

ОДНОМЕРНЫЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛАХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

А. М. ОВСЯННИКОВ

(Москва)

Приводятся простые формулы поправок, обусловленных действием центробежных сил, к параметрам, рассчитанным по одномерной теории. Полученные значения параметров на стенках сопел Лавала и криволинейных каналов в трансзвуковой области сравниваются с результатами двумерных расчетов. Отличие составляет ~2%.

1. **Поправка к одномерной теории.** Будем рассматривать адиабатическое плоское ($j=0$) или осесимметричное ($j=1$) течение идеального газа с постоянным показателем адиабаты κ без закрутки потока в некотором криволинейном канале. Система уравнений газовой динамики в криволинейных, связанных с самим течением, ортогональных координатах (ψ, σ) (где ψ — функция тока, определяемая равенствами $\psi_x' = -\rho v y^j$, $\psi_y' = \rho u y^j$, а σ — расстояние вдоль криволинейной оси канала l , относительно которой ведется одномерный расчет) запишется в виде

$$(1.1) \quad A f \psi' = k$$

$$(1.2) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \\ 0 & 0 & y^j \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} y^{(1+j)} \\ x \\ p \end{vmatrix}, \quad k = \begin{vmatrix} (1+j)u / (\rho W^2) \\ -v / (\rho W^2) \\ a\kappa(v\sigma'u - u\sigma'v) / W \end{vmatrix}$$

$$(1.3) \quad \rho = \theta^{-1}(\psi) p^{1/\kappa}, \quad W^2 = [(\kappa+1) - 2p/\rho] / (\kappa-1)$$

$$(1.4) \quad a = [(x\sigma')^2 + (y\sigma')^2]^{-1/2}, \quad u = -aWx\sigma', \quad v = -aWy\sigma'$$

Здесь u и v — проекции вектора скорости W , отнесенного к критической скорости звука a , на оси x и y декартовой прямоугольной системы координат; $W = |W|$; p и ρ — давление и плотность, отнесенные к их значениям при $W=1$; $\theta(\psi)$ — энтропийная функция; a — интегрирующий множитель дифференциала дуги системы криволинейных ортогональных координат (ψ, σ) ; штрихами, как и далее, обозначены производные.

Используя определение кривизны линии тока в переменных (ψ, σ) , из уравнений (1.1)–(1.4) можно записать

$$(1.5) \quad y^j p \psi' = \kappa W K$$

$$(1.6) \quad K = (x\sigma' y_{\sigma\sigma}'' - y\sigma' x_{\sigma\sigma}'') / [(x\sigma')^2 + (y\sigma')^2]^{3/2}$$

Из (1.5), (1.6) находим изменение давления вдоль криволинейного сечения $\sigma = \text{const}$ по линейной координате η

$$(1.7) \quad p_{\eta}' = \kappa \rho W^2 K$$

Предполагая в первом приближении сечение $\sigma = \text{const}$ плоским, имеем соотношение для определения распределения давления поперек канала вдоль нормали n

$$(1.8) \quad p_n' = \kappa \rho W^2 K$$

Для прямолинейных каналов кривизна K , определяемая по среднему радиусу кривизны линий течения, равна нулю. И, как следует из (1.8), параметры (давление, в частности) поперек течения в первом приближении остаются постоянными ($p_n' = 0$). В случае же криволинейных каналов $p_n' \neq 0$ во всех точках, где $WK \neq 0$.

Таким образом, одномерная теория в классическом виде справедлива лишь для сопел и каналов с прямолинейной осью. Для криволинейных же конфигураций она дает лишь средние значения параметров потока. Однако, пользуясь точной формулой (1.7) или приближенной (1.8), можно определить также распределение параметров в поперечном направлении.

Найдем, например, величины давлений на стенках такого канала. Сначала определим средние значения параметров $\langle p \rangle$, $\langle \rho \rangle$ и $\langle W \rangle$ в канале, пользуясь классической одномерной теорией или ее разновидностью. Зная ширину канала h и средний радиус кривизны $\langle R \rangle = 1/\langle K \rangle$ линий тока, определяем значения давлений на стенках в предположении, что $\langle p \rangle = 1/2(p_+ + p_-)$

$$(1.9) \quad p_{\pm} = \langle p \rangle \pm \kappa (h/2) \langle \rho \rangle \langle W \rangle^2 / \langle R \rangle$$

Знаки плюс и минус относятся соответственно к внешней и внутренней стенке по отношению к эволюте средней линии канала. Из рассмотрения второго слагаемого (1.9) видно, что поправка обусловлена, как и должно быть, действием на среду в

криволинейных каналах центробежных сил. При движении газа уже с относительно большими дозвуковыми скоростями, а также в каналах с режимом поворотом потока учет их обязательно необходим.

Отсюда следует также применимость формулы (1.9) и для расчета пространственных конфигураций. Однако необходимо вместо $\langle W \rangle$ подставлять полную скорость $\langle V \rangle = \sqrt{\langle W \rangle^2 + v_z^2}$, где v_z — составляющая скорости по оси Oz декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z) . Также надо учитывать, что h — ширина канала в рассматриваемом нормальном сечении, а $\langle R \rangle$ — средний радиус кривизны линий тока пространственного течения.

Покажем справедливость этого, например, для течений с закруткой потока. Так как линии тока лежат в нормальной плоскости, то выразим $\langle R \rangle$ через средние значения главных радиусов кривизны по формуле Эйлера

$$(1.10) \quad \langle R \rangle^{-1} = \cos^2 \alpha \langle R_1 \rangle^{-1} + \sin^2 \alpha \langle R_2 \rangle^{-1}$$

Здесь α — угол между меридиональной плоскостью, которая играет роль главного сечения, и рассматриваемой нормальной плоскостью.

Так как $\cos \alpha = \langle W \rangle / \langle V \rangle$; $\sin \alpha = \langle v_\phi \rangle / \langle V \rangle$ (v_ϕ — скорость закрутки), то из (1.9), (1.10) получим

$$(1.11) \quad p_{\pm} = \langle p \rangle \pm \kappa (h/2) \langle \rho \rangle (\langle W \rangle^2 / \langle R_1 \rangle + \langle v_\phi \rangle^2 / \langle R_2 \rangle)$$

Здесь средний радиус кривизны $\langle R_2 \rangle$ нормального сечения определяется через средний радиус кривизны плоского сечения, ортогонального оси симметрии — $\langle y \rangle$, который совпадает с усредненной ординатой поверхностей тока, и через угол наклона проекций линий тока на меридиональную плоскость ϕ по формуле $\langle R_2 \rangle = \langle y \rangle / \cos \langle \phi \rangle$.

Подставляя это значение в (1.11), получим выражение для определения давления на стенках сопла с вращающимся потоком

$$(1.12) \quad p_{\pm} = \langle p \rangle \pm \kappa (h/2) \langle \rho \rangle (\langle W \rangle^2 / \langle R \rangle + \langle v_\phi \rangle^2 \cos \langle \phi \rangle / \langle y \rangle)$$

Этот результат получается также, как и следовало ожидать, из системы уравнений для закрученного потока, аналогичной уравнениям (1.1)–(1.4). Отметим, что при нахождении средних величин, стоящих в правой части (1.12), по классической одномерной теории необходимо учесть закон распределения скорости вращения потока: $v_\phi y = c(\psi)$, а также то, что $\langle \rho \rangle = \rho \langle V \rangle$, $\langle \rho \rangle = \rho \langle V \rangle$, $\langle V \rangle^2 = \langle W^2 + v_\phi^2 \rangle$.

2. Примеры расчета течений в соплах и криволинейных каналах. Как показано в [1], течение газа в криволинейных каналах с режимом поворотом потока существенно отличается от одномерного. В некоторых случаях при повороте сверхзвукового потока на 180° линии постоянных скоростей идут даже почти эквипотенциальными линиями тока. Естественно, говорить об одномерном расчете таких конфигураций не приходится. Между тем, используя формулы (1.7) или (1.8), (1.9) в качестве поправок к одномерной теории, можно получать параметры двумерного течения, как будет показано, ниже, с точностью, способной «конкурировать» даже с точностью некоторых численных методов.

На фиг. 1 представлено осесимметричное двумерное течение в достаточно узком криволинейном кольцевом канале (на стенках $\psi = \pm 0.01$), рассчитанное обратным методом [1] для $\kappa = 1.4$. Распределение скорости на начальной кривой l , где $\psi = 0$, задано в виде

$$(2.1) \quad W = 1 + (e^{-\sigma/b} - 1) \left(\frac{e^{-\sigma/b}}{W_- - 1} + \frac{1}{1 - W_+} \right)^{-1}$$

при $W_- = 1.9$, $W_+ = 0.1$ и трех значениях параметра b ($b = 0.1$ — сплошные кривые; $b = 0.3$ — пунктирные кривые, $b = 0.5$ — штриховые кривые). Шаг интегрирования полагался равным $\Delta\psi = 10^{-3}$. Звуковая линия, показанная на фигуре, выпукла во всех трех случаях в сторону дозвуковой части канала. При этом с ростом параметра b в (2.1), т. е. с уменьшением разгона потока, поле поворачиваемого течения становится все более и более неоднородным. Аналогичное изменение происходит и с другими линиями постоянных скоростей, расположенными в месте поворота потока.

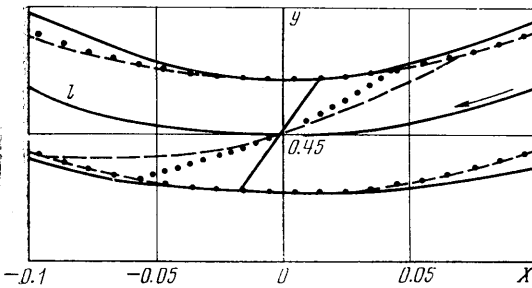
В минимальном сечении $x = 0$ на верхней (p_-) и нижней (p_+) стенках по двумерному расчету получаем значения давлений: при $b = 0.5$ $p_- = 0.8974$, $p_+ = 1.1036$; при $b = 0.3$ $p_- = 0.8961$, $p_+ = 1.1075$; а при $b = 0.1$ $p_- = 0.8788$, $p_+ = 1.0888$, т. е. неравномерность по давлению в минимальном сечении составляет $\sim 20\%$. Не учитывать этого нельзя. Классическая одномерная теория в минимальном сечении дает $p = 1$, в то время как по соотношению (1.9) на верхней и нижней стенках получаем соответственно значения $p_- = 0.8963$ и $p_+ = 1.1037$, близкие к значениям двумерного расчета. Максимальное отличие наблюдается при $b = 0.1$ и составляет 2% . При $b = 0.3$ наибольшее отличие (на нижней стенке) 0.3% , а при $b = 0.5$ (на верхней) — 0.1% .

Рассмотрим теперь течение в сопле Лавала, представленное в [1] для распределения скорости (2.1) при $W_- = 1.9$, $W_+ = 0.1$, $1/b = 3.5$. Найдем параметры в минималь-

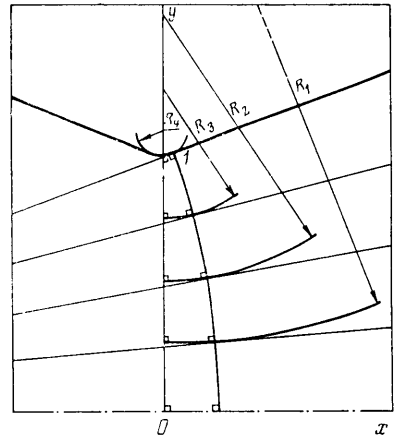
ном сечении сопла, контур которого выбран как линия тока $\psi=0.06$, имеющая радиус кривизны в этом месте $R_1=1.6r_*$. Двумерный расчет дает координату звуковой линии в минимальном сечении r_* равной $y_*=0.723r_*$, скорость на контуре $-\lambda \approx 1.13$ и на оси $-\lambda_+ \approx 0.86$. Классическая одномерная теория во всем сечении получает $\lambda=1$. Найдем теперь значения скоростей по формулам (1.9).

Будем рассматривать течение, ограниченное контуром сопла ($\psi=0.06$) и осью симметрии. Средняя по расходу линия, просчитанная по одномерному приближению, пересекает минимальное сечение в точке с координатой $y_*=0.707r_*$ (в ней $\lambda=1$). Расчет по формулам (1.9) при радиусе кривизны, определяемом через кривизну как $\langle R \rangle = 1/\langle K \rangle$, где $\langle K \rangle = (K_0 + K_1)/2$, $K_0=0$, $K_1=1/(0.6r_*)$ дает значения на контуре и на оси соответственно: $p_- = 0.78125$ ($\lambda_- = 1.15$), $p_+ = 1.21875$ ($\lambda_+ \approx 0.84$). Отличие найденных параметров от полученных по двумерному расчету составляет $\sim 2\%$.

Следует, однако, помнить что для сопел с очень малым радиусом кривизны горла ($R_m/r_* < 1$) трудно определить средний радиус кривизны линий тока течения, а следовательно, возникают трудности и в использовании формулы (1.9). Рассмотрим течение в коническом сопле с углом полураствора контура 20° и радиусом горла $R_m = 0.1r_*$. Построим фиктивную ортогональную сетку, качественно похожую на координаты (ψ, σ) . Проведем дугу окружности, ортогональную контуру и оси сопла, через точку сопряжения радиусной и конической частей стенки сопла (фиг. 2) и построим $m-1$ дуг окружностей, ортогональных ей и минимальному сечению, делящих последнее на m равных частей. Получим тогда дополнительно $m-1$ фиктивную линию тока с радиусами кривизны, равными R_i ($i=1, \dots, n$). Для расчета



Фиг. 1



Фиг. 2

параметров на стенке сопла выберем в качестве $\langle R \rangle$ — радиус кривизны средней линии $R_{[m/2]}$. Для расчета параметров на оси усредним полученные значения радиусов кривизны с учетом $K_0=0$

$$(2.2) \quad \langle R \rangle_+ = 2 \left/ \left[K_0 + \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \right)^{-1} \right] \right. = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

При $m=4$ получаем $K_0=0$, $R_1=2.77r_*$, $R_2=1.05r_*$, $R_3=0.5r_*$, $R_4=0.1r_*$. Отсюда находим $\langle R \rangle_- = R_{[4/2]} = 1.05r_*$, $\langle R \rangle_+ = 2.21r_*$. Из формул (1.9) определяем параметры на контуре ($p_- = 0.333$, $M_- = 1.792$) и на оси ($p_+ = 1.317$, $M_+ = 0.738$). По данным двумерного расчета, взятым из работы [2], имеем соответственно $M_- = 1.821$, $M_+ = 0.75$, т. е. найденные параметры опять отличаются от двумерных лишь на 1.6%.

Таким образом, соотношение (1.9) вводит простую, но важную поправку к одномерной теории, обусловленную действием центробежных сил. При этом так дополненная одномерная теория дает хорошее совпадение параметров течения с результатами двумерных расчетов.

Поступила 23 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов У. Г. Обратная задача теории сопла и численное решение внутренних задач газовой динамики. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 6. «Течения газа в соплах и струях». М., Изд. МГУ, 1974.
2. Лаваль П. Нестационарный метод расчета трансзвуковых течений в соплах. В сб. «Численные методы в механике жидкостей». М., «Мир», 1973.