МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1978

УДК 532.5.011:538.4

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОБТЕКАНИЕ КАПЛИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ГАРТМАНА

А. М. ГОЛОВИН, В. Л. НАТЯГАНОВ

(Москва)

Обтекание твердой сферической частицы электропроводной жидкостью при малых числах Рейнольдса и Гартмана в продольном и поперечном магнитных полях впервые исследовалось в [1, 2]. Влияние слабого продольного магнитного поля на силу сопротивления проводящей капли в диэлектрической среде учитывалось в [3].

В настоящей работе рассматривается движение жидкой проводящей капли в электропроводной среде и вычислена сила сопротивления в стоксовском приближении при произвольной ориентации однородного магнитного поля и в озееновском приближении для случая, когда направления магнитного поля и натекающего потока совпадают. Как и в предыдущих работах, в ней не учитывается возможность образования двойного слоя на границе раздела фаз.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное обтекание электропроводящей сферической капли радиуса a потоком другой проводящей жидкости со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ вдали от капли при наличии внешнего постоянного однородного магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}_0$, направленной под углом α к скорости натекающего потока.

Обозначим через μ, σ динамическую вязкость и проводимость жидкости, обтекающей каплю. Соответствующие величины для жидкости внутри капли обозначены штрихом. Относительные магнитные проницаемости обеих жидкостей считаются близкими к единице.

В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3, начало которой совпадает с центром капли, с осью x_3 вдоль магнитного поля при малых магнитных числах Рейнольдса ($R_m \ll 1$, $R_m' \ll 1$), стационарное движение жидкости описывается следующей системой уравнений, записанной в безразмерных переменных [4]:

$$\Delta\mathbf{v} - R(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + M^2\{[\mathbf{i}_3 \times \nabla\varphi] + [[\mathbf{v}\times\mathbf{i}_3]\times\mathbf{i}_3]\} = \nabla p \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \left(R = \frac{a\rho U_\infty}{\mu},\ M = B_0 a\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\right), \quad \Delta\varphi = (\operatorname{rot}\mathbf{v})_3$$

Здесь R, M — числа Рейнольдса и Гартмана. Расстояния, скорости, давление, индукция магнитного поля и электрический потенциал приведены к безразмерному виду делением на a, U_∞, $\mu U_a/a$, B_0 и $aU_\infty B_0$ соответственно. Единичный вектор в направлении магнитного поля обозначен через $\mathbf{i}_3$. Два других орта обозначим через $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$.

Аналогичная система уравнений для штрихованных величин описывает движение жидкости внутри капли.

Будем считать, что на поверхности капли нет двойного электрического слоя. Двойной слой обычно возникает на границах раздела между электропроводящими фазами типа ртуть — электролит, когда проводимость одной из фаз значительно больше, чем другой [5]. В данной работе рассматривается случай, когда проводимости фаз примерно одного порядка.

Обычно электрическое число Рейнольдса $R_e=\varepsilon_0 U_\infty/a\sigma$ в постоянных электромагнитных полях для капель размером 10 *мкм* не превышает 10^{-8} [6]. Поэтому следует пренебречь поверхностными токами и максвелловскими напряжениями на поверхности капли. Тогда граничные условия принимают вид

$$v_n=v_n'=0,\quad \mathbf{v}_\tau=\mathbf{v}_\tau',\quad \mathbf{p}_{n\tau}=\mu^*\mathbf{p}_{n\tau} \tag{1.2}$$

$$\varphi=\varphi',\quad \sigma^*\frac{\partial\varphi'}{\partial r}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=(\sigma^*-1)[\mathbf{v}\times\mathbf{i}_3]_n$$

$$(\mu^*=\mu'/\mu,\quad \sigma^*=\sigma'/\sigma)$$

Здесь $\mathbf{p}_{n\tau}$ — компонента тензора вязких напряжений, индексы n, τ означают нормальную или касательную к поверхности компоненту вектора.

Если рассматривать движение частицы в однородном магнитном поле, то в системе координат, связанной с центром капли, вдали от капли кроме магнитного появляется однородное электрическое поле.

Поэтому при $r\to\infty$

$$\mathbf{v}\to\mathbf{i}_2\sin\alpha+\mathbf{i}_3\cos\alpha,\quad \nabla\varphi\to\mathbf{i}_1\sin\alpha \tag{1.3}$$

Эти условия необходимо дополнить требованием, чтобы при $r\to0$

$$|\mathbf{v}'|\neq\infty,\quad |\varphi'|\neq\infty \tag{1.4}$$

Система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2)—(1.4) позволяет определить поля скоростей, давлений и потенциалов вне и внутри капли.

2. Приближение Стокса. Для решения системы уравнений (1.1) без учета инерционных членов вне капли воспользуемся методом Озеена [4, 7]. Будем искать решение, создаваемое точечной силой в следующем виде:

$$v_i=F_k u_{ki}+v_{\infty i},\quad p=F_k p_k+p_\infty$$
$$\varphi=F_k\varphi_k+\varphi_\infty\quad (i,k=1,2,3)$$

где F_k — компоненты точечной силы. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индекс ∞ относится к значениям или распределениям соответствующих величин на расстояниях $r\gg1/M$ от точечного источника силы.

Фундаментальный тензор u_{ki} и компоненты векторов p_k и φ_k удовлетворяют системе уравнений

$$\Delta\mathbf{u}_k+M^2\{[\mathbf{i}_3\times\nabla\varphi_k]+[[\mathbf{u}_k\times\mathbf{i}_3]\times\mathbf{i}_3]\}-\nabla p_k=i_k\delta(r) \tag{2.1}$$
$$\Delta\varphi_k=(\mathbf{i}_3\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}_k),\qquad \operatorname{div}u_k=0$$

Решение этой системы, следуя [4], будем искать в виде

$$u_{ik}=\delta_{ik}\Delta\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_k},\quad p_k=-\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta\Phi-M^2\delta_{3k}\Phi)$$

$$\varphi_k=-(\mathbf{i}_k\cdot\operatorname{rot}\Phi\mathbf{i}_3)$$

Функция Φ является решением уравнения

$$\Delta\Delta\Phi-4\varepsilon^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\delta(\mathbf{r}),\quad \left(\varepsilon=\frac{M}{2}\right) \tag{2.2}$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (2.2) удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\Phi=-\frac{1}{4\pi r}e^{-\varepsilon r}\operatorname{ch}(\varepsilon x_3) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=-\frac{1}{8\pi\varepsilon r}e^{-\varepsilon r}\operatorname{sh}(\varepsilon x_3) \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi=-\frac{1}{16\pi\varepsilon}\int\limits_{x_3}^{\infty}\exp[-\varepsilon(r+z)]\frac{dz}{r}- \tag{2.5}$$

$$-\frac{1}{16\pi\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{x_3}\exp[-\varepsilon(r-z)]\frac{dz}{r}-\frac{\ln\varepsilon\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{8\pi\varepsilon}=$$

$$=-\frac{1}{16\pi\varepsilon}\{E_1[\varepsilon(r+x_3)]+E_1[\varepsilon(r-x_3)]+$$

$$+2\ln\varepsilon\sqrt{x_1^2+x_2^2}\},\quad \left(E_1(z)=\int\limits_1^{\infty}e^{-zt}\frac{dt}{t}\right)$$

Фундаментальное решение, приведенное в [4], ошибочно, так как оно не удовлетворяет уравнению (2.3).

Действительно, в работе [4] принято, что

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int\limits_0^{x_3}e^{-\varepsilon r}\operatorname{sh}\varepsilon z\frac{dz}{r}$$

Но тогда

$$\Delta\Phi=-\frac{1}{4\pi r}e^{-\varepsilon r}\operatorname{ch}\varepsilon x_3+\frac{1}{8\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\exp(-\varepsilon\sqrt{x_1^2+x_2^2})$$

В области $\varepsilon r\ll 1$, как следует из формулы (2.5), фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi}\left\{r-\frac{\varepsilon}{4}(r^2+x_3^2)\right\} \tag{2.6}$$

Здесь опущены не существенные для расчета поля скоростей постоянные дополнительные члены.

Как и в обычной гидродинамике [8], с помощью (2.6) и производных от этой функции по декартовым координатам можно найти такую функцию Φ, чтобы получить решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)—(1.4).

Для этого достаточно искать Φ в следующем виде:

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi}\left\{r+\frac{A}{r}-\frac{\varepsilon}{4}(r^2+x_3^2)\right\}$$

Тогда можно получить поле скоростей движения жидкости, обтекающей каплю

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_\infty-\nabla(\mathbf{F}\nabla\Phi)+\mathbf{F}\Delta\Phi$$

В системе декартовых координат x, y, z с единичными ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, выбранными таким образом, что $\mathbf{v}_\infty=\mathbf{k}$, $\mathbf{i}_3=\mathbf{k}\cos\alpha-\mathbf{j}\sin\alpha$, поле скоростей имеет вид

$$\mathbf{v}=\mathbf{k}-\frac{F_z}{8\pi}\left[\frac{\mathbf{k}}{r}+\frac{z\mathbf{n}}{r^2}+\frac{A\mathbf{k}}{r^3}-\frac{3Az\mathbf{n}}{r^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varepsilon}{4}(6\mathbf{k}-2\mathbf{k}\cos^2\alpha+\mathbf{j}\sin 2\alpha)\right]-\frac{F_y}{8\pi}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}+\frac{y\mathbf{n}}{r^2}+\frac{A\mathbf{j}}{r^3}-\frac{3Ay\mathbf{n}}{r^4}\right), \tag{2.7}$$
$$(\mathbf{n}=\mathbf{r}/r)$$

Из условия отсутствия на поверхности капли нормальной составляющей скорости получим

$$F_y=\frac{\varepsilon}{8}\frac{F_z\sin 2\alpha}{1-A},\quad F_z=\frac{4\pi}{1-A-{}^1/_4\varepsilon(3-\cos^2\alpha)} \tag{2.8}$$

Тогда на поверхности капли поле скоростей принимает вид

$$\mathbf{v}=\frac{1-3A}{8\pi}F_z\left\{\mathbf{k}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}+\frac{\varepsilon\sin 2\alpha}{8(1-A)}[\mathbf{j}-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}]\right\} \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что при обтекании твердой сферической частицы $A={}^1/_3$ и компоненты безразмерной силы вдоль магнитного поля и в перпендикулярном направлении будут соответственно равны

$$F_2=6\pi(1+{}^9/_{16}M)\sin\alpha,\quad F_3=6\pi(1+{}^3/_8M)\cos\alpha \tag{2.10}$$

Для перехода к размерным величинам эти компоненты надо умножить на $\mu a U_\infty$.

Формулы (2.10) совпадают с результатами [1, 2].

Поле скоростей движения жидкости внутри капли при $R'\ll 1$ представляет собой суперпозицию двух сферических вихрей Хилла [9] с осями симметрии вдоль $\mathbf{k}$ и $\mathbf{j}$

$$\mathbf{v}'=\frac{1-3A}{8\pi}F_z\left\{(2r^2-1)\mathbf{k}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}+\frac{\varepsilon\sin 2\alpha}{8(1-A)}\times\right.$$
$$\left.\times[(2r^2-1)\mathbf{j}-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}]\right\} \tag{2.11}$$

Постоянная A определяется из условия непрерывности касательных компонент тензора вязких напряжений на поверхности капли $A=\mu^*/(2+3\mu^*)$. Тогда в соответствии с формулами (2.8) компоненты безразмерной силы сопротивления будут равны

$$F_y=\frac{\pi}{16}M\left(\frac{2+3\mu^*}{1+\mu^*}\right)^2\sin 2\alpha \tag{2.12}$$
$$F_z=2\pi\frac{2+3\mu^*}{1+\mu^*}\left[1+\frac{1}{8}M\frac{2+3\mu^*}{1+\mu^*}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\right]$$

Формулы (2.12) при $\mu^*\to\infty$ переходят в (2.10), а при $M=0$ совпадают с известным результатом Адамара — Рыбчинского.

Как известно [3], влияние электропроводности капли на силу сопротивления проявляется лишь при учете членов порядка M'^2.

Распределение электрического потенциала вне и внутри капли без учета членов порядка M и M'^2 имеет вид

$$\varphi=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_1)\left[r-\frac{2+3\mu^*}{4(1+\mu^*)}\left(1-\frac{A}{r^2}\right)+\frac{1-\sigma^*}{2(2+\sigma^*)}\frac{1}{r^2}\right]\sin\alpha$$

$$\varphi'=\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_1)r^3}{4(1+\mu^*)}\left[\frac{2+3\mu^*}{2}(1-3A)+\frac{4+6\mu^*-\sigma^*}{2+\sigma^*}\frac{1}{r^2}\right]\sin\alpha$$

Эти формулы необходимы, в частности, для расчета силы сопротивления в следующих приближениях по M и M'.

3. Приближение Озеена. На больших расстояниях от капли ($r\gg1$) скорость мало отличается от безразмерной скорости натекающего потока $\mathbf{k}$. Тогда систему уравнений (1.1) можно линеаризовать, заменив в уравнении Навье — Стокса инерционный член $R(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ на $R(k\nabla)\mathbf{v}$.

Фундаментальный тензор u_{ik} и компоненты φ_k будут связаны с функцией Φ аналогично п. 2, а компоненты p_k — с помощью соотношения

$$p_k=-\frac{\partial}{\partial x_k}[\Delta\Phi-\delta_{3k}M^2\Phi-R(\mathbf{k}\nabla)\Phi] \tag{3.1}$$

Функция Φ является решением уравнения

$$\Delta\Delta\Phi-R(\mathbf{k}\nabla)\Delta\Phi-M^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\delta(\mathbf{r}) \tag{3.2}$$

Если магнитная индукция направлена вдоль или против направления невозмущенного натекающего потока, тогда (3.2) принимает вид

$$\left(\Delta-k_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(\Delta+k_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Phi=\delta(\mathbf{r}) \tag{3.3}$$

$$\left(k_1=\pm{}^1/_2R+\sqrt{{}^1/_4R^2+M^2},\quad k_2=\mp{}^1/_2R+\sqrt{{}^1/_4R^2+M^2}\right)$$

Здесь верхний знак относится к случаю $\mathbf{k}=\mathbf{i}_3$, а нижний — к случаю $\mathbf{k}=-\mathbf{i}_3$.

Как и в п. 2, отсюда можно получить систему уравнений

$$\Delta\Phi=-\frac{1}{4\pi r\sqrt{R^2+4M^2}}\left\{k_1\exp\left[-\frac{k_1}{2}(r-x_3)\right]+\right.$$
$$\left.+k_2\exp\left[-\frac{k_2}{2}(r+x_3)\right]\right\}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=-\frac{1}{4\pi r\sqrt{R^2+4M^2}}\left\{\exp\left[-\frac{k_1}{2}(r-x_3)\right]-\exp\left[-\frac{k_2}{2}(r+x_3)\right]\right\}$$

При $Rr\ll1$ и $Mr\ll1$ эти уравнения принимают вид

$$\Delta\Phi=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2}{r}-\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}+R\cos\theta\right) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\mp\frac{1}{8\pi}\left[\left(1-\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}\frac{r}{2}\right)\cos\theta-\frac{R}{\sqrt{R^2+4M^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{R}{4}r(1+\cos^2\theta)\right]$$

Здесь угол θ отсчитывается от направления $\mathbf{k}$, выбираемого за полярную ось.

Для расчета осесимметричного обтекания нет необходимости искать решение уравнений (3.4). Если силу, действующую на каплю, представить в виде $\mathbf{F}=F\mathbf{k}$, то поле скоростей будет определяться следующим выражением:

$$\mathbf{v}=\mp\nabla\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+(F\Delta\Phi+1)\mathbf{k}=\left(1+\frac{F}{16\pi}\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}\right)\times$$
$$\times(\mathbf{e}_r\cos\theta-\mathbf{e}_\theta\sin\theta)+\frac{F}{8\pi}\left\{\mathbf{e}_r\left[-\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{R}{4}(1-3\cos^2\theta)\right]+\right.$$
$$\left.+\mathbf{e}_\theta\left(\frac{1}{r}+\frac{R}{2}\cos\theta\right)\sin\theta\right\} \tag{3.5}$$

где $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы, нормальные к поверхностям $r=\text{const}$ и $\theta=\text{const}$ и направленные в сторону возрастания соответствующих координат. Поле скоростей, как и следовало ожидать из инвариантности исходных уравнений (1.1) относительно замены $\mathbf{i}_3$ на $-\mathbf{i}_3$, не зависит от того, направлено ли магнитное поле вдоль вектора натекающего потока или в противоположную сторону. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathbf{k}=\mathbf{i}_3$.

Далее удобно ввести функцию тока, связанную с компонентами скорости соотношениями

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Поле скоростей (3.5) соответствует функции тока

$$\psi=\frac{r^2}{2}\left[1+\frac{F}{16\pi}\left(\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}-\frac{4}{r}-R\cos\theta\right)\right]\sin^2\theta \tag{3.6}$$

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений функция тока (3.6) является одночленным внешним разложением, правильно описывающим течение в области, ограниченной условиями $1\ll r\ll 1/R$, $1\ll r\ll 1/M$. Вблизи поверхности ($r\sim 1$), если пренебречь членами порядка M^2, в соответствии с (1.1) функция тока будет определяться уравнением

$$\frac{R}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}+2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)D^2\psi=D^4\psi \tag{3.7}$$
$$\left(D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

С точностью до членов первого порядка по R и M включительно решение (3.7), удовлетворяющее условию $\psi(1,\theta)=0$, имеет вид

$$\psi=\frac{1}{2}(1+\delta)\left(r^2+br-\frac{b+1}{r}\right)\sin^2\theta+$$
$$+\frac{R}{8}\left[br^2+b^2r-2b(b+1)-c+\frac{b(b+1)}{r}+\frac{c}{r^2}\right]\sin^2\theta\cos\theta \tag{3.8}$$

где δ, b, c — некоторые постоянные.

Ведущие члены во внутреннем разложении (3.8) при $r\gg 1$ должны совпадать с одночленным внешним разложением (3.6) в области $Rr\ll 1$, $Mr\ll 1$.

Отсюда следует, что

$$\delta=\frac{F}{16\pi}\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}} \tag{3.9}$$

Движение жидкости внутри капли с точностью до членов порядка R', M и M' включительно описывается функцией тока

$$\psi'=b'(r^2-r^4)\sin^2\theta-c'(r^3-r^5)\sin^2\theta\cos\theta$$

Постоянные b, c, b', c' определяются из условий непрерывности касательных компонент скорости и касательных напряжений на поверхности капли

$$b=-\frac{2+3\mu^*}{2(1+\mu^*)},\quad c=b\frac{5\mu^*-2b-2}{10(1+\mu^*)}$$

$$b'=-\frac{1+\delta}{4(1+\mu^*)},\quad c'=-\frac{R}{16}(b-2c)$$

Далее с помощью функции тока (3.8) можно вычислить силу, действующую на каплю, с точностью до членов порядка R и M включительно

$$F=2\pi\frac{2+3\mu^*}{1+\mu^*}\left[1+\frac{2+3\mu^*}{8(1+\mu^*)}\frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}\right] \tag{3.10}$$

Если пренебречь членами порядка R, то этот результат согласуется с (2.12) при $\sin\alpha=0$. При $\mu^*\to\infty$ формула (3.10) совпадает с полученными ранее в работах [10–12]. В отсутствие магнитного поля (3.10) переходит в известный результат [13], обобщающий формулу Озеена для силы сопротивления твердой сферической частицы в вязком потоке.

Авторы благодарят Г. И. Петрова и участников руководимого им семинара за обсуждение работы.

Поступила 24 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chester W.* The effect of a magnetic field on Stokes flow in a conducting fluid. J. Fluid Mech., 1957, vol. 3, No. 3.
2. *Gotoh K.* Stokes flow of an electrically conducting fluid in a uniform magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1960, vol. 15, No. 4.
3. *Замбран А. П.* О возможности учета МГД эффектов при ламинарном движении жидкометаллической капли в диэлектрической среде. Магнитная гидродинамика, 1965, № 4.
4. *Брановер Г. Г., Цинобер А. Б.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., «Наука», 1970.
5. *Мелчер Дж. Р.* Электрогидродинамика. Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
6. *Мелчер Дж. Р., Тейлор Дж.* Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений. Механика, Сб. перев. иностр. ст., 1971, № 5.
7. *Oseen C. W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig, Akad. Verlagesellschaft, 1927.
8. *Chwang A. T., Wu T. Y.* Hydromechanics of low-Reynolds-number flow, pt 2. Singularity method for Stokes flows. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, No. 4,
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л., Гостехиздат, 1947.
10. *Бедин А. П.* Обтекание сферы потоком электропроводящей жидкости в магнитном поле при малых числах. Сб. работ студентов физ.-мат. ф-та Ленингр. политехн. ин-та, 1959, вып. 2.
11. *Gotoh K.* Magnetohydrodynamic flow past a sphere. J. Phys. Soc. Japan, 1960, vol. 15, No. 1.
12. *Blerkom R. V.* Magnetohydrodynamic flow of a viscous fluid past a sphere. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, No. 3.
13. *Taylor T. D., Acrivos A.* On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 3.