Для сопоставления процессов языкообразования в неизотермическом и изотермическом случаях были проведены расчеты вытеснения нефти водой пластовой температуры с искусственным внесением в пласт возмущения по насыщенности. (Эволюция начальных возмущений такого типа детально исследуется в работе [4].) На части узлов сечения, соседнего с входной границей, задавалась предельная насыщенность вытесняющей фазы. На фиг. 3 представлено развитие этого возмущения (размер «возмущенного» участка равен половине мощности пласта). Кривые *1–3* представляют собой изосаты σ=0.1, 0.3 и 0.5. Фиг. 3, *а* относится к моменту времени t=0.5 *сутки*, фиг. 3, *б* – t=1 *сутки* и фиг. 3, *в* – t=1.5 *сутки*. Можно отметить аналогию этого случая с фиг. 2, когда начальное возмущение на том же участке получала температура. Эта аналогия не случайна. В области с начально более высокой температурой происходит более быстрое продвижение воды, насыщенность повышается и, таким образом, как бы формируется «ступенька» по насыщенности, которая затем развивается с образованием языков (см. фиг. 3).

В заключение автор благодарит А. А. Боксермана, Р. М. Каца, М. И. Швидлера за полезные обсуждения.

Поступила 21 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королев А. В., Шалимов Б. В., Швидлер М. И.* Численное решение одномерных и двумерных задач фильтрации несмешивающихся жидкостей с учетом гравитационных и капиллярных сил. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1975.
2. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
3. *Watts J. W.* An iterative matrix solution method suitable for anisotropic problems. Soc. Petrol. Engng J., 1971, vol. 11, No. 1.
4. *Индельман П. В., Кац Р. М., Швидлер М. И.* Об одной модели фильтрации несмешивающихся жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 6.

УДК 532.592

О ГРАВИТАЦИОННОМ СЖАТИИ ТЕЛА В ПРИБЛИЖЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. Н. ГОЛУБЯТНИКОВ, А. Л. КАЛАМКАРОВ

(Москва)

Построен ряд точных неавтомодельных решений взрывного типа, описывающих эволюцию сжимающегося неоднородного газового шара, в случае, когда за возникающей при этом ударной волной можно пренебречь влиянием гравитации, а спереди – принять равным нулю давление. Исследованы условия, приводящие к релятивистскому коллапсу или к уходу границы тела на бесконечность. Для построения решений используется метод обратной задачи, предложенный в [1, 2].

Решения в области за ударной волной допускают разделение переменных и являются обобщениями решений ньютоновской механики со скоростью, линейной по радиусу [3, 4]. Автомодельные решения с большим противодавлением перед ударной волной в специальной теории относительности исследованы в [5]. В настоящей работе отсутствие противодавления позволяет учесть границу тела.

1. Пусть неоднородный газовый шар при нулевом давлении (пыль) сжимается под действием собственной силы тяжести. Предположим, что в некоторый момент времени в центре возникает особенность, от которой отходит расходящаяся ударная волна. В области перед ударной волной в случае сферической симметрии уравнения движения могут быть полностью проинтегрированы. Если задать решение за ударной волной, то из условий на разрыве можно определить закон движения ударной волны и две произвольные функции, связанные с начальным состоянием пыли. При этом естественно наложить требование существования решения для пыли вплоть до момента времени $t=-\infty$.

После выхода ударной волны на поверхность тела начинается разлёт газа в пустоту. При этом последующее движение поверхности шара может быть описано обыкновенным дифференциальным неравенством, связанным с отрицательностью градиента давления на свободной границе. Интеграл этого неравенства дает условие ухода границы тела на бесконечность.

С другой стороны, существенным релятивистским эффектом в рассматриваемой задаче является уход границы тела под гравитационный радиус r_g, связанный с необратимостью процесса гравитационного сжатия тела. Если ударная волна не успевает выйти на поверхность тела при $r>r_g$, то наступает релятивистский коллапс. Под гравитационным радиусом граница тела всегда движется к центру.

В данной работе исследуется случай, когда в области за ударной волной можно пренебречь влиянием гравитации и использовать решения уравнений специальной теории относительности. При этом требуется, чтобы удельная плотность полной энергии среды, за исключением энергии покоя, была намного больше плотности гравитационной энергии.

Уравнения общей теории относительности для адиабатического движения идеального гравитирующего газа в сопутствующей сферической системе координат с метрикой $ds^2=e^\nu c^2dt^2-A^2d\xi^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ при $\dot r\neq 0$ имеют вид

$$1-\frac{2km}{c^2r}+e^{-\nu}\frac{\dot r^2}{c^2}-A^{-2}r'^2=0$$

$$\dot m c^2=-4\pi p r^2\dot r,\qquad m'c^2=4\pi\varepsilon r^2 r' \tag{1.1}$$

$$\nu'(p+\varepsilon)+2p'=0,\qquad p=\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\varepsilon(\rho,S)}{\rho}\right]$$

$$Ar^2\rho=g(\xi),\qquad \dot S=0$$

где mc^2 – полная энергия шара с площадью поверхности $4\pi r^2$, ε – плотность внутренней энергии, p – давление, ρ – плотность сохраняющейся массы покоя, S – удельная энтропия, лагранжева переменная ξ – монотонно возрастающая функция сохраняющейся массы покоя, k – гравитационная постоянная, c – скорость света в пустоте, $\partial r/\partial t=\dot r$, $\partial r/\partial\xi=r'$.

Пусть $t=T(\xi)$ – закон движения сильной расходящейся ударной волны, тогда [2]:

$$cT_2'=A_2e^{-\nu_2/2}\frac{\sqrt{\varepsilon_2^2-\rho_2^2c^4}}{p_2},\qquad T_1'=T_2'e^{\nu_2/2}\frac{p_2+\varepsilon_2}{\rho_2c^2}$$

$$[r]_1^2=[m]_1^2=[g]_1^2=0. \tag{1.2}$$

Цифрами 1, 2 обозначены соответственно состояния газа перед и за ударной волной. Здесь непрерывны координаты ξ, θ, φ, время t разрывно.

Уравнение состояния газа перед ударной волной $\varepsilon=\rho c^2$. Условие существования решения для пыли, связанное с неравенством $r'>0$, при $-\infty<t<T_1(\xi)$, $\xi>0$ приводит к следующему критерию:

$$\dot r<0,\quad h\geqslant 0,\quad h'\geqslant 0$$

$$h(\xi)=\frac{\dot r^2}{2}-\frac{km_1(\xi)}{r}=\frac{c^2}{2}\left[\left(\varepsilon_2\frac{r_2^2r_2'}{c^2g}-\frac{\dot r_2}{c}e^{-\nu_2/2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{\rho_2^2c^4}-1}\right)^2-1\right] \tag{1.3}$$

Отметим, что в [1, 2] дано ограничение, необходимое и достаточное в более широкой области: $\eta>0$, $\xi>0$. При $h>0$

$$r=\frac{km_1}{2h}(\operatorname{ch}\eta-1),\qquad b(\xi)-t=\frac{km_1}{(2h)^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta-\eta) \tag{1.4}$$

Если $h(0)>0$, то до образования ударной волны внутри шара имеется полость. Функция $b(\xi)$ находится из условия непрерывности r после определения закона движения ударной волны $T_1(\xi)$.

Если ударная волна выходит на поверхность тела при

$$r\leqslant r_g=2km/c^2 \tag{1.5}$$

то наступает релятивистский коллапс, граница тела уходит под гравитационный радиус.

Если при распаде ударной волны в результате расширения в пустоту граница тела приобретает относительно системы отсчета $r>r_g$ физическую скорость

$$v=\frac{v_0+v_2}{1+v_0v_2/c^2}\geqslant c\sqrt{\frac{r_g}{r}},\qquad v_0=c\,\mathrm{th}\frac{1}{c}\int\limits_0^{\varepsilon_2}\frac{a\,d\varepsilon}{p+\varepsilon}\tag{1.6}$$

$$v_2=\frac{\dot r_2}{r_2'}A_2e^{-\nu_2/2},\qquad a=c\sqrt{\frac{\partial p(\varepsilon,S)}{\partial\varepsilon}}$$

где a – релятивистская скорость звука, она уходит на бесконечность [2].

В [2] по существу исследованы все простые решения уравнений (1.1) при $k\neq0$, реализующиеся за ударной волной. Упрощение уравнений в рамках специальной теории относительности ($k=0$) позволяет найти и склеить с решением для гравитирующей пыли более широкие классы решений при $p>0$, в частности, содержащие произвольные функции лагранжевой переменной.

Строго говоря, приближение $k=0$ применимо к тем решениям уравнений (1.1), которые аналитически зависят от k, входящего в некоторый безразмерный малый параметр $\varkappa$.

Необходимым условием применимости специальной теории относительности является требование того, чтобы при разложении удельной плотности полной энергии, за исключением энергии покоя, $m'c^2/4\pi g-c^2$ по степеням k, член, содержащий k, был намного меньше предыдущего. Это дает

$$\frac{km}{c^2r}\ll\sqrt{1+e^{-\nu}\frac{\dot r^2}{c^2}}\left(\sqrt{1+e^{-\nu}\frac{\dot r^2}{c^2}}-\frac{\rho c^2}{\varepsilon}\right)\tag{1.7}$$

Если за ударной волной выполняется (1.7) и $\dot r\leqslant0$, то из определения h (1.3) следует, что на ударной волне $h\gg km/2r$, и, таким образом,

$$b(\xi)\approx T_1(\xi)+\frac{r(\xi,T_1(\xi))}{\sqrt{2h(\xi)}}\tag{1.8}$$

2. Рассмотрим некоторые решения уравнений (1.1) при $k=0$ с разделением переменных. В случае равновесия следует сначала сократить $\dot r$ в уравнении энергии $(\varepsilon r^2r')^{\cdot}+(pr^2\dot r)'=0$, а затем положить $\dot r=0$. Тогда имеем

$$p=\mathrm{const}>0,\qquad g=r^2\rho(r),\qquad r=\xi,\qquad \nu=0,\qquad A=1\tag{2.1}$$

где ρ – произвольная функция. Закон движения ударной волны при любом уравнении состояния вычисляется по формулам (1.2) в квадратурах. Так же в конечном виде находятся функции m_1, h, b, характеризующие движение пыли, $h={}^1/_2c^2[(\varepsilon_2/\rho_2c^2)^2-1]\geqslant0$.

Условие (1.3) выполнено, если удельная плотность внутренней энергии $U=\varepsilon/\rho$ не убывает. Условие (1.7) дает еще одно ограничение на функцию $\rho(\xi)$. Например, оно выполняется при $\rho=\mathrm{const}$ и достаточно малых r. При этом никогда не выполняется условие коллапса (1.5). В качестве малого параметра можно принять $\varkappa=km_0/(c^2r_0)$, где m_0c^2 и $4\pi r_0^2$ – характерные энергия и площадь поверхности, вычисленные, например, в момент выхода ударной волны на границу тела. В пределе при $\varkappa\to0$ граница тела всегда уходит на бесконечность.

При однородном движении газа за ударной волной, по Милну [6]

$$r=c\xi|t|,\qquad m=\frac{4\pi c}{3}\varepsilon\xi^3|t|^3\qquad \rho_2=\frac{m_0}{|ct|^3},\qquad S=\mathrm{const}$$

$$g=\frac{m_0\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}},\qquad A=\frac{|ct|}{\sqrt{1+\xi^2}},\qquad v_2=\frac{c\xi\,\mathrm{sign}\,t}{\sqrt{1+\xi^2}},\qquad \nu=0\tag{2.2}$$

Здесь m_0 – постоянная, уравнение состояния произвольно, причем всегда существует характерный размер r_0, который позволяет ввести безразмерный параметр $\varkappa$ и время $\tau=tc/r_0$.

Закон движения ударной волны имеет вид

$$\mathrm{arsh}\,\xi=-\frac{1}{3}\,\mathrm{sign}\,\tau\ln\frac{U+\sqrt{U^2-c^4}}{U_0+\sqrt{U_0^2-c^4}}$$

где $U_0=U(\tau_0)$, τ_0 – момент образования ударной волны. В силу монотонности $U(\rho)$ при $U_0=c^2$ $\tau_0=-\infty$ и, следовательно, полость отсутствует

$$h=\frac{c^2}{2}\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{arch}\frac{U_0}{c^2}-4\operatorname{sign}\tau\operatorname{arsh}\xi\right)\geqslant 0$$

При $\tau<0$ $h'>0$. Если $\tau\geqslant 0$, то $h'(0)<0$ и решение для пыли не продолжается до $\tau=-\infty$. Таким образом, сжатие пыли переходит в сжатие газа за ударной волной, причем $\tau_0<0$. Функции T_1, m_1, b вычисляются в конечном виде.

Условие применимости специальной теории относительности (1.7) имеет место, начиная с τ_0 и включая момент гравитационного коллапса (1.5), который наступает в силу $\varkappa\to 0$ при больших ρ. Используя асимптотику $U(\rho)\approx c^2B\rho^{\gamma-1}$, $1<\gamma\leqslant 2$ при $\rho\to\infty$, получим формулу для критической энергии ($r_0{}^3=m_0B^{1/(\gamma-1)}$)

$$m_kc^2\approx\frac{m_0c^2}{2}\left\{\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{2-\gamma}\left[\frac{4(U_0+\sqrt{U_0{}^2-c^4})}{c^2}\right]^{-\gamma}\varkappa^{6(1-\gamma)}\right\}^{1/(5\gamma-4)}$$

$$\varkappa=\frac{km_0^{2/3}}{c^2}B^{-1/3(\gamma-1)}$$

При $m<m_k$ граница тела уходит на бесконечность. Если $m\geqslant m_k$, то происходит коллапс, при этом

$$\rho_k=B^{1/(1-\gamma)}\left\{\left(\frac{8\pi\varkappa}{3}\right)^{-3}\left[\frac{4(U_0+\sqrt{U_0{}^2-c^4})}{c^2}\right]^2\right\}^{1/(5\gamma-4)}$$

Если задать характерную плотность ρ_k и постоянные состояния γ, B, положив $U_0=c^2$, то можно вычислить критическую энергию тела. В качестве примера рассмотрим коллапс тела, при котором реализуется ультрарелятивистская асимптотика $U(\rho)$, соответствующая вырожденному нейтронному газу [7]. Тогда $\gamma={}^4/_3$, $B\approx\approx 4\cdot 10^{-6}$ $г^{-1/3}см$, причем в силу $c^2\ll U$, $\rho\gg 1.6\cdot 10^{16}$ $г/см^3$.

Если $\rho=10^{17}$ $г/см^3$, то $\varkappa=6\cdot 10^{-2}$, $m_0=1{,}8\cdot 10^{32}$ $г$, $m_k=6{,}3\cdot 10^{32}$ $г$.

Если уравнение состояния имеет вид $\varepsilon=\rho c^2+F(f(\xi)\rho^\gamma)$, то решение (2.2) допускает обобщение, содержащее произвольную функцию $R(\xi)$

$$r=c\xi|t|,\quad \rho=\frac{m_0R(\xi)}{|ct|^3},\quad f(\xi)=\left[\frac{r_0{}^3}{m_0R(\xi)}\right]^\gamma$$

(2.3)

$$A=\frac{|ct|}{\sqrt{1+\xi^2}},\quad \nu=0,\quad g=\frac{m_0\xi^2R(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$m=4\pi m_0\int_0^\xi \xi_1{}^2R(\xi_1)d\xi_1+\frac{4\pi c}{3}|t|^3\xi^3F\left(\left|\frac{r_0}{ct}\right|^{3\gamma}\right)$$

Возмущения свободной поверхности жидкости при наличии плавающих препятствий приводят к возникновению волнового движения. В присутствии ледяного по-

При малом отличии $R(\xi)$ от единицы качественно результаты те же. Если при коллапсе тела реализуется ультрарелятивистское состояние газа, когда $F\gg\rho c^2$, то результаты вычисления критических параметров не меняются.

Укажем также другое решение уравнений (1.1) при $k=0$

$$r=c\xi|t|,\quad \rho=\frac{m_0R(\xi)}{(ct)^2r_0},\quad A=r_0$$

(2.4)

$$g=m_0R(\xi)\xi^2,\quad v_2=c\operatorname{sign}t\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{ct}\right)^2},\quad e^{-\nu}=\frac{1}{\xi^2}\left[\left(\frac{ct}{r_0}\right)^2-1\right]$$

которое имеет место при ультрарелятивистском уравнении состояния $p=(\gamma-1)\varepsilon$, $\varepsilon=f(\xi)\rho^\gamma$, $f(\xi)=f_0[m_0R(\xi)\xi^{1/(\gamma-1)}]^{-\gamma}$, $1<\gamma\leqslant 2$, где r_0, f_0, m_0 – постоянные. Интеграл энергии mc^2 сходится только при $\gamma>{}^3/_2$. Однако решение (2.4) не склеивается с продолжаемым решением для пыли при условии справедливости ультрарелятивистского приближения.

В заключение отметим, что решения (2.1), (2.3) обобщаются при наличии произвольного распределения внутренней энергии при нулевом давлении $Q(\xi)$. Эту энергию можно добавить к уравнению состояния среды перед и за ударной волной. В отличие от ньютоновской механики эта энергия создает гравитационное поле [2]. Скачок $Q(\xi)$ на ударной волне моделирует явление детонации.

Поступила 22 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубятников А. Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5.
2. *Голубятников А. Н.* О сферически-симметричном движении релятивистского гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 3.
3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1977.
4. *Станюкович К. П.* Автомодельные движенияи газа в поле тяжести. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 4.
5. *Сибгатуллин Н. Р.* Нелинейные релятивистские волны в сверхсжатом газе. Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 3.
6. *Milne E.* Relativity, gravitation and world-structure. London — New York, Oxford Univ. Press., 1935.
7. *Ландау Л. Д.*, Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1. М., «Наука», 1976.

УДК 532.593

О ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДАВЛЕНИЙ НА ПЛАВАЮЩУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. Ф. ВИТЮК, С. Р. КЛАДЬКО

(Одесса, Запорожье)

Возмущения свободной поверхности жидкости при наличии плавающих препятствий приводят к возникновению волнового движения. В присутствии ледяного покрова, моделируемого тонкой упругой пластинкой, волновые движения, генерируемые периодическими колебаниями внешней нагрузки (атмосферного давления), приложенной к некоторой области льда, исследовались в [1].

В настоящей работе рассматривается движение жидкости, возникающее под действием периодической системы давлений, приложенных к свободной поверхности, в предположении, что только часть поверхности покрыта тонкой упругой пластинкой конечной ширины. Получены аналитические выражения для силы и момента силы гидродинамического давления, действующих на пластину. Приведен численный пример, который показывает, что гидродинамическая сила и ее момент существенно зависят от жесткости пластины и расположения прикладываемого давления.

Пусть на поверхности жидкости глубины h находится упругая пластина, занимающая область $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=h$, $-\infty<z<\infty$. К участку свободной поверхности $b\leqslant x\leqslant b+d$, $y=h$, $-\infty<z<\infty$ $(b>a)$ прикладывается давление $P(x,\ z,\ t)=\mathrm{Re}\{v(x)\times \times\exp i(kz-\omega t)\}$.

Потенциал скорости $F(x,\ y,\ z,\ t)$, описывающий движение жидкости, определяется из решения краевой задачи

$$\Delta F(x,\ y,\ z,\ t)=0 \qquad (-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant h)$$

$$D\nabla^4 W+m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+g\rho W+\rho\frac{\partial F}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial y}\qquad (|x|\leqslant a,\ y=h)$$

$$y=h\colon \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial F}{\partial y}=0\qquad (-\infty<x<-a,\ a<x<b,\ b+d<x<\infty)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}\qquad (b\leqslant x\leqslant b+d)$$