

В заключение отметим, что решения (2.1), (2.3) обобщаются при наличии произвольного распределения внутренней энергии при нулевом давлении $Q(\xi)$. Эту энергию можно добавить к уравнению состояния среды перед и за ударной волной. В отличие от ньютоновской механики эта энергия создает гравитационное поле [2]. Скачок $Q(\xi)$ на ударной волне моделирует явление детонации.

Поступила 22 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубятников А. Н. О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5.
2. Голубятников А. Н. О сферически-симметричном движении релятивистского гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 3.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1977.
4. Станюкович К. П. Автомодельные движения газа в поле тяжести. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 4.
5. Сибгатуллин Н. Р. Нелинейные релятивистские волны в сверхсжатом газе. Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 3.
6. Milne E. Relativity, gravitation and world-structure. London — New York, Oxford Univ. Press., 1935.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1. М., «Наука», 1976.

УДК 532.593

О ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДАВЛЕНИЙ НА ПЛАВАЮЩУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. Ф. ВИТЮК, С. Р. КЛАДЬКО

(Одесса, Запорожье)

Возмущения свободной поверхности жидкости при наличии плавающих препятствий приводят к возникновению волнового движения. В присутствии ледяного покрова, моделируемого тонкой упругой пластинкой, волновые движения, генерируемые периодическими колебаниями внешней нагрузки (атмосферного давления), приложенной к некоторой области льда, исследовались в [1].

В настоящей работе рассматривается движение жидкости, возникающее под действием периодической системы давлений, приложенных к свободной поверхности, в предположении, что только часть поверхности покрыта тонкой упругой пластинкой конечной ширины. Получены аналитические выражения для силы и момента силы гидродинамического давления, действующих на пластину. Приведен численный пример, который показывает, что гидродинамическая сила и ее момент существенно зависят от жесткости пластины и расположения прикладываемого давления.

Пусть на поверхности жидкости глубины h находится упругая пластина, занимающая область $-a \leq x \leq a$, $y = h$, $-\infty < z < \infty$. К участку свободной поверхности $b \leq x \leq b+d$, $y = h$, $-\infty < z < \infty$ ($b > a$) прикладывается давление $P(x, z, t) = \text{Re}\{v(x) \times \exp i(kz - \omega t)\}$.

Потенциал скорости $F(x, y, z, t)$, описывающий движение жидкости, определяется из решения краевой задачи

$$\Delta F(x, y, z, t) = 0 \quad (-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h)$$

$$D \nabla^4 W + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + g \rho W + \rho \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (|x| \leq a, y = h)$$

$$y = h: \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (-\infty < x < -a, a < x < b, b + d < x < \infty)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (b \leq x \leq b + d)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = 0), \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| < \infty, \quad x \rightarrow \pm \infty, x = \pm a,$$

$$y = h$$

$$(1) \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm a), \quad D = \frac{Eh_*^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2$$

$$m = \rho_* h_*$$

Здесь $W(x, z, t)$ — прогиб пластины; E, ν — модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона пластины; ρ_*, h_* — плотность и толщина пластины ($h_* \ll h$); ρ — плотность жидкости. Условие (1) означает, что на кромке пластины перерезывающая сила и изгибающий момент равны нулю (условия свободного края) [2], кроме того, переходные условия на кромке требуют ограниченности $\partial W/\partial x$ и W при $x = \pm a$.

Функция $F(x, y, z, t)$ отыскивается в виде

$$F(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \{ \varphi(x, y) \exp i(kz - \omega t) \}$$

Для $\varphi(x, y)$ получается краевая задача, которая в результате комплексного преобразования Фурье приводится к виду

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \gamma^2 \Phi = 0 \quad (0 \leq y \leq h), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0)$$

$$y = h: \frac{\partial \Phi_-}{\partial y} - \beta \Phi_- = 0, \quad \frac{\partial \Phi_+}{\partial y} - \beta \Phi_+ = f(\alpha) e^{-i\alpha a}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\omega^2 \rho \Phi_1}{D\gamma^4 + D_0} + \frac{D(\gamma^2 + k^2) F(\alpha)}{D\gamma^4 + D_0}$$

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha = \sigma + i\tau, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + k^2, \quad \beta = \omega^2/g$$

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_a^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha(x-a)} dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(x, y) e^{i\alpha(x+a)} dx$$

$$\Phi_1(\alpha, y) = \int_{-a}^a \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \int_{-a}^a \frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx$$

$$f(\alpha) = \frac{i\omega}{g\rho} \int_{-a}^a v(x) e^{i\alpha x} dx, \quad F(\alpha) = (P_{1+} - i\alpha P_{2+}) e^{i\alpha a} - (P_{1-} - i\alpha P_{2-})$$

$$D_0 = g\rho - m\omega^2, \quad P_{1+} = \frac{\partial^2 \varphi(a, h)}{\partial x \partial y}, \quad P_{1-} = \frac{\partial^2 \varphi(-a, h)}{\partial x \partial y}, \quad P_{2+} = \frac{\partial \varphi(a, h)}{\partial y}$$

$$P_{2-} = \frac{\partial \varphi(-a, h)}{\partial y}$$

Здесь $P_{1+}, P_{1-}, P_{2+}, P_{2-}$ — неизвестные постоянные, подлежащие определению, $\Phi_+(\alpha, h)$ и $\Phi_-(\alpha, h)$ — функции, регулярные в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, а $\Phi_1(\alpha, h)$ — целая функция в силу граничных условий на кромке.

Задача (2) решается методом работы [3]. В случае $2a \gg h$ и $v(x) = P_0 \sin [\pi(x-b)/d]$ решение задачи (1) при $|x| < a$ запишется так:

$$F(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[i \frac{L_0}{A_0} f(\xi_0) \operatorname{ch} \frac{\eta_0}{h} y e^{-i t \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(i \xi_n)}{A_n} \cos \frac{\eta_n}{h} y e^{i \eta_n x} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + i \sum_{m=1}^2 \frac{N_m f(z_m)}{R_m} \operatorname{ch} r_m y e^{-iz_m x} + i \frac{Dl_0}{A_0} \operatorname{ch} \frac{\eta_0}{h} y e^{i\xi_0 a} V(\xi_0, x) + \\
 & + i \sum_{m=1}^2 P_m \operatorname{ch} r_m y e^{iz_m a} V(z_m, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Dl_n}{A_n} \cos \frac{\eta_n}{h} y e^{-\xi_n a} V(i\xi_n, x) + \\
 & + i \frac{\beta L_0 - \omega^2 \rho}{A_0} K_+(\xi_0) \operatorname{ch} \frac{\eta_0}{h} y \Psi(\xi_0, x) + \\
 & + i \sum_{m=1}^2 \frac{\beta N_m - \omega^2 \rho}{R_m} K_+(z_m) \operatorname{ch} r_m y \Psi(z_m, x) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta L_n - \omega^2 \rho}{A_n} K_+(i\xi_n) \cos \frac{\eta_n}{h} y \Psi(i\xi_n, x) \Big] \exp i(kz - \omega t) \Big\}
 \end{aligned}$$

$$V(\alpha, x) = (P_{1+} - i\alpha P_{2+}) e^{-i\alpha x} - (P_{1-} + i\alpha P_{2-}) e^{i\alpha x}, \quad L_0 = D \frac{\eta_0^4}{h^4} + D_0$$

$$\Psi(\alpha, x) = e^{i\alpha a} [\psi_-(-\alpha) e^{i\alpha x} + \psi_+(\alpha) e^{-i\alpha x}], \quad L_n = D \frac{\eta_n^4}{h^4} + D_0$$

$$N_m = D r_m^4 + D_0, \quad l_0 = \frac{\eta_0^2}{h^2} + k^2, \quad P_m = \frac{D(r_m^2 + k^2)}{R_m}, \quad l_n = k^2 - \frac{\eta_n^2}{h^2}$$

$$\psi_+(\alpha) = \frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)}, \quad \psi_-(\alpha) = \frac{\Phi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}, \quad \nu_0 = \sqrt{\rho_0^2/h^2 - k^2}$$

$$K_+(\alpha) = \omega \sqrt{\frac{\rho}{D\beta}} \frac{\rho_0}{\eta_0} \frac{(\xi_0 + \alpha)(\alpha + z_1)(\alpha + z_2)}{(\nu_0 + \alpha)(\alpha - z_0)(\alpha + z_0)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(\xi_n - i\alpha)}{\eta_n(\nu_n - i\alpha)}$$

$$K_-(\alpha) = K_+(\alpha), \quad K_1(\gamma) = (D\gamma^4 + D_0) \gamma \operatorname{sh} \gamma h - \omega^2 \rho \operatorname{ch} \gamma h$$

$$R_m = \frac{dK_1(r_m)}{d\alpha}, \quad A_0 = \frac{dK_1}{d\alpha}(\eta_0/h), \quad A_n = \frac{dK_1}{d\alpha}(i\eta_n/h)$$

$$z_m = \sqrt{r_m^2 - k^2}, \quad \nu_n = \sqrt{\rho_n^2/h^2 + k^2}, \quad \xi_0 = \sqrt{\eta_0^2/h^2 - k^2}, \quad \xi_n = \sqrt{\eta_n^2/h^2 + k^2}$$

Здесь $\pm \eta_0/h$, $\pm i\eta_n/h$ ($n=1, 2, \dots$), r_m ($m=1, 2$) и $\pm z_0$, $\pm \bar{z}_0$, $\pm \rho_0/h$, $\pm i\rho_n/h$ ($n=1, 2, \dots$) — соответственно корни уравнений

$$K_1(\gamma) = 0, \quad (\alpha^2 + k^2)^2 = -D_0/D, \quad \rho \operatorname{sh} \rho h - \beta \operatorname{ch} \rho h = 0$$

(z_0 принадлежит нижней $\tau < \tau_+$, а z_1, z_2 — верхней $\tau > \tau_-$ полуплоскости комплексной плоскости α).

Постоянные P_{1+} , P_{2+} , P_{1-} , P_{2-} определяются из следующих условий:

$$\psi_{+1}(z_0) = 0, \quad \psi_{+1}(-\bar{z}_0) = 0, \quad \psi_-(-z_0) = 0, \quad \psi_-(\bar{z}_0) = 0$$

$$\psi_{+1}(\alpha) = \psi_+(\alpha) - \frac{f(\alpha) \operatorname{ch} \gamma h e^{-i\alpha a}}{K_+(\alpha) (\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h)}$$

Давление жидкости под пластиной определяется зависимостью

$$p(x, z, t) = \operatorname{Re} \{ i\omega \rho \varphi(x, h) \exp i(kz - \omega t) \}$$

Тогда сила гидродинамического давления, действующая на пластину, рассчитанная на длину $0 \leq z \leq z_1$, имеет вид

$$F = -2 \frac{\omega \rho}{k} \sqrt{A^2 + B^2} \sin \frac{1}{2} k z_* \sin \left(\frac{1}{2} k z_* - \omega t - \varepsilon \right)$$

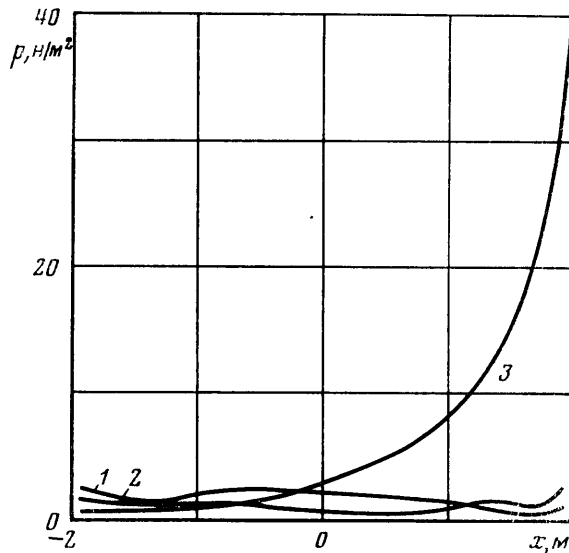
$$A = \int_{-a}^a \operatorname{Re} \varphi(x, h) dx, \quad B = \int_{-a}^a \operatorname{Im} \varphi(x, h) dx, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$$

Аналогично выражается момент силы

$$M_{0z} = -2\omega \rho k^{-1} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cos(\omega t + \varepsilon_1)$$

$$A_1 = \int_{-a}^a x \operatorname{Re} \varphi(x, h) dx, \quad B_1 = \int_{-a}^a x \operatorname{Im} \varphi(x, h) dx, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{A_1}$$

Согласно полученным формулам рассчитывались распределения давления по поверхности пластины, силы гидродинамического давления и ее момента при следующих значениях параметров: $a=2$ м, $h=2$ м, $k=1$ м⁻¹, $\omega=4.43$ сек⁻¹, $\rho=1025$ кг/м³,



$d=1$ м, $P_0=1$ н/м², $E=3 \cdot 10^7$ н/м², $\rho_i=870$ кг/м³, $h_s=0.1$ м. Результаты расчета приведены на фигуре и представлены ниже.

$b-a$, м	2	4	2	4
F , н	10.540	4.065	52.083	52.096
M_{0z} , нм	8.455	2.944	65.282	65.271

Здесь в первых двух столбцах приведены значения силы гидродинамического давления и ее момента, действующих на упругую пластину, а в остальных -- на жесткую.

Кривые 1, 2 изображают распределение давления на упругой пластине в случае расположения системы давлений на расстоянии $b-a$, равном 2 и 4 м соответственно. Кривая 3 соответствует аналогичному расчету для случая жесткой пластины при $b-a=2$ м. С увеличением расстояния между жесткой пластиной и системой давлений изменение распределения давления на пластине незначительно (до 1%).

Проведенные расчеты показывают, что эффективность жесткой пластины как волнолома значительно выше, чем упругой, хотя упругая пластина обладает большей устойчивостью, чем жесткая.

Поступила 23 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. Киев, «Наукова думка», 1973.
2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Витюк В. Ф. Дифракция поверхностных волн на доке конечной ширины. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.