau_{(2)}^i \tau_{i(2)} \leq 1$, $\tau_{(3)}^i \tau_{i(3)} \leq 1$ (латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3), по повторяющемуся верхнему и нижнему индексам проводится суммирование (используется декартова система координат x^i ,



Фиг. 1

поэтому величины с верхними и нижними индексами совпадают). Объемы и ориентация тел A_n — мало меняющиеся функции координат центров тел (на расстояниях порядка b они меняются на величину порядка b).

Рассмотрим в области $V - \sum A_n$ потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал течения $\Phi(x)$ полностью определя-

ется значением нормальной компоненты скорости жидкости h на границе ∂V области V

$$(1.1) \quad \Delta\Phi(x)=0 \quad \text{в } V-\Sigma A_n, \quad \Phi_{,i}v^i=h \quad \text{на } \partial V, \quad \Phi_{,i}v^i=0 \quad \text{на } \partial A_n$$

Здесь запятой в индексах обозначается дифференцирование по декартовым координатам x^i ; v^i — компоненты вектора единичной нормали на ∂V и ∂A_n , внешней к области, занятой жидкостью.

При $b/l \ll 1$ область V содержит большое число тел A_n , и становится возможным осредненное описание. Требуется построить соответствующие осредненные уравнения.

2. Потенциал течения идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал течения Φ доставляет минимум функционалу [1]

$$(2.1) \quad I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{V-\Sigma A_n} \Phi_{,i} \Phi^{,i} d^3x - \int_{\partial V} \Phi h d^2x$$

Здесь $d^3x \equiv dx^1 dx^2 dx^3$ и d^2x — элементы объема и поверхности. В работе [2] было установлено, что решение задачи (1.1) при $b \rightarrow 0$ имеет вид

$$(2.2) \quad \Phi = \varphi(x) + b\psi(\xi, x)$$

Здесь $\varphi(x)$ — функция, определенная во всей области V , $\xi^k \equiv x^k/b$, функция ψ периодична по ξ^k . Функции φ и ψ не зависят от b . Вместо знака \equiv употребляется знак $=$, если в равенстве отброшены величины более высокого по b порядка по сравнению с выписанными.

Для скорости $\Phi_{,i}$ можно написать

$$(2.3) \quad \Phi_{,i} = \varphi_{,i} + \psi_{,i}, \quad \varphi_i \equiv \varphi_{,i}, \quad \psi_{,i} \equiv \partial\psi/\partial\xi^i$$

Из (2.3) видно, что при вычислении скорости существенны оба члена асимптотического разложения (2.2), в то время как для вычисления потенциала Φ — лишь первый член разложения.

3. Уравнения для среднего потенциала. Уравнения для определения функций φ и ψ можно построить следующим образом [3].

Разобьем область V на одинаковые ячейки B_n . Каждая ячейка является параллелепипедом, натянутым на векторы $b \cdot \tau_{(1)}^i, b \cdot \tau_{(2)}^i, b \cdot \tau_{(3)}^i$. Центры параллелепипедов совпадают с центрами соответствующих тел A_n . Кроме того, рассмотрим стандартную ячейку B , грани которой образованы векторами $\tau_{(1)}^i, \tau_{(2)}^i, \tau_{(3)}^i$. Телам A_n в ячейке B соответствует тело A . Условимся считать, что центр ячейки B_0 находится в начале координат. Тогда, если точка $x \in B_0$, то точка $\xi = x/b \in B$ (фиг. 2). Объемы ячеек B_n и B и тел A_n и A будем обозначать теми же буквами.

Подставим выражение (2.3) в (2.1). Представив интеграл по V , как сумму интегралов по отдельным ячейкам, и отбрасывая малые члены, получим

$$(3.1) \quad I(\Phi) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \int_{B_n - A_n} (\varphi_i \varphi^i + 2\varphi_i \psi^i + \psi_{,i} \psi^{,i}) d^3x \right\} - \int_{\partial V} \Phi h d^2x$$

Выделяя слагаемые, зависящие от ψ , можно переписать равенство (3.1) в виде

$$(3.2) \quad I = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} (B_n - A_n) \varphi_i(x_n) \varphi^i(x_n) + B_n I_{B_n} \right\} - \int_{\partial V} \Phi h d^2x$$

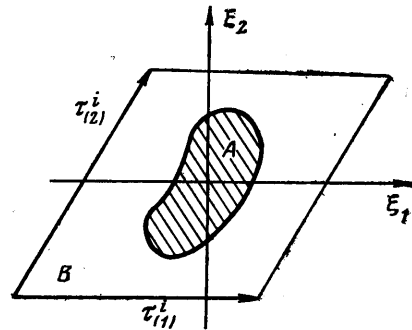
Здесь использовано, что с точностью до малых более высокого порядка по b в каждой ячейке φ_i можно считать постоянными, x_n — узел решетки с номером n (n — целочисленный вектор). Функционал I_B имеет форму

$$(3.3) \quad I_B = \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B-A} \psi_i |\psi|^i d^3 \xi + \int_{\partial A} \psi \varphi_i \nu^i d^2 \xi \right\}$$

Номер ячейки в (3.3) опущен, поскольку равенство (3.3) имеет одинаковую форму во всех ячейках и зависит от номера ячейки только через постоянные $\varphi_i(x_n)$ и объем тела A_n .

Зафиксируем φ и будем минимизировать функционал (3.2) сначала по ψ . В каждой ячейке при этом получится одна и та же задача: найти минимум функционала (3.3) по всем периодическим функциям ψ . Минимальное значение функционала I_B отрицательно и имеет смысл кинетической энергии L жидкости в ячейке, если течение жидкости вызывается поступательным движением периодической решетки тел со скоростью $-\varphi_i$

$$(3.4) \quad \inf I_B = -L(\varphi_i)$$



Фиг. 2

При $b \rightarrow 0$ сумма (3.2) становится интегральной и для осредненного функционала (2.1) можно написать

$$(3.5) \quad I = \int_V \left(\frac{1}{2} (1-c) \varphi_i \varphi^i - L(\varphi_i) \right) d^3 x - \int_{\partial V} \varphi h d^2 x$$

Здесь $c(x)$ — объемная концентрация; $c(x)$ — маломеняющаяся функция x , совпадающая в узлах решетки с отношением объема тела к объему ячейки.

Осредненные уравнения суть уравнения Эйлера функционала (3.5)

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ (1-c) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right\} &= 0 \text{ в } V \\ \nu_i \left\{ (1-c) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right\} &= h \text{ на } \partial V \end{aligned}$$

4. Задача на ячейке. Построение осредненных уравнений свелось к определению функции $L(\varphi_i)$, представляющей собой минимальное значение функционала (3.3). Функция ψ , доставляющая минимум функционалу (3.3), удовлетворяет соотношениям

$$(4.1) \quad \Delta \psi = 0 \text{ в } B-A, \quad \psi_i \nu^i = -\varphi_i \nu^i \text{ на } \partial A$$

На гранях параллелепипеда периодов должны выполняться условия периодичности ψ и ψ_i

$$(4.2) \quad [\psi]_k = 0, \quad [\psi_i]_k = 0$$

Здесь принято обозначение $[F(\xi)]_k = F(\xi^i + \tau_{(k)}^i) - F(\xi^i)$.

Из строгой выпуклости функционала (3.3) и выпуклости множества периодических функций следует, что решение задачи (4.1), (4.2) един-

ственно. Единственность решения следует также из очевидного равенства

$$(4.3) \quad L = \frac{1}{2B} \int_{B-A} \psi_i \psi^i d^3\xi = \frac{1}{2B} \int_{\partial A} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d^2\xi$$

В силу линейности задачи L является квадратичной формой по φ :

$$(4.4) \quad L = {}^{1/2} L^{ij} \varphi_i \varphi_j$$

Коэффициенты квадратичной формы зависят только от геометрии тела A и периодов $\tau_{(s)}^i$. В частном случае, когда геометрии ячейки и тела допускают симметрию куба, как следует из теории тензорных функций, тензор L^{ij} диагональный: $L^{ij} = L_0 \delta^{ij}$.

При помощи соотношений (4.1)–(4.3) легко показать справедливость следующей формулы:

$$(4.5) \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{B} \int_{\partial A} \psi \nu^i d^2\xi$$

Определим среднеобъемную скорость жидкости по формуле

$$v_i(x_n) = \frac{1}{B_n - A_n} \int_{B_n - A_n} \Phi_{,i} d^3x = \varphi_i(x_n) + \frac{b}{B_n - A_n} \int_{\partial A_n} \psi \nu_i d^2x$$

Можно ввести гладкие функции $v^i(x)$, совпадающие в узлах решетки с функциями $v^i(x_n)$ [4]. На основании формулы (4.5) последнему равенству можно придать следующий простой вид:

$$(4.6) \quad v_i = \varphi_i - (1-c)^{-1} \partial L / \partial \varphi^i$$

Соотношение (4.6) дает связь между среднеобъемной скоростью и градиентом среднего потенциала. Из (4.6) видно, что даже при шаровом тензоре L^{ij} за счет зависимости концентрации от координат вектор среднеобъемной скорости может не быть потенциальным. При помощи (4.6) уравнение (3.6) можно записать в форме закона сохранения массы

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [(1-c)v_i] = 0$$

Отметим одну форму соотношения (4.6). Пусть A — сфера радиуса a . Введем функции

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= \int_{\partial A} \left(\frac{1}{|\xi - \xi'|} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi - \xi'|} \right) d^2\xi' \\ \psi_1 &= \int_{\partial B} \left(\frac{1}{|\xi - \xi'|} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi - \xi'|} \right) d^2\xi' \end{aligned}$$

Здесь $|\xi - \xi'| = [(\xi_k - \xi_k')(\xi^k - \xi'^k)]^{1/2}$, ψ_0 — гармоническая функция, аналитическая во всем пространстве переменных ξ^k вне области A , ψ_1 — гармоническая функция, аналитическая в ячейке B .

По основному тождеству для гармонических функций [5] в $B-A$ $\psi = \psi_0 + \psi_1$. Функцию ψ_0 можно разложить в ряд по сферическим гармоникам

$$\psi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a^{i_1 \dots i_k} (|\xi|^{-1})_{|i_1 \dots i_k}, \quad |\xi| \equiv (\xi_k \xi^k)^{1/2}$$

Очевидно, что

$$(4.8) \quad \int_{\partial A} \psi_0 v_i d^2 \xi = a_i \frac{4\pi}{3},$$

$$\int_{\partial A} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial v} + \frac{\partial \psi_i}{\partial v} \right) \xi_k d^2 \xi = \varphi_k \frac{4\pi \beta^3}{3} = -\frac{8\pi}{3} a_k - \frac{4\pi}{3} \beta^3 \psi_{1|k} \quad \beta = 2a/b$$

Из равенства (4.8) следует: $a_k = 1/2 \beta^3 W_k^*$, $W_k^* = -\varphi_k - \psi_{1|k}(0)$. Используя (4.8) и теорему о среднем, для гармонических функций получим

$$(4.9) \quad \int_{\partial A} \psi v_i d^2 \xi = \int_{\partial A} \psi_0 v_i d^2 \xi + \int_{\partial A} \psi_i v_i d^2 \xi = \frac{4\pi}{3} \beta^3 \left(\frac{1}{2} W_i^* - \psi_{1|i}(0) \right)$$

Согласно (4.9) формула (4.6) приобретает вид

$$(4.10) \quad v_i = \varphi_i + c (1/2 W_i^* - \psi_{1|i}(0)) / (1-c)$$

Вектор W_i^* имеет смысл разности скорости частицы $-\varphi_i$ и скорости, индуцированной в центре частицы всеми другими частицами и границей потока.

Из сравнения (4.10) и (4.6) можно установить связь $\psi_{1|i}(0)$ с φ_i

$$(4.11) \quad \psi_{1|i}(0) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \varphi_i \right) = \frac{2}{3} \left(L_i^j - \frac{1}{2} c \delta_i^j \right) c^{-1} \varphi_j$$

Поскольку при $c \rightarrow 0$ тензор $L_i^j \rightarrow \frac{1}{2} c \delta_i^j$, величины $\psi_{1|i}(0)$ имеют порядок малости, больший c .

5. Двойственная задача на ячейке. Решение задачи (4.1), (4.2) даже в простейших случаях может быть получено только путем численного расчета. Однако для построения осредненных уравнений необходимо знать не минимизирующий элемент функционала (3.3) ψ , а только его минимальное значение $-L$. Это позволяет привлечь для построения L метод двусторонних оценок [6, 7].

Задаваясь произвольной периодической функцией ψ_+ и вычисляя соответствующее значение функционала I_B , согласно (3.4) получим оценку $-L$ сверху

$$(5.1) \quad -L(\varphi_i) \leq I_B(\psi_+)$$

Чтобы иметь возможность «столь же просто» строить оценку $-L$ снизу, надо указать функционал J_B такой, что

$$(5.2) \quad \sup_{p_k} J_B = -L(\varphi_i) = \inf_{\psi} I_B$$

Сконструируем функционал J_B следующим образом. При помощи равенства

$$1/2 \psi_i \psi^i = \sup_{p_i} (p^i \psi_i - 1/2 p^i p_i)$$

перепишем вариационную задачу для определения L как минимаксную задачу

$$(5.3) \quad -L = \inf_{\psi \in \Omega} I_B = \inf_{\psi \in \Omega} \sup_{p_i} F(p, \psi)$$

$$F(p, \psi) = \frac{1}{B} \left\{ \int_{B-A} \left(p^i \psi_i - \frac{1}{2} p^i p_i \right) d^3 \xi + \int_{\partial A} \psi \varphi_i v^i d^2 \xi \right\}$$

Через Ω обозначено множество функций ψ , удовлетворяющих первому соотношению (4.2). Для любого функционала $F(p, \psi)$ верно соотношение

$$(5.4) \quad \inf_{\psi} \sup_p F(p, \psi) \geq \sup_p \inf_{\psi} F(p, \psi)$$

Переставим порядок вычисления \sup и \inf в (5.3).

Если p_i — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие равенствам

$$(5.5) \quad p_i^i = 0, \quad [p^i]_{k\nu_i(k)} = 0, \quad p^i \nu_i|_{\partial A} = -\varphi^i \nu_i$$

то функционал J_B равен

$$(5.6) \quad J_B = \inf_{\psi} F(p, \psi) = -\frac{1}{2B} \int_{B-A} p^i p_i d^3 \xi$$

Такой же результат получится для кусочно-гладких функций p_i , которые на некоторой поверхности Γ терпят разрыв, причем $[p_i] \nu_i = 0$ на Γ (прямыми скобками обозначены разность значений p_i на двух сторонах Γ).

Если p_i не удовлетворяет условиям (5.5), то нижняя грань по ψ , очевидно, равна $-\infty$. Поскольку после вычисления нижней грани по ψ надо находить верхнюю грань по p_i , все значения p_i , для которых \inf_{ψ} обращается в $-\infty$, надо отбросить. Таким образом

$$(5.7) \quad \sup_{p_i \in (5.5)} J_B \leq \inf_{\psi \in \Omega} I_B$$

В действительности, в (5.7) имеет место равенство. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять минимизирующий элемент ψ^* функционала I_B и рассмотреть вектор $p_i^* \equiv \dot{\psi}_i^*$. Вектор p_i^* удовлетворяет (5.5) и является, таким образом, допустимым, поэтому

$$(5.8) \quad J_B(p^*) \leq \sup J_B$$

С другой стороны, как легко видеть

$$(5.9) \quad J_B(p^*) = I_B(\psi^*)$$

Из (5.7) — (5.9) следует:

$$(5.10) \quad \sup_{p_i \in (5.5)} J_B = -L = \inf_{\psi \in \Omega} I_B$$

6. Плоская задача. Рассмотрим вопрос о построении осредненных уравнений в плоском случае, считая, что области A_n представляют собой круги радиуса a . Такого рода задачи возникают, например, в расчетах промышленных теплообменников и нефтехимических реакторов, при изучении процессов теплопередачи в системе периодически расположенных длинных труб, обтекаемых идеальной, несжимаемой теплопроводной жидкостью. Функционал I_B принимает форму (латинские индексы i, j, k, \dots в п. 6 принимают значения 1, 2)

$$(6.1) \quad I_B = \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B-A} \psi_i \psi^i d^2 \xi + \int_{\partial A} \psi \varphi^i \nu_i ds \right\}$$

Построим двусторонние оценки для $L(\varphi_i) = 1/2 L_0 \varphi_i \varphi^i$.

Покажем, что для квадратной решетки справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$(6.2) \quad c(1-0.92c) \geq L_0 \geq c(1-c)/(1+c)$$

Для этого возьмем следующую пробную функцию ψ :

$$(6.3) \quad \psi = \operatorname{Re}(\beta^2 m \zeta(z) + m'z), \quad z = x + iy$$

где $\beta = 2a/b$, m и m' — постоянные комплексные числа, $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса.

Условие периодичности ψ приводит к следующему соотношению между постоянными m и m' :

$$(6.4) \quad m' = \beta^2(qm + q'\bar{m}), \quad q = \frac{\delta_1 \bar{\tau}_2 - \delta_2 \bar{\tau}_1}{\tau_2 \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2 \tau_1}, \quad q' = \frac{\delta_1 \bar{\tau}_2 - \delta_2 \bar{\tau}_1}{\tau_2 \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2 \tau_1} = -\frac{\pi}{B}$$

Здесь комплексные числа τ_1 и τ_2 — периоды решетки, чертой отмечается комплексное сопряжение, $\delta_1 = 2\zeta(\tau_1/2)$, $\delta_2 = 2\zeta(\tau_2/2)$, B — площадь ячейки.

Подстановка (6.3) в (6.1) дает оценку $-L$ сверху

$$-L \leq c \operatorname{Re} \left\{ \frac{|m|^2 - |m'|^2}{2} - \frac{|m'|^2}{2} f(\beta) - mW - m'\bar{W} \right\}$$

$$W = -\varphi_1 + i\varphi_2, \quad f(\beta) = \beta^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)}{2^{4k+4}} |g_{k+1}|^2 \beta^{4k} \geq 0$$

Постоянные g_k связаны с коэффициентами разложения $\zeta(z)$ в ряд Тейлора в окрестности 0 и зависят только от τ_1 и τ_2 [8].

Согласно (6.4) для фиксированных τ_1 , τ_2 и W функционал I_B зависит только от параметра m . По m естественно провести минимизацию I_B . Особенно просто выглядит результат для решеток, у которых постоянная q в (6.4) обращается в нуль. К числу таких решеток относятся, в частности, правильные квадратная и треугольная.

Минимум достигается при $m = \bar{W}(1-c)/(1-c^2-f(\beta))$, соответствующая оценка для L_0 имеет вид

$$(6.5) \quad L_0 \geq c \frac{(1-c)^2}{(1-c^2-f(\beta))}$$

Отсюда следует правая часть неравенства (6.2).

Для построения оценки для $-L$ снизу (для L сверху) возьмем в (5.10) в качестве допустимого p_i следующее векторное поле:

$$(6.6) \quad p_i = \begin{cases} \beta^2 \varphi^i (\ln |\xi|)_{,ij}, & \xi \in \Gamma - A \\ -\beta^2 \varphi_i / R_\Gamma^2, & \xi \in B - \Gamma \end{cases}$$

где Γ — максимальный круг радиуса R_Γ , вписанный в ячейку B .

Внутри Γ вектор p_i совпадает со скоростью, вызванной движением в безграничном объеме цилиндра A , вне Γ вектор p_i постоянен. Его значение подбирается из условия непрерывности нормальной составляющей на $\partial\Gamma$.

Подставив функции (6.6) в соотношение (5.10), для L_0 получим

$$(6.7) \quad L_0 \leq c \left(1 + c \left(\frac{B^2}{S_\Gamma^2} - 2 \frac{B}{S_\Gamma} \right) \right)$$

где S_Γ — площадь круга Γ .

Левая часть неравенства (6.2) получается из (6.7) для квадратной решетки.

Из оценки (6.2) видно, что при $c \rightarrow 0$ $L_0 \rightarrow c$ и, таким образом, L_0 совпадает с присоединенной массой круглого цилиндра (отнесенной к площади ячейки и единице длины цилиндра) в бесконечном потоке.

Методом двусторонних оценок можно показать, что этот факт является общим: при $c \rightarrow 0$ L_{ij} переходит в тензор присоединенных масс тела в бесконечном потоке, отнесенный к объему ячейки. Таким образом, при малых концентрациях взаимодействием тел A_n можно пренебречь, а кинетическая энергия жидкости в ячейке B совпадает с кинетической энергией, соответствующей движению цилиндра A в безграничном пространстве.

Влияние коллектива можно охарактеризовать коэффициентом $k(c)$, определяемым для плоской задачи по формуле $L_0 = c(1 - k(c))$. Коэффициент $k(c)$ естественно назвать коэффициентом коллективности. Согласно оценке (6.2) $k(c)$ удовлетворяет соотношению

$$0.92c \leq k(c) \leq 2c/(1+c)$$

Отсюда видно, что коэффициент коллективности положителен. Это означает, что присоединенная масса совокупности тел, отнесенная к одному телу, меньше присоединенной массы уединенного тела.

В качестве приближенного значения L_0 можно взять полусумму правой и левой частей неравенства (6.2). Относительная ошибка при этом не превышает 40% и уменьшается с уменьшением c . В частности, для $c=0.3$ погрешность не превышает 15%, а для $c=0.05$ не больше 3%.

7. Пространственные, периодические, гармонические функции. Для построения в пространственном случае оценок, подобных (6.2), необходимо воспользоваться пространственным аналогом ζ -функции Вейерштрасса. Авторам не удалось найти в литературе сведений о пространственных, периодических, гармонических функциях. Поэтому необходимые факты изложены ниже.

Пусть ξ_n^k — координаты n -го узла периодической решетки (в случае кубической решетки ξ_n^k — компоненты целочисленного вектора).

Рассмотрим функции $P_{ijk}(\xi)$ (аналог функции Вейерштрасса $P'(z)$), задаваемые формулой

$$(7.1) \quad P_{ijk}(\xi) = \sum_n (|\xi - \xi_n|^{-1})_{ijk}$$

Суммирование проводится по всем узлам решетки. Легко показать, что ряд (7.1) сходится равномерно и абсолютно. Кроме того, равномерно и абсолютно сходятся ряды

$$\sum_n (|\xi - \xi_n|^{-1})_{ijkl} \quad \text{и} \quad \sum_n (|\xi - \xi_n|^{-1})_{ijklm}$$

Следовательно, по известной теореме анализа ряд (7.1) можно дважды почленно дифференцировать. Поскольку каждый член ряда (7.1) — функции гармонические, $P_{ijk}(\xi)$ — также гармонические функции. Кроме того, очевидно, что $P_{ijk}(\xi)$ — нечетные периодические функции.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую L , соединяющую точку 0 и точку ξ^k и не проходящую ни через один узел решетки. Построим функции $P_{ij}(\xi)$ по формуле

$$(7.2) \quad P_{ij}(\xi) = \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{ij} + \int_L \left(P_{ijk} - \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{ijk} \right) d\xi^k$$

Пусть \sum_n — сумма по всем узлам решетки, исключая узел $\xi_0^k = 0$. В силу рав-

номерной сходимости ряд (7.1) можно почленно интегрировать. Можно показать, что получающийся ряд будет сходиться также равномерно. Поэтому (7.2) можно переписать в виде

$$(7.3) \quad P_{ij} = \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|ij} + \sum'_n \left(\left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|ij} - \left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|ij} \Big|_{\xi^k=0} \right)$$

Из определения очевидно, что P_{ij} — четные гармонические функции и $P_{ij|k} = P_{i|jk}$. Нетрудно доказать их периодичность. Функции P_{ij} являются аналогом P -функций Вейерштрасса.

Построим аналог ζ -функции Вейерштрасса по формуле

$$(7.4) \quad P_i(\xi) = \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i} + \int_L \left(P_{ij} - \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|ij} \right) d\xi^j$$

Поскольку ряд в (7.3) сходится равномерно, его можно почленно интегрировать. Можно показать также, что получающийся ряд сходится также равномерно

$$(7.5) \quad P_i = \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i} + \sum'_n \left(\left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|i} - \left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|ij} \Big|_{\xi^k=0} \xi^j - \left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|i} \Big|_{\xi^k=0} \right)$$

Очевидно, что функции $P_i(\xi)$ гармонические и нечетные, однако они уже не являются периодическими. При изменении аргумента на величину $\tau_{(s)}^k$, они будут меняться на постоянную величину $\gamma_{i(s)}$

$$(7.6) \quad [P_i(\xi)]_{\xi} = \gamma_{i(s)}$$

В этом легко убедиться, продифференцировав величину $[P_i(\xi)]_s$: $[P_i(\xi)]_{s|j} = [P_{ij}(\xi)]_s = 0$. Численные значения $\gamma_{j(s)}$ можно установить из очевидных равенств $\gamma_{i(s)} = 2P_i(\tau_{(s)}^k/2)$, которые получаются из (7.6) при $\xi^i = 1/2\tau_{(s)}^i$.

Трехмерным аналогом формулы для ζ -функции Вейерштрасса $\delta_2\tau_1 - \delta_1\tau_2 = 2\pi i$ является равенство

$$(7.7) \quad \gamma_{i(s)}\tau^{-1i(s)} = -4\pi \frac{1}{B}$$

Здесь $\tau^{-1i(s)}$ — базис, взаимный к $\tau_{(p)}^i$: $\tau^{-1i(s)}\tau_{i(p)} = \delta_p^s$.

Для доказательства рассмотрим ячейку B и проинтегрируем величину $P_i v_j$ по поверхности параллелепипеда ∂B . Окружив точку 0 малой сферой S радиуса ε , по формуле Стокса, получим

$$(7.8) \quad \int_{\partial B} P_i v_j d^2 \xi = \int_{B-S} P_{ij} d^3 \xi - \int_{\partial S} \frac{\xi_j \xi_i}{|\xi|^4} d^2 \xi + \int_S P_{ij}' d^3 \xi$$

Здесь использовано, что $v_i = -\xi_i/|\xi|$ на ∂S и правильная часть P_i' функций P_i не имеет особенности в S ($P_i' = P_i - (\frac{1}{|\xi|})_{|i}$).

Вычислим интеграл от $P_i v_j$ по ∂B непосредственно, используя, что P_i на противоположных сторонах ∂B меняется на $\gamma_{i(s)}$, а нормаль меняет знак

$$(7.9) \quad \int_{\partial B} P_i v_j d^2 \xi = \sum_{s=1}^3 \int_{\partial B_s^*} \gamma_{i(s)} v_j d^2 \xi$$

где ∂B_s^+ — грань, задаваемая уравнением $\tau^{-1i(s)}\xi_i = 1/2$.

Используя равенства

$$[\tau^{-1k(s)}\xi_k]_l = \tau^{-1k(s)}\tau_{k(l)} = \delta_l^s$$

из (7.9) получим

$$(7.10) \quad \int_{\partial B} P_i v_j d^2 \xi = \int_{\partial B} \gamma_{i(s)} \tau^{-1k(s)} \xi_k v_j d^2 \xi = B \gamma_{i(s)} \tau_j^{-1(s)}$$

Объединяя равенства (7.10) и (7.9), получим

$$(7.11) \quad B\gamma_{i(s)}\tau_j^{-1(s)} = \int_{B-S} P_{ij} d^3\xi + \int_S P_{ij}' d^3\xi - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$$

Таким образом, $\gamma_{i(s)}\tau_j^{-1(s)}$ — симметричный тензор второго ранга. Свертка равенства (7.11) по индексам i, j с учетом того, что $\delta^{ij}P_{ij} = \delta^{ij}P'_{ij} = 0$, дает искомое соотношение (7.7). Отметим, что для решетки, обладающей симметрией куба, любой симметричный тензор второго ранга является шаровым, поэтому

$$(7.12) \quad B\gamma_{i(s)}\tau_j^{-1(s)} = -4\pi\delta_{ij}/3$$

Трехмерным аналогом σ -функции Вейерштрасса является функция

$$(7.13) \quad P(\xi) = |\xi|^{-1} + \int_L P_i' d\xi^i =$$

$$= |\xi|^{-1} + \sum_n' \left\{ \frac{1}{|\xi - \xi_n|} - \frac{1}{|\xi_n|} - \left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|i} \Big|_{\xi^k=0} \xi^i - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\xi - \xi_n|} \right)_{|ij} \Big|_{\xi^k=0} \xi^i \xi^j \right\}$$

Функция $P(\xi)$ является гармоническим потенциалом для P_i : $P_{i; i} = P_i$. При сдвиге на период $P(\xi)$ меняется на линейную функцию

$$(7.14) \quad [P(\xi)]_s = \gamma_{i(s)}(\xi^i + 1/2\tau_{(s)}) = 1/2[\gamma_{i(p)}\tau_j^{-1(p)} \xi^i \xi^j]_s$$

Раскладывая в окрестности точки 0 каждый член ряда (7.13) и переразлагая по степеням ξ (это возможно в силу его равномерной сходимости), получим

$$(7.15) \quad P'(\xi) \equiv P(\xi) - |\xi|^{-1} = P'_{ijkl}(0) \frac{\xi^i \xi^j \xi^k \xi^l}{4!} + P'_{ijklmn}(0) \frac{\xi^i \xi^j \xi^k \xi^l \xi^m \xi^n}{6!} + \dots$$

Здесь использовано, что в силу нечетности $P'_{i_1 \dots i_{2k+1}}(0) = 0$

Введем функцию $f^*(\beta)$ по формуле

$$(7.16) \quad f^*(\beta) = \frac{1}{4\pi} \int_A P_{ij}' P'^{ij} d^3\xi$$

Можно показать, что для $f^*(\beta)$ имеет место формула

$$(7.17) \quad f^*(\beta) = \sum_{k=2}^{\infty} S_k P_{i_1 \dots i_{2k}}(0) P^{i_1 \dots i_{2k}}(0), \quad S_2 = \frac{1}{15 \cdot 14} \beta^7$$

8. Пространственная задача. Пусть тела A_n — сферы радиуса a . Покажем, что для кубической решетки справедлива следующая оценка:

$$(8.1) \quad L_0 \geq c(1-c)/(2+c)$$

Для этого возьмем по аналогии с плоской задачей функцию ψ в виде

$$(8.2) \quad \psi = m^i (P_{|i} - \gamma_{i(s)} \tau^{-1j(s)} \xi_j)$$

Здесь m_i — постоянный вектор.

Согласно равенству (7.6) функция ψ периодическая. Подставив пробную функцию (8.2) в соотношение (3.3) и вычислив минимум получив-

шейся функции от m_i , получим оценку для L_0 снизу

$$(8.3) \quad L_0 \geq c \frac{(1-c)^2}{(1-c)(2+c) - \beta^3 f'(\beta)} \geq c \frac{(1-c)}{(2+c)}, \quad \beta \equiv \frac{2a}{b}, \quad f'(\beta) \geq 0$$

Точное решение задачи (4.1), (4.2) на ячейке можно искать в виде ряда

$$(8.4) \quad \psi = m^i (P_{|i-\gamma_{i(s)}\tau^{-ij(s)}\xi_j}) + m^{ijk} P_{ijk} + \dots$$

Функция

$$\psi = -\varphi^i (P_{|i-\gamma_0\xi_i}) \frac{\beta^3(1-c)^2}{(1-c)(2+c) - \beta^3 f'(\beta)}$$

является приближенным решением задачи на ячейке.

Это решение можно уточнять, добавляя следующие члены ряда (8.4) и находя коэффициенты m^{ijk}, \dots из условия минимума функционала $I_B(\psi)$.

Для получения оценки L_0 сверху подставим в (5.5) следующее допустимое векторное поле:

$$(8.5) \quad p_i = \begin{cases} -\frac{1}{2} \beta^3 \varphi^j \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{ij}, & \xi \in \Gamma - A \\ -\left(\frac{\beta}{R_\Gamma} \right)^3 \varphi_i, & \xi \in B - \Gamma \end{cases}$$

где Γ — максимальный шар радиуса R_Γ и объема V_Γ , вписанный в ячейку B .

После подстановки получим следующую оценку:

$$(8.6) \quad L_0 \leq c \left(\frac{1}{2} + c \left(\frac{B^2}{V_\Gamma^2} - 3B/2V_\Gamma \right) \right)$$

Физический смысл вектора p_i тот же, что и в плоской задаче.

Оценка (8.6) в случае конечных концентраций оказывается достаточно грубой, однако она позволяет заключить, что при $c \rightarrow 0$ асимптотически точным значением L_0 является

$$L_0 = c/2$$

9. Дифференциальное неравенство. Рассмотрим другой способ оценки L в случае, когда A_n — сферы. Для решетки с фиксированными периодами L является функцией только $\beta = 2a/b$. Покажем, что функция $L(\beta)$ удовлетворяет (в пространственном случае) дифференциальному неравенству

$$(9.1) \quad \beta \frac{dL}{d\beta} \geq 4L + \frac{4L^2}{c|W|^2} - \frac{c|W|^2}{2}, \quad |W|^2 = W^i W_i, \quad W_i \equiv -\varphi_i$$

По определению $L(\beta)$

$$(9.2) \quad L(\beta) = \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B-A} \psi_{|i} \psi^{|i} d^3 \xi - \int_{\partial A} \psi W_\nu d^2 \xi \right\}$$

Продифференцируем (9.2) по β . Используем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \frac{1}{2} \int_{B-A} \psi_{|i} \psi^{|i} d^3 \xi &= -\frac{1}{2} \int_{\partial A} \psi_{|i} \psi^{|i} d^2 \xi + \int_{\partial A} W_\nu \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d^2 \xi \\ \frac{d}{d\beta} \int_{\partial A} \psi W_\nu d^2 \xi &= \\ &= \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \int_{S_0} \frac{\psi(r+\Delta\beta, \theta, \mu, \beta+\Delta\beta) (r+\Delta\beta)^2 - \psi(r, \theta, \mu, \beta) r^2}{\Delta\beta} W_\nu \sin \theta d\mu d\theta \end{aligned}$$

где r, θ, μ — сферические координаты, S_0 — поверхность единичной сферы, функция $\psi(\xi, \beta)$ — решение задачи (4.1), (4.2).

Таким образом для $dL/d\beta$ имеем

$$(9.3) \quad \frac{dL}{d\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{B} \int_{\partial A} \psi_i \psi^{li} d^2 \xi + \frac{4L}{\beta} - \frac{c|W|^2}{\beta}$$

Если бы удалось выразить интеграл от $\psi_i \psi^{li}$ через $L(\beta)$, то (9.3) превратилось бы в искомое дифференциальное соотношение. Покажем, что имеет место неравенство

$$(9.4) \quad \frac{1}{B} \int_{\partial A} \psi_i \psi^{li} d^2 \xi \geq \frac{|W|^2 c}{\beta} + \frac{4L^2}{|W|^2 c \beta}$$

Для этого рассмотрим разложение ψ на поверхности сферы в ряд по сферическим гармоникам

$$(9.5) \quad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} B^{i_1 \dots i_k} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 \dots i_k}$$

Очевидно, что на поверхности ∂A функции ψ_i представляется суммой нормального и касательного градиентов

$$\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \nu_i + \frac{\partial \psi}{\partial \tau^i}$$

Следовательно

$$(9.6) \quad \psi_i \psi^{li} = (\psi_\nu)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tau^i} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_i}, \quad \psi_\nu \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$$

Заметим, что

$$(9.7) \quad \frac{\partial}{\partial \tau^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \nu_i \frac{\partial}{\partial \nu} = (\delta_i^j - \nu_i \nu^j) \frac{\partial}{\partial \xi^j}$$

Исходя из разложения (9.5) и (9.7) получим

$$(9.8) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau_j} = \sum_{k=1}^{\infty} B^{i_1 \dots i_k} (\delta^{jl} - \nu^j \nu^l) \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 \dots i_k}$$

Подставим теперь уравнение (9.8) в (9.6) и проинтегрируем по ∂A . Для искомого интеграла получим

$$(9.9) \quad \int_{\partial A} \psi_i \psi^{li} d^2 \xi = \int_{\partial A} W_\nu^2 d^2 \xi + \\ + \sum_{k,l=1}^{\infty} B^{i_1 \dots i_k} B^{j_1 \dots j_l} \int_{\partial A} (\delta_m^s - \nu_m \nu^s) (\delta^{mq} - \nu^m \nu^q) \times \\ \times \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 \dots i_k} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|j_1 \dots j_l} d^2 \xi$$

Отметим равенство

$$(9.10) \quad v^{i_1} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 \dots i_k} = -\frac{k}{\beta} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_2 \dots i_k}, \quad |\xi| = \beta$$

Из равенства (9.10) и свойства ортогональности сферических гармоник следует, что ряд (9.9) содержит только те члены, у которых $k=l$. Поэтому каждый член суммы (9.9) не отрицателен. Оставляя в уравнении (9.9) первый член ряда, получим

$$(9.11) \quad \int_{\partial A} \psi_{|i} \psi^{i_1} d^2 \xi \geq \int_{\partial A} W_{\nu}^2 d^2 \xi + B^i B^j \int_{\partial A} (\delta^{pq} - \nu^p \nu^q) \times \\ \times \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 p} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_2 q} d^2 \xi = \frac{4\pi\beta^2}{3} |W|^2 + \frac{8}{3} \pi B^i B_i / \beta^4$$

С другой стороны

$$(9.12) \quad 2L = \frac{1}{B} \int_{\partial A} \psi W_{\nu} d^2 \xi = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} W^j B^{i_1 \dots i_k} \int_{\partial A} v_j \left(\frac{1}{|\xi|} \right)_{|i_1 \dots i_k} d^2 \xi = \\ = \frac{4\pi W^i B_i}{B}$$

Подставляя соотношение (9.12) в (9.11), получим неравенство (9.4). При $c \rightarrow 0$ неравенство (9.4) переходит в асимптотическое равенство. Подставив (9.4) в (9.3), получим искомое дифференциальное неравенство (9.1).

Легко указать решение неравенства (9.1). После замены $c = 4\pi\beta^3/3$ и $L = c|W|^2(1-k(c))/4$, где $k(c)$ — коэффициент коллективности, неравенство (9.1) принимает форму

$$\frac{d}{dc} \ln \frac{k(c)}{(3-k(c))c} \leq 0$$

Это означает, что $k(c)$ имеет вид

$$(9.13) \quad k(c) = \frac{3c}{[c+g(c)]}$$

где $g(c)$ — монотонная, неубывающая, положительная функция.

Из равенства (9.13) в силу монотонности $g(c)$ следует двусторонняя оценка

$$(9.14) \quad \frac{3c}{[c+g(c_2)]} \leq k(c) \leq \frac{3c}{[c+g(c_1)]}, \quad c_1 \leq c \leq c_2$$

В плоском случае неравенство, аналогичное (9.1), имеет вид

$$(9.15) \quad 2c \frac{dL}{dc} \geq 2L + \frac{2L^2}{|W|^2 c} - \frac{|W|^2 c}{2}$$

Полагая $L = |W|^2 c(1-k(c))/2$, аналогично (9.14) получим

$$(9.16) \quad \frac{2c}{[c+g(c_2)]} \leq k(c) \leq \frac{2c}{[g(c_1)+c]}, \quad c_1 \leq c \leq c_2$$

10. Оценка тензора L_{ij} для тел произвольной формы. Докажем неравенство, являющееся обобщением неравенства Поля на периодические

решетки

$$(10.1) \quad L_i^i/3 \geq c(1-c)/(2+c)$$

Для доказательства возьмем пробную функцию ψ в виде ¹

$$(10.2) \quad \psi = m^i \lambda_{|i}, \quad \lambda = \int_A \left(P(\xi - \eta) - \frac{1}{2} \gamma_{i(e)} \tau_j^{-1(e)} (\xi^i - \eta^i) (\xi^j - \eta^j) \right) d^3 \eta$$

где $P(\xi)$ определяется равенством (7.13), ξ изменяется в области $B-A$, η в A .

Учитывая, что функция (10.2) периодическая и гармоническая (периодичность следует из равенства (7.14)), выражение (3.3) можно записать следующим образом:

$$(10.3) \quad I_B(\psi) = \frac{1}{B} \int_{\partial A_e} \psi \left(\varphi_i + \frac{1}{2} \psi_{|i} \right) v^i d^2 \xi$$

Здесь индекс e подчеркивает, что в интеграле (10.3) берутся предельные значения величин при подходе к ∂A со стороны жидкости.

Перейдем от интегрирования по ∂A_e к интегрированию по области A . При этом надо учесть, что функция $\psi = m^i \lambda_{|i}$ при переходе через ∂A непрерывна, а $\psi_{|i}$ терпит разрыв и

$$(10.4) \quad \psi_{|i} |_{(e)} - \psi_{|i} |_{(i)} = 4\pi v_i v^j m_j$$

Заменяя в (10.3) предельные значения функций со стороны жидкости на предельные значения функций со стороны тела A при помощи (10.4) и используя формулу Стокса, получим

$$(10.5) \quad -I_B(\psi) = \frac{1}{B} \int_A \left(\psi_{|i} \varphi^i + 2\pi \psi_{|i} m^i + \frac{1}{2} \psi_{|i} \psi^i \right) d^3 \xi$$

Уменьшим последнее слагаемое на основании неравенства Коши — Буняковского

$$(10.6) \quad \frac{1}{A} \int_A \psi_{|i} d^2 \xi \int_A \psi^i d^3 \xi \leq \int_A \psi_{|i} \psi^i d^3 \xi$$

Вводя обозначение

$$G_{ij} = -\frac{1}{A} \int_A \lambda_{|ij} d^3 \xi$$

для кинетической энергии L получим оценку

$$(10.7) \quad L \geq c \left\{ -G_{ij} m^i \varphi^i - \frac{1}{2} (4\pi G_{ij} - G_{ih} G_j^h) m^i m^j \right\}.$$

Отметим, что G_{ij} — симметричная матрица, следовательно, существует система координат, в которой она диагональна. В этой системе координат

¹ Здесь используется подход, примененный для доказательства гипотезы Поля в [9]. К сожалению, авторам при подготовке к публикации работы [9] не были известны работы Шиффера [10, 11], в которых было получено доказательство гипотезы Поля.

максимум правой части (10.7) достигается при

$$m^i = -\varphi^i / (4\pi - G_i), \quad G_i \equiv G_{ii}$$

Таким образом, получим

$$(10.8) \quad L \geq c \left\{ \frac{G_1}{4\pi - G_1} \varphi_1^2 + \frac{G_2}{4\pi - G_2} \varphi_2^2 + \frac{G_3}{4\pi - G_3} \varphi_3^2 \right\} \equiv \frac{1}{2} H_{ij} \varphi^i \varphi^j$$

Отметим следующее свойство матрицы G_{ij} :

$$(10.9) \quad G_i^i = 4\pi(1-c)$$

Действительно

$$\Delta \lambda = \int_A (\Delta P'(\xi - \eta) - \gamma_{i(s)} \tau^{-1i(s)}) d^3 \eta + \Delta \int_A \frac{d^3 \eta}{|\xi - \eta|}$$

но $\Delta P'(\xi) = 0$, а $\gamma_{i(s)} \tau^{-1i(s)} = -4\pi/B$. Кроме того

$$\Delta \int_A \frac{d^3 \eta}{|\xi - \eta|} = -4\pi$$

Отсюда $\Delta \lambda = -4\pi(1-c)$, что и доказывает утверждение (10.9).

Для доказательства (10.1) осталось показать, что

$$(10.10) \quad H_i^i \geq G_i^i \left/ \left[\frac{4\pi(2+c)}{3c} \right] \right.$$

В этом легко убедиться, рассматривая минимум выпуклой по G_i функции $G_1/(4\pi - G_1) + G_2/(4\pi - G_2) + G_3/(4\pi - G_3)$ при ограничении $G_1 + G_2 + G_3 = 4\pi(1-c)$.

11. Обобщение. Метод, изложенный в работе [4], позволяет убедиться, что асимптотическое разложение (2.2) справедливо также в более общем случае, когда телам A_n мгновенно сообщены поступательные скорости $u_i(x_n)$ и угловые скорости $\omega_i(x_n)$, имеющие асимптотические средние $u_i(x)$ и $\omega_i(x)$ [4].

В этом случае уравнения (3.5), (3.6), (3.3), (4.1), (4.2), (4.4), (4.6), (4.7) заменяются соответственно на уравнения

$$I = \frac{1}{2} \int_V \{ (1-c) \varphi_i \varphi^i + 2cu^i \varphi_i - 2L(w_i, \omega_i) \} d^3 x - \int_{\partial V} \varphi h d^2 x, \quad w_i \equiv u_i - \varphi_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left((1-c) \varphi_i + cu_i + \frac{\partial L}{\partial w^i} \right) = 0 \quad \text{в } V$$

$$v^i \left((1-c) \varphi_i + cu_i + \frac{\partial L}{\partial w^i} \right) = h \quad \text{на } \partial V$$

$$I_B = \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} \int_{B-A} \psi_{|i} \psi^{|i} d^3 \xi - \int_{\partial A} \psi(w_i + b e_{ijk} \omega^j \xi^k) v^i d^2 \xi \right\}$$

$$\Delta \psi = 0 \quad \text{в } B-A, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = w_v + b e_{ijk} v^i \omega^j \xi^k \quad \text{на } \partial A$$

$$[\psi]_k = 0, \quad [\psi_{|i}]_k = 0$$

$$2L \equiv L^{ij} w_i w_j + J^{ij} \omega_i \omega_j + R^{ij} w_i \omega_j$$

$$v_i \equiv \varphi_i + (1-c)^{-1} \partial L / \partial w^i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} ((1-c) v_i + cu_i) = 0$$

Приведем, кроме того, выражение для кинетической энергии K движения жидкости в области $B_n - A_n$

$$K \equiv \frac{1}{2B_n} \int_{B_n - A_n} (\varphi_i + \psi_{|i}) (\varphi^i + \psi^{|i}) d^3x = \\ = \frac{1}{2}(1-c)v^i v_i + \frac{1}{2}(1-c)M_{ij}(u^i - v^i)(u^j - v^j) + \frac{1}{2}J_{ij}\omega^i \omega^j$$

Здесь M_{ij} — тензор, определяемый из системы линейных уравнений

$$(M_{ik} + \delta_{ik})((1-c)\delta^{kj} - L^{kj}) = (1-c)\delta_i^j$$

Поступила 22 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Бахвалов Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
3. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур. Докл. АН СССР, 1975, т. 222, № 3.
4. Бердичевский В. Л. Об осреднении периодических структур. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. т. 1, 2. «Наука», 1973.
6. Synge J. L. The hypercycle in mathematical physics. Cambridge Univ. Press., 1957.
7. Бердичевский В. Л. Об одном вариационном принципе. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6.
8. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
9. Бердичевский А. Л., Бердичевский В. Л. Доказательство гипотезы Поляна. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 2.
10. Schiffer M., Sur les rapports entre les solutions des problemes intérieurs et celles des problemes extérieurs. C. R. Acad. Sci., Paris, 1957, vol. 244, No. 22.
11. Schiffer M. Sur la polarisation et la masse virtuelle. C. R. Acad. Sci., Paris, 1975, vol. 244, No. 26.