

О ВЛИЯНИИ РАСТВОРИМЫХ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКИХ ПЛЕНОК И СТРУЙ

Л. М. РАБИНОВИЧ

(Москва)

Влияние веществ, изменяющих поверхностное натяжение на границе раздела двух сплошных сред, на гидродинамическую устойчивость систем типа жидкость — жидкость или жидкость — газ, в частности их гасящее действие на малые волновые деформации межфазовой поверхности или увеличение скорости распада жидких струй, является одной из важных задач капиллярной гидродинамики, тесно связанной с проблемами химической технологии и теории горения жидких топлив. Это влияние на движение жидкости обусловлено изменением граничных условий на ее поверхности за счет дополнительных касательных напряжений, связанных с градиентом поверхностного натяжения (эффект Марангони [1]). Эти напряжения могут привести к существенному изменению поля скорости вблизи поверхности и благодаря вязкости во всем объеме жидкости, что, в свою очередь, влияет на процесс конвективной диффузии и на распределение указанных веществ на поверхности, а следовательно, и на градиент поверхностного натяжения. Ниже как поверхностно-активные вещества, понижающие поверхностное натяжение [2], так и инактивные, повышающие его, будем называть «поверхностно-активными» (ПАВ), конкретизируя их в случае необходимости.

Практическое значение рассматриваемого эффекта связано с возможностью сочетать регулирование устойчивости гидродинамических систем с искусственной интенсификацией процессов сгорания или массопереноса в целом ряде реакторов химической технологии.

Наиболее подробные обзоры исследований, проведенных ранее в данной области, представлены в статьях [3–6]. В работе [7] были получены предварительные качественные зависимости между коэффициентами затухания малых возмущений системы и ее физико-химическими параметрами на примере идеализированной модели поверхности жидкой пленки неустойчивости при капиллярной конвекции на строго плоской поверхности жидкой пленки.

Ниже учитывается существование капиллярных давлений при малых деформациях поверхности и градиентов поверхностного натяжения при наличии в системе поверхностного и объемного растворов ПАВ, находящихся между собой в состоянии статистического равновесия, т. е. время релаксации для равновесия между ними мало по сравнению с периодом капиллярно-волновых возмущений. Массообмен между этими растворами осуществляется за счет процессов растворения, что особенно характерно для неорганических ПАВ и диффузии их из объемной фазы к поверхности. Отметим, что малые деформации поверхности, изменяя значения градиента поверхностного натяжения за счет перераспределения ПАВ, не будут влиять на изменение самого поверхностного натяжения, если предположить, что это изменение при сжатии или растяжении поверхности будет почти мгновенным и время релаксации для установления исходного значения поверхностного натяжения мало по сравнению с периодом деформаций за счет быстрой переориентации молекул поверхностного слоя.

В данной работе поставлена следующая задача: получить дисперсионные соотношения между коэффициентом затухания и длиной волны капиллярных возмущений с малой амплитудой, что позволяет сделать ряд качественных выводов относительно линейной устойчивости жидких пленок и струй. При этом предполагается, что на поверхности пленки и струи идет гетерогенная химическая реакция, которая наряду с гомогенной в общем случае сопровождается массообменом, и пренебрегается влиянием окружающей газовой среды и гравитационных сил на развитие возмущений.

1. В качестве исследуемых моделей выбраны жидкая пленка, ламинарно стекающая по твердой пластине (при этом скорость газового потока,

контактирующего с ее поверхностью, достаточно мала для сохранения ламинарного режима движения пленки), и цилиндрическая струя жидкости, истекающая из круглого отверстия с малой скоростью по отношению к окружающему газу. В таком случае распад пленки и струи возможен под действием капиллярных сил без учета влияния динамического воздействия газа, в котором происходит движение жидкости. На невозмущенных поверхностях пленки и струи и в их объеме имеет место равновесное распределение ПАВ со стационарными концентрациями. Массообмен растворенных ПАВ сопровождается поверхностной мономолекулярной химической реакцией $A_1 \rightarrow A_2$, которая удовлетворяет следующим условиям: реагент A_1 химически пассивен внутри жидкости, продукт реакции A_2 химически пассивен и отводится с поверхности из жидкой фазы, реакция необратима и ее скорость сравнима с быстротой транспорта реагирующего вещества.

Исследование устойчивости движения жидкости при малых деформациях ее поверхности математически представляет собой решение двумерной линеаризованной задачи устойчивости относительно бесконечно малых возмущений скорости гидродинамического потока и концентрации растворимых ПАВ, разложенных в ряд Фурье вдоль пленки и оси струи с амплитудой, зависящей от поперечной или радиальной координаты. Заметим, что интерес представляют именно осесимметричные возмущения струи, поскольку из линейной теории Рэлея [8] следует, что только они могут оказаться неустойчивыми.

2. Уравнения движения жидкости и диффузии растворимых ПАВ записываются для пленки в координатной плоскости (x, y) , где x отсчитывается вдоль ее поверхности по направлению течения невозмущенного потока, а ось y направлена по нормали к поверхности в глубь жидкости. Для струи в силу симметрии задачи выбраны цилиндрические координаты (z, r) , где ось z совпадает с осью симметрии струи, r направлена по ее радиусу; вращательная компонента скорости отсутствует, так как нет движения вокруг оси z .

Решение уравнений Навье — Стокса представим в виде

$$u_x = U + u_x^{(1)}, \quad u_y = u_y^{(1)}, \quad v_z = V + v_z^{(1)}, \quad v_r = v_r^{(1)}$$

где U — скорость течения на поверхности невозмущенной пленки (выбор этой величины, определяющей стационарное движение пленки, пояснен ниже), V — скорость истечения струи из сопла, $u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, v_z^{(1)}, v_r^{(1)}$ — малые возмущения скорости пленки и струи соответственно. Переходя к функциям тока, линеаризованные уравнения движения запишем в виде

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + w_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \Lambda_j \xi_j = \nu \Lambda_j^2 \xi_j, \quad (j=1, 2)$$

$$u_x^{(1)} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad u_y^{(1)} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad v_z^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}$$

$$v_r^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости, $\theta_1 = x$, $\theta_2 = z$, t — время, $w_1 = U$, $w_2 = V$, $\xi_1 = \chi$, $\xi_2 = \psi$, φ определяет невихревую часть решения для струи, Λ_1 — оператор Лапласа в декартовых координатах, Λ_2 — оператор

Стокса в цилиндрических. Решения уравнений (2.1), сохраняющие конечное значение вдали от поверхности пленки и на оси струи, имеют вид следующих периодических функций продольных координат и времени:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \chi &= W_1 + W_2, \quad \varphi = b_1 I_0(k_2 r) E, \quad \psi_1 = b_2 r I_1(\gamma_2 r) E \\ W_1 &= a_1 \exp[i(\omega_1 t + k_1 x) - k_1 y], \quad W_2 = a_2 \exp[i(\omega_1 t + k_1 x) - \gamma_1 y] \\ E &= \exp[i(\omega_2 t + k_2 z)], \quad \gamma_1^2 = k_1^2 + i(\omega_1 + U k_1) \nu^{-1}, \quad \gamma_2^2 = \\ &= k_2^2 + i(\omega_2 + V k_2) \nu^{-1} \end{aligned}$$

где $\omega_1, \omega_2, k_1, k_2$ — соответствующие комплексные частоты колебаний и действительные волновые числа возмущений, I_0, I_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядков, a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные, определяемые из граничных условий. Из (2.2) следует:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_x^{(1)} &= -k_1 W_1 - \gamma_1 W_2, \quad u_y^{(1)} = -i k_1 \chi \\ v_z^{(1)} &= i k_2 \varphi - [1 + r \gamma_2 I_1'(\gamma_2 r) / I_1(\gamma_2 r)] r^{-2} \psi_1 \\ v_r^{(1)} &= k_2 [I_1(k_2 r) / I_0(k_2 r)] \varphi + i k_2 r^{-1} \psi_1 \\ p_1 &= \rho(\omega_1 + U k_1) W_1, \quad p_2 = -i \rho(\omega_2 + V k_2) \varphi \end{aligned}$$

где ρ — плотность, p_1, p_2 — распределения возмущений давления в пленке и струе. Выбор начала отсчета позволяет положить константы в выражениях для давлений равными нулю.

Далее найдем нестационарные распределения концентрации растворенных ПАВ внутри жидкости. Предположение о существовании в пленке тонкого слоя, прилегающего к поверхности, в котором происходит основное изменение концентрации растворяющегося вещества, позволяет использовать для решения уравнения конвективной диффузии приближение пограничного диффузионного слоя. Малая толщина последнего при больших числах Прандтля позволяет положить составляющую x скорости невозмущенной пленки тождественно равной скорости ламинарного потока на поверхности пленки U , что было учтено выше при решении уравнения движения. Линеаризованное уравнение конвективной диффузии примет вид

$$(2.4) \quad L m^{(1)} + u_x^{(1)} \frac{\partial m^{(0)}}{\partial x} + u_y^{(1)} \frac{\partial m^{(0)}}{\partial y} = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(2.5) \quad m^{(0)} = \frac{\mu_s}{\mu_v} \Gamma_0 + \kappa \operatorname{erf} \sqrt{\eta}, \quad \kappa = m_0 - \frac{\mu_s}{\mu_v} \Gamma_0, \quad \eta = \left(\frac{U}{4D} \right) \frac{y^2}{x}$$

где D — коэффициент объемной диффузии, $m^{(1)}$ — малое возмущение концентрации растворенных в пленке ПАВ, $m^{(0)}$ — невозмущенная концентрация, μ_s, μ_v — химические потенциалы поверхностного раствора и объемного раствора вблизи поверхности, Γ_0 — невозмущенная концентрация ПАВ на поверхности пленки и струи. Соотношение (2.5) получено из стационарного уравнения в приближении диффузионного пограничного слоя с учетом условия термодинамического равновесия между поверхностным и объемным растворами ПАВ и условия вдали от поверхности пленки, которое естественно рассматривать как заданное на бесконечно большом от нее расстоянии, $\mu_s m^{(0)} = \mu_v \Gamma_0 (y=0)$, $m^{(0)} = m_0 (y \rightarrow \infty)$.

Для решения уравнения (2.4) заменим в нем $u_y^{(1)}$ на значение этой компоненты скорости при $y=0$, что справедливо, если глубина проникновения при диффузии меньше толщины слоя, в котором эти величины мало отличаются. Тогда с учетом очевидной оценки $\partial m^{(0)} / \partial x \ll \partial m^{(0)} / \partial y$ уравне-

ние (2.4) преобразуется к виду

$$(2.6) \quad \mathbf{L}m^{(1)} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_s \left(\frac{\partial m^{(0)}}{\partial y} \right)$$

где $(\partial \chi / \partial x)_s = \partial \chi / \partial x$ при $y=0$, причем в (2.6) явная зависимость распределения стационарной концентрации от x заменена на параметрическую зависимость от линейного размера системы l . Решение уравнения ищем в виде $m^{(1)} = M(y) \exp[i(\omega_1 t + k_1 x)]$. Удовлетворяя граничному условию $m^{(1)} = 0$ ($y \rightarrow \infty$), находим

$$(2.7) \quad M(y) = [a_3 - (a_1 + a_2) A k_1 N_2(y)] \exp(-i\alpha^{1/2} y) + \\ + (a_1 + a_2) A k_1 [N_1(y) - N_1(\infty)] \exp(i\alpha^{1/2} y) \\ \alpha = -i(\omega_1 + U k_1) D^{-1}, A = -(4\pi\alpha U^{-1} D^3 l)^{-1/2} \chi$$

$$N_1(y) = \int_0^y \exp\left[-\frac{U}{4Dl} \tau^2 - i\alpha^{1/2} \tau\right] d\tau,$$

$$N_2(y) = \int_0^y \exp\left[-\frac{U}{4Dl} \tau^2 + i\alpha^{1/2} \tau\right] d\tau$$

где a_3 — постоянная.

Нестационарное распределение растворенных ПАВ внутри струи описывается уравнением

$$(2.8) \quad \frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + V \frac{\partial n^{(1)}}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 n^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 n^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial r} \right)$$

(здесь предполагается, что невозмущенная концентрация $n^{(0)} = n_0 = \text{const}$), откуда находим

$$(2.9) \quad n^{(1)} = b_3 I_0(\lambda r) E, \quad \lambda^2 = k^2 + i(\omega_2 + V k_2) D^{-1}$$

Постоянные a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 определяются из системы граничных условий. Первое из них следует из равенства нормальной слагающей тензора вязких напряжений капиллярному давлению, зависящему, строго говоря, от распределения ПАВ на поверхности. Но, учитывая, что отклонение коэффициента поверхностного натяжения от равновесного значения мало, можно с точностью до величины второго порядка записать $\sigma(\Gamma) \approx \sigma(\Gamma_0) = \sigma$, $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(1)} \ll \Gamma_0$, где $\Gamma^{(1)}$ — малое возмущение концентрации ПАВ на поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Тогда первое условие на поверхности пленки и струи имеет вид

$$(2.10) \quad -p_1 + 2\mu \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y} = \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \quad (y=0) \\ -p_2 + 2\mu \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial r} = -\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R^2} \left(\xi + R^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (r=R)$$

где μ — динамическая вязкость, R — радиус невозмущенной струи, ε , ξ — поперечные смещения поверхности пленки и струи, удовлетворяющие условию непроницаемости поверхности жидкости

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = u_v^{(1)} \quad (y=0), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + V \frac{\partial \xi}{\partial z} = v_r^{(1)} \quad (r=R)$$

На поверхности пленки и струи выполняется условие равенства тангенциальной слагающей тензора вязких напряжений и поверхностной силы, отнесенной к единице поверхности жидкости. Эта сила направлена от областей с меньшим к областям с большим поверхностным натяжением и ее было бы уместно назвать силой Марангони в соответствии с известным эффектом [1]. Учитывая здесь зависимость σ от Γ , которая для простоты моделируется линейной функцией, можем записать

$$(2.11) \quad \mu \left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x} \right) = -\delta \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x} \quad (y=0), \quad \delta = \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma^{(1)}}$$

$$\mu \left(\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial z} \right) = \delta \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z} \quad (r=R)$$

Третье граничное условие следует из уравнения сохранения ПАВ, которое с точностью до бесконечно малых для почти плоской поверхности пленки имеет вид

$$F(U, x) \Gamma^{(1)} + \Gamma_0 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + Q = 0, \quad Q = +D \frac{\partial m^{(1)}}{\partial y} - q m^{(1)} \quad (y=0)$$

$$F(w, \theta) = F(D_s, t; w, \theta) = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial \theta} - D_s \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

где D_s — коэффициент поверхностной диффузии, Q — поток растворенного вещества из объемной фазы на поверхность, учитывающий химическую реакцию с константой скорости q , механизм которой описан выше. При записи оператора $F(D_s, t; w, \theta)$ здесь и в дальнейшем D_s и t опускаются. Связь между величинами $\Gamma^{(1)}$ и $m^{(1)}$ можно найти аналогично [9] из условия термодинамического равновесия между объемным и поверхностным растворами ПАВ, раскладывая химические потенциалы в ряд по степеням $\Gamma^{(1)}$ и $m^{(1)}$ и учитывая слабую концентрацию объемного раствора, $\Gamma^{(1)} = \beta_1 m^{(1)}$, где $\beta_1 = (R_g T / m_0) (\partial \mu_s / \partial \Gamma_0)^{-1}$, R_g — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура. Заметим, что в этом соотношении $m^{(1)}$ берется вблизи поверхности, т. е. формально при $y=0$. Аналогичным образом, выводя уравнение сохранения для струи, получаем данное граничное условие в окончательной форме соответственно для пленки и струи

$$(2.12) \quad \beta_1 F(U, x) m^{(1)} + D \frac{\partial m^{(1)}}{\partial y} - q m^{(1)} + \Gamma_0 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (y=0)$$

$$\beta_2 F(V, z) n^{(1)} - D \frac{\partial n^{(1)}}{\partial r} - q n^{(1)} + \Gamma_0 \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (r=R), \quad \beta_2 = \frac{m_0}{n_0} \beta_1$$

Далее, подставляя (2.3), (2.7), (2.9) в (2.10), (2.11), (2.12), получим две системы, состоящие из трех алгебраических уравнений, для определения постоянных a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 . Системы имеют нетривиальные решения, если их детерминанты равны нулю. Из этих условий и следуют искомые дисперсионные уравнения, которые после элементарных, но довольно громоздких вычислений преобразуются к следующему виду соответственно для пленки и струи:

$$(2.13) \quad \mu (\delta \beta_1)^{-1} [i(\omega_1 + U k_1) \beta_1 + D_s \beta_1 k_1^2 - \\ - i \alpha^{1/2} D - q] [2 + (\gamma_1^2 + k_1^2) k_1^{-2} f(\omega_1, k_1)] + \\ + [2 \alpha^{1/2} A D N_1(\infty) [1 + f(\omega_1, k_1)] - \Gamma_0 [k_1 + \gamma_1 f(\omega_1, k_1)]] = 0$$

$$(2.14) \quad f(\omega_1, k_1) = \frac{(\omega_1 + Uk_1)^2 - \Omega_0^2 - 2ivk_1^2(\omega_1 + Uk_1)}{\Omega_0^2 + 2ivk_1\gamma_1(\omega_1 + Uk_1)}, \quad \Omega_0^2 = \frac{\sigma k_1^3}{\rho}$$

$$\begin{aligned} & [\sigma k_2 R^{-2} (1 - k_2^2 R^2) (\omega^2 + Vk_2)^{-1} I_1(k_2 R) + \\ & + \rho (\omega_2 + Vk_2) I_0(k_2 R) - 2i\mu k_2^2 I_1'(k_2 R)] \{B[\gamma_2 I_1'(\gamma_2 R) + \\ & + R^{-1} I_1(\gamma_2 R)] - (k_2^2 + \gamma_2^2) I_1(\gamma_2 R)\} - \\ & - k_2 [2k_2 I_1(k_2 R) - BI_0(k_2 R)] \{2i\mu k_2 \gamma_2 I_1'(\gamma_2 R) - \\ & - \sigma k_2 R^{-2} (1 - k_2^2 R^2) (\omega_2 + Vk_2)^{-1} I_1(\gamma_2 R)\} = 0 \\ & B = \beta_2 \mu^{-1} \delta \Gamma_0 k_2^2 I_0(\lambda R) \{[i\beta_2 (\omega_2 + Vk_2) + \\ & + D_s \beta_2 k_2^2 - q] I_0(\lambda R) - D\lambda I_1(\lambda R)\}^{-1} \end{aligned}$$

3. В общем случае дисперсионные уравнения (2.13), (2.14) не могут быть разрешены аналитически. Поэтому ограничимся их анализом в ряде важных предельных случаев мало вязкой и очень вязкой жидкости при больших и малых длинах волн капиллярно-волновых возмущений.

Рассмотрим сначала возмущения, которые удовлетворяют следующим условиям соответственно для пленки и струи:

$$(3.1) \quad k_1^2 \gg \Omega_1''/\nu, \quad U/\nu k_1 \ll 1, \quad \gamma_1^2 \approx k_1^2$$

$$(3.2) \quad k_2^2 \gg \Omega_2''/\nu, \quad V/\nu k_2 \ll 1, \quad \gamma_2^2 \approx k_2^2$$

$$\omega_1 = \Omega_1'' + i\Omega_1'', \quad \omega_2 = \Omega_2'' + i\Omega_2''$$

Эти условия выполняются для очень вязкой жидкости, и в этом случае уравнение (2.13) сводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} i(\omega_1 + Uk_1) &= -D_s k_1^2 + 1/2 \mu^{-1} \delta \Gamma_0 k_1 + i\beta_1^{-1} \alpha^{1/2} D + \\ &+ 1/2 \sqrt{\pi} \mu^{-1} U^{1/2} (Dl)^{-1/2} \delta \kappa N_1(\infty) + q\beta_1^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда, ограничиваясь при оценке интеграла $N_1(\infty)$ главным членом его асимптотики и полагая, что $U \gg (\nu D)^{1/2} \beta_1^{-1}$, находим

$$(3.3) \quad \Omega_1'' = D_s k_1^2 - 1/2 \mu^{-1} \delta \Gamma_0 k_1 - 1/\sqrt{2} \beta_1^{-1} (UDk_1)^{1/2} - 1/2 \sqrt{\pi} \mu^{-1} \delta \kappa - q\beta_1^{-1}$$

При решении уравнения (2.14) будем рассматривать устойчивость только «тонких» струй, т. е. таких, для которых имеют место следующие неравенства:

$$(3.4) \quad k_2 R \ll 1, \quad \gamma_2 R \ll 1, \quad \lambda R \ll 1$$

Согласно Рэлею [8], расти могут длинноволновые возмущения, удовлетворяющие данному условию. Воспользовавшись асимптотическими оценками бесселевых функций с малыми аргументами, с учетом (3.2) и (3.4) находим

$$(3.5) \quad \Omega_2'' = [(\beta_2 D_s - DR/2) k_2^2 - \beta_2 (\mu R)^{-1} \delta \Gamma_0 - q] (\beta_2 + R/2)^{-1}$$

В случае (3.1), (3.2) каждое из дисперсионных уравнений (2.13), (2.14) распадается на два сомножителя. Приравняв нулю первые из них, получаем выписанные выше дисперсионные соотношения (3.3), (3.5). Из равенства нулю вторых сомножителей следует, что $\Omega_1'' = 0$, $\Omega_2'' = 0$, т. е. для пленки и струи имеет место режим нейтральной устойчивости (когда возмущения не растут, не затухают со временем). При этом «диффузионные» параметры (D_s , D , δ , Γ_0 , κ , β_1 , β_2) содержатся только в коэффициентах соотношений (3.3), (3.5), тогда как «гидродинамические» параметры (U , V , ν , σ) входят во вторые сомножители. Это позволяет назвать два решения каждого из уравнений (2.13), (2.14) соответственно диффузионными и гидродинамическими ветвями дисперсионных уравнений.

Далее рассмотрим влияние диффузионных параметров на развитие длинноволновых возмущений, для которых

$$(3.6) \quad \gamma_1^2 \gg k_1^2, \quad \gamma_2^2 \gg k_2^2$$

Эти условия имеют место в заданной области длин волн в случае достаточно малой вязкости. Заметим, что при $\nu \rightarrow 0$ уравнение (2.14) (в отсутствие ПАВ) переходит в известную формулу Рэлея для идеальной жидкости [8].

Для определения зависимости коэффициента затухания от коэффициента поверхностной диффузии предположим, что малы D , $|\delta| \Gamma_0$, U , V , т. е. для пленки и

струи выполняются соответственно следующие неравенства: $D \ll |\Omega_1''| \beta_1^2$, $|\delta| \Gamma_0 \ll \ll \rho |\omega_1|^{2/3} \nu^{1/3} k_1^{-2}$, $U \ll |\omega_1|/k_1$; $D \ll |\Omega_2''|/k_2^2$, $V \ll |\omega_2|/k_2$, $|\delta| \Gamma_0 \ll \rho R |\omega_2|^2 k_2^{-2}$. Тогда из (2.13), (2.14) с учетом (3.6) находим

$$(3.7) \quad \Omega_1'' = D_s k_1^2 - q \beta_1^{-1}$$

$$(3.8) \quad \Omega_2'' = (D_s k_2^2 - q \beta_2^{-1}) (2 + R \beta_2^{-1})^{-1}$$

Для очень тонких струй ($R k_2 \ll R |\omega_2|/\nu k_2 \ll 1$, $R \ll \sigma k_2^2/\rho |\omega_2|^2$) при условии (3.6) и малых значениях D , D_s , V ($D \ll |\Omega_2''|/k_2^2$, $D_s \ll |\Omega_2''|/k_2^2$, $V \ll |\omega_2|/k_2$) находим следующую зависимость коэффициента затухания от параметра δ :

$$(3.9) \quad \Omega_2'' = [D_s k_2^2 - (\mu R)^{-1} \delta \Gamma_0 - q \beta_2^{-1}] (1 + R/2\beta_2)$$

Для струй с немного ббльшим радиусом ($R k_2 \ll R |\omega_2|/\nu k_2 \ll 1$, $R \ll \rho |A| \delta^2 \Gamma_0 / \sigma \mu^2$) получаем

$$(3.10) \quad \Omega_2'' = - (4\delta \Gamma_0)^{-1} \nu \sigma k_2^2 - (2\rho R \sigma^{-1})^{-1/2} k_2$$

Дисперсионные соотношения, полученные выше, позволяют сделать ряд качественных выводов относительно устойчивости исследуемых систем и влияния различных физико-химических характеристик на развитие в них капиллярно-волновых возмущений. Заметим, что область длин волн, для которых $\Omega_1'' > 0$, $\Omega_2'' > 0$, соответствует устойчивому, а $\Omega_1'' < 0$, $\Omega_2'' < 0$ — неустойчивому режимам развития данных возмущений.

В коротковолновой области (3.1) из соотношения (3.3) для пленки следует, что система испытывает смену устойчивости, т. е. существует такое критическое значение волнового числа, являющееся корнем правой части данного равенства, что при всех волновых числах, превышающих критическое, возмущения затухают со временем и система в этой области длин волн устойчива. При этом физические параметры следующим образом влияют на характер развития возмущений: скорость затухания увеличивается с ростом коэффициента поверхностной диффузии и уменьшается с увеличением константы скорости химической реакции; усиление зависимости коэффициента поверхностного натяжения от концентрации ПАВ (увеличение $|\delta|$ при $\delta < 0$) содействует более быстрому затуханию возникающих возмущений, для инактивных веществ ($\delta > 0$) увеличение $|\delta|$ вызывает ослабление этого затухания; увеличение скорости нарастания возмущений связано с ростом коэффициента объемной диффузии, скорости движения пленки и объемной концентрации ПАВ m_0 . В длинноволновой области из выражения (3.7) следует, что рост коэффициента поверхностной диффузии содействует усилению устойчивости пленки, в то время как химическая реакция замедляет этот процесс.

Результаты, полученные при анализе дисперсионного уравнения для струи, выведены в предположении ее малого радиуса. Именно для таких тонких струй существенно влияние на устойчивость капиллярных эффектов. В области малых длин волн из формулы (3.5) следует, что при $\delta < 0$ и в отсутствие химической реакции, которая способствует возможному появлению неустойчивости, тонкая струя будет устойчивой, при этом скорость затухания возмущений увеличивается с ростом коэффициента поверхностной диффузии, $|\delta|$ и равновесной концентрации ПАВ Γ_0 , а уменьшается с ростом μ , D и R . Увеличение начальной концентрации инактивных веществ и уменьшение при этом μ и R способствуют появлению неустойчивости. Аналогичные результаты имеют место и для очень тонких струй, но в области больших длин волн (3.6), что следует из (3.9). Также в случае больших длин волн увеличение D_s и уменьшение q содействуют, как видно из (3.8), возрастанию скорости гашения возмущений.

Данных о непосредственных экспериментальных исследованиях влияния ПАВ на устойчивость и распад рассмотренных капиллярных течений у автора не имеется, но ряд качественных выводов, полученных выше, согласуется с результатами экспериментов, описанных в работах [4, 10].

Автор благодарен Ю. А. Бувичу за полезные обсуждения и внимание к работе.

Поступила 30 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scriven L. E., Sternling C. V.* The Marangoni effects. *Nature*, 1960, vol. 187, No. 4733.
2. *Абрамзон А. А.* Поверхностно-активные вещества. Свойства и применения. Л., «Химия», 1975.
3. *Kenning D. B. R.* Two-phase flow with nonuniform surface tension. *Appl. Mech. Rev.*, 1968, vol. 21, No. 11.
4. *Lucassen-Reynders E. H., Lucassen J.* Properties of capillary waves. *Advan. Colloid Interface Sci.*, 1970, vol. 2, No. 4.
5. *Levich V. G., Krylov V. S.* Surface - tension - driven - phenomena. *Annual Rev. Fluid Mech.* vol. 1. Palo Alto, Calif., Annual Revs., 1969.
6. *Хансон К., Кергис А., Логсдейл Д. Х.* Последние достижения в области жидкостной экстракции. Межфазные явления. М., «Химия», 1974.
7. *Рабинович Л. М.* Влияние массообмена и гетерогенной химической реакции на устойчивость жидкой пленки. ПИТФ, 1976, № 2.
8. *Стрэтт Д. В. (Рэлей).* Теория звука, т. 2. М. - Л. Гостехиздат, 1944.
9. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М. Физматгиз, 1959.
10. *Goedde E. F., Yuen M. C.* Experiments on liquid jet instability. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 40, pt 3.