

в рамках полной системы уравнений Навье – Стокса показано торможение ударной волны формирующимся пограничным слоем.

На фиг. 3 приведены зависимости  $\omega(\xi)|_{\theta=0}$  при различных числах  $Re_t$  (кривая 1 – 25.6, 2 – 65.2, 3 – 100, 4 – 400). Наибольшие значения  $\omega$  при фиксированном  $\xi$  соответствуют  $Re_t=25.6$  и уменьшаются по мере увеличения  $Re_t$ . При  $Re_t \rightarrow \infty$  они приближаются к значениям, соответствующим решению [4]. В частности, при  $Re_t=400$  отличие между численным решением и результатом [4] не превышает 15%. С целью иллюстрации влияния закона зависимости вязкости от температуры на численное решение значками  $a$  приведено аналогичное распределение  $\omega(\xi)|_{\theta=0}$  для  $\mu/\mu_1=\lambda/\lambda_1=1$ ,  $Re_t=65.1$ . Видно, что при средних  $Re_t$  это влияние конечно. Приведенные кривые наглядно иллюстрируют отсутствие автомодельности в решении задачи при рассматриваемых  $Re_t$ .

Задача об определении параметров нестационарного течения газа около импульсивно приведенной в движение пластины решалась аналогично. Результаты расчетов для числа Маха потока  $M_1=2$  при  $Re_t=500$  и постоянных значениях коэффициентов  $\mu$  и  $\lambda$  приведены ниже.

$Re_t$	$\xi=0.2$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
500	0.28	0.34	0.36	0.385	0.42	0.45	0.485	0.525	0.55
$\infty$	0.33	0.34	0.366	0.4	0.433	0.46	0.5	0.53	0.57

Там же даны для сравнения результаты решения этой задачи в рамках уравнений пограничного слоя [3]. Видно, что расхождение в решениях не превышает 10%.

Факт хорошего соответствия решения задач в рамках уравнений пограничного слоя [3, 4] численным расчетам полной системы уравнений Навье – Стокса при  $Re_t \sim 400$  свидетельствует о слабом влиянии областей с сильными градиентами газодинамических функций на формирующийся пограничный слой.

Авторы благодарят Ю. А. Демьянова за обсуждение результатов работы.

Поступила 22 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Липницкий Ю. М., Панасенко А. В. Расчет одномерных нестационарных течений вязкого газа с помощью неявной дивергентной разностной схемы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
2. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Об одной консервативной разностной схеме для решения стационарных уравнений газовой динамики. 4-я Всесоюзная конференция по динамике разреженного газа, 1975. Сб. аннот. М., 1975.
3. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Применение метода интегральных соотношений к решению сингулярного уравнения параболического типа, встречающегося в теории пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2.
4. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Численное решение задачи формирования пограничного слоя на пластине за движущейся ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.

УДК 532.529

### ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ДВУХФАЗНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕЙ

С. Ф. ИГНАТОВ, Н. С. МИРОНЧУК, Н. Е. ХРАМОВ

(Москва)

Представлены результаты расчета обтекания сферы двухфазной сверхзвуковой струей, истекающей в вакуум. Расчеты проведены методом установления с использованием разностной схемы, построенной на основе характеристических соотношений [1]. Параметры невозмущенной струи определялись на основе двухскоростной и двухтемпературной модели взаимопроницающего течения сплошных сред (газа и частиц) [2, 3] методом сеток [4].

При расчете обтекания сферы, как и в [5–7], делалось предположение о том, что частицы не влияют на течение газа в ударном слое. Анализ влияния частиц на газодинамические параметры течения в ударном слое проведен в [8].

Рассматривается течение в ударном слое перед сферой, расположенной в двухфазной сверхзвуковой струе на некотором расстоянии от среза сопла. Центр сферы лежит на оси струи, поэтому течение имеет двумерный характер. При численном определении параметров рассматриваемого течения задача распадается на две самостоятельные: нахождение параметров невозмущенной двухфазной струи непосредственно перед ударной волной и определение течения в ударном слое. Для определения параметров невозмущенной струи использовалась двухскоростная двухтемпературная модель, описывающая взаимопроникающее течение двух сплошных сред (частиц и газа) [3]. При этом численно задача истечения сверхзвуковой двухфазной струи решалась методом сеток [4].

В основе используемой модели течения лежит допущение о сплошности второй фазы, имеющей «парциальную» плотность, но не имеющей давления. Кроме того, предполагается выполнение следующих условий: 1) частицы — одинаковые сферы, столкновением которых можно пренебречь; 2) вне поверхности разрыва расстояния, на которых характеристики течения меняются существенно, много больше расстояний между частицами; 3) число Маха относительного движения частиц меньше критического.

При набегании струи на сферу перед последней возникает сильная ударная волна. Исследования течения через ударные волны в рамках указанной выше модели среды [3] показали, что при умеренных давлениях, когда плотность газа много меньше плотности материала частиц, изменение параметров потока частиц в ударных волнах отсутствует, а изменение параметров газа в ударной волне такое же, как и в чистом газе. Поэтому при рассмотрении задач взаимодействия двухфазных сред с преградами различной формы с образованием отошедших ударных волн указанная выше модель не всегда может быть применима из-за невыполнения условия 3). В частности, при обтекании сферы сверхзвуковой двухфазной струей сразу за ударной волной скорость частиц мало отличается от скорости набегающего потока, тогда как газ в ударном слое в направлении движения частиц, по крайней мере в окрестности критической точки, движется с существенно дозвуковой скоростью.

В настоящей работе предполагалось, что средняя массовая плотность частиц в ударном слое значительно меньше плотности газа, что имеет место при малом количестве частиц. В этом случае влиянием частиц на течение газа в ударном слое можно пренебречь. Кроме того, как и при расчете невозмущенной струи, предполагалось, что частицы представляют собой сферы одного размера, столкновение которых можно не рассматривать. Согласно [5] взаимодействие частиц между собой можно не принимать во внимание, если в двухфазной смеси газа и частиц отношение объема, занятого газом, к объему, занятому смесью, превышает  $0.92 \div 0.95$ . Считалось также, что частицы, достигшие преграды, захватываются ее поверхностью.

Параметры потока газа за ударной волной определялись численно методом установления с использованием сеточно-характеристической схемы [1]. Полученное решение применялось для интегрирования уравнений движения частиц, которые при указанном выше допущении записывались вдоль линий тока в виде

$$u_s du_x - f_x dx = 0, \quad u_s dv_s - f_y dy = 0$$

Здесь  $x, y$  — прямоугольная система координат с началом на оси симметрии струи в плоскости среза сопла (ось  $x$  совпадает с осью струи),  $u_s, v_s$  — составляющие вектора скорости частиц на оси  $x, y$  соответственно,  $f_x, f_y$  — составляющие силы сопротивления  $f$  на оси  $x, y$ .

Для силы сопротивления имеем

$$f = \frac{3}{8} \frac{C_d}{r_s} \frac{\rho}{\rho_s^\circ} |V - V_s| (V - V_s)$$

Здесь  $\rho, V$  — плотность и вектор скорости газа,  $r_s$  — радиус частицы,  $\rho_s^\circ$  — плотность материала частиц,  $C_d$  — коэффициент аэродинамического сопротивления частиц.

При дозвуковой относительной скорости между газом и частицами для  $C_d$  использовалось выражение

$$C_d = \frac{C_d^\circ}{1 + 0.192 C_d^\circ M}, \quad C_d^\circ = \frac{24}{Re} + \frac{4.4}{\gamma Re} + 0.42$$

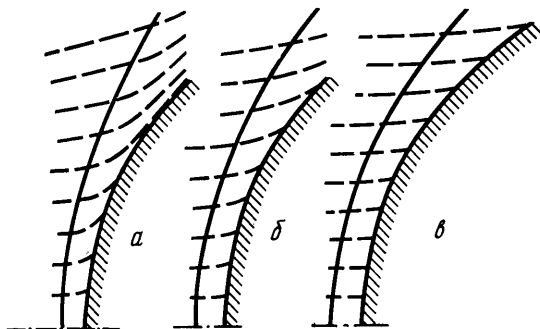
где  $M$  — число Маха в относительном движении,  $Re$  — число Рейнольдса, рассчитываемое по местным параметрам за ударной волной, по скорости относительного движения частиц и по диаметру частицы.

При сверхзвуковом относительном движении коэффициент сопротивления частиц принимался постоянным, не зависящим от размера частиц, скорости и плотности потока. Такое допущение справедливо при относительно больших числах Рейнольдса и Маха, если размеры частиц превышают  $5 \text{ мкм}$  [6].

Рассмотрим некоторые особенности движения частиц в ударном слое в зависимости от основных определяющих параметров струи на срезе сопла. Расчеты проводились для двухфазной струи, истекающей в вакуум, с числом Маха на срезе сопла  $M_a=3$ , показателем адиабаты  $k=1.25$ , углом полураствора  $\varphi_a=10$ , радиусом среза сопла  $r_a=0.1$  м. Давление и температура торможения на срезе сопла принимались равными  $P_{0a}=45.1 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>,  $T_{0a}=2820^\circ$  К. Относительные величины скорости и температуры частиц составляли  $V_{sa}/V_a=0.95$  и  $T_{sa}/T_a=1.02$ .

Варьировались такие параметры, как расстояние между срезом сопла и лобовой точкой сферы  $h_1=h/r_a=6 \div 30$ , радиус частиц  $r_s=3 \div 10$  мкм и плотность второй фазы на срезе сопла  $\rho_{sa}/\rho_a=0.1 \div 0.3$ . Плотность материала частиц  $\rho_s$  во всех случаях была равна  $3.97$  г/см<sup>3</sup>.

Расчитанное отношение объема, занятого газом, к объему, занятому смесью на срезе сопла, равно  $0.99$  и  $0.98$  при  $\rho_{sa}/\rho_a=0.1$  и  $0.3$  соответственно. Вниз по течению



Фиг. 1

от среза сопла значение отношения указанных объемов будет увеличиваться, поскольку по мере расширения струи частицы разлетаются от оси симметрии.

Течение в свободно расширяющейся двухфазной струе качественно аналогично течению в чисто газовой струе, однако механическое и тепловое взаимодействие между фазами приводит к количественному различию параметров струи в соответствующих точках [9]. В частности, в двухфазной струе из-за наличия сил взаимодействия степень расширения газовой фазы уменьшается, а плотность увеличивается, что приводит к значительному уменьшению числа Маха.

Ударная волна, возникающая перед сферой при обтекании ее двухфазной сверхзвуковой струей, отделяет сильно сжатый слой газа, прилегающий к поверхности тела, от области невозмущенного потока. Твердые частицы, попадая в сжатый слой со скоростью, мало отличающейся от скорости невозмущенного потока, начинают тормозиться, в результате чего траектории их движения отклоняются в сторону распространения газа за ударной волной. Типичная картина траекторий движения частиц для различных расстояний между срезом сопла и поверхностью сферы, равных  $h_1=6, 10, 30$  (кривые *a, б, в* соответственно), представлена на фиг. 1. Перед входом в ударный слой траектории частиц для всех рассмотренных значений  $h_1$  практически прямолинейны, в ударном же слое они искривляются, причем тем сильнее, чем ближе преграда к срезу сопла. Это объясняется тем, что при малых значениях  $h_1$  плотность газа в ударном слое значительно выше.

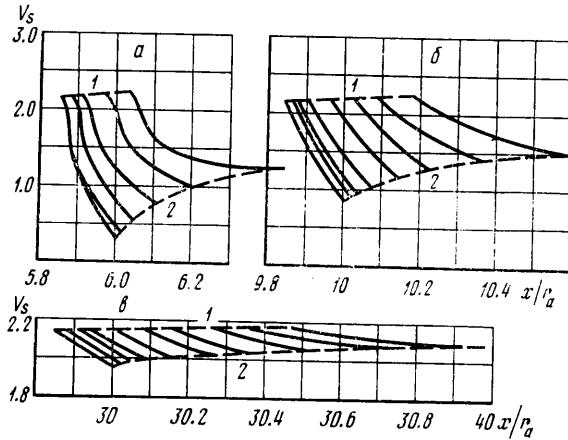
При  $h_1=30$  траектории частиц остаются практически прямолинейными вплоть до поверхности преграды.

Характер изменения скорости частиц, отнесенной к критической скорости, вдоль траектории их движения, показан на фиг. 2 (кривые *a, б, в* соответственно для  $h_1=6, 10, 30$ ). При  $h_1=6$  скорость частиц в момент встречи их с поверхностью преграды по сравнению со скоростью входа в ударный слой уменьшается в окрестности критической точки более чем в 5 раз, в то время, как при  $h_1=30$  — не более чем в 1.2 раза. Последняя из траекторий частиц, попадающих на поверхность тела, ограничивает часть этой поверхности, подвергающейся непосредственному воздействию твердых частиц.

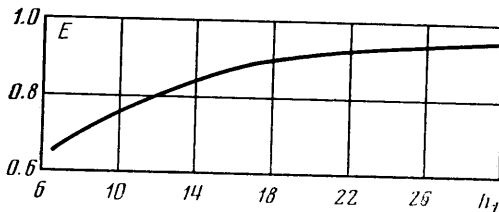
Положение указанной траектории представляет интерес как с точки зрения определения площади поверхности, достигаемой частицами, так и с точки зрения вычисления коэффициента осаждения  $E$ , который определяется как отношение массы падающих частиц к массе частиц, которые достигли бы поверхности при отсутствии ударного слоя. Характер изменения коэффициента осаждения в зависимости от  $h_1$

показан на фиг. 3. По мере удаления преграды от среза сопла коэффициент осаждения увеличивается и асимптотически стремится к единице. Это объясняется тем, что на больших расстояниях от среза сопла ударный слой практически перестает влиять на движение частиц, т. е. значение скорости и направление движения их на участке от ударной волны до поверхности преграды сохраняются практически такими же, как и перед входом в ударный слой. Следует отметить слабую зависимость коэффициента осаждения от параметров  $r_s$ ,  $\rho_{ca}/\rho_a$ . Приведенная на фиг. 3 кривая с точностью  $\pm 3\%$  описывает характер изменения  $E$  для всего рассмотренного диапазона указанных параметров.

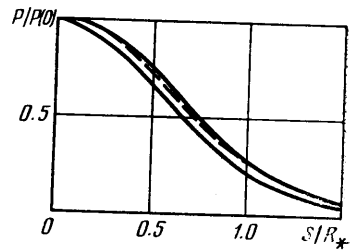
На фиг. 4 приведено распределение давления  $P/P(0)$  ( $P(0)$  — давление в критической точке) на поверхности сферы. В зависимости от координаты  $s/R_*$ , где  $s$  — длина



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

дуги,  $1/R_* = 1/R + m$ ,  $R$  — радиус сферы,  $m$  — коэффициент расхождения потока в окрестности оси струи, кривые распределения давления для всех рассмотренных вариантов, как и в случае чисто газовых струй [10], образуют узкий пучок, хорошо аппроксимирующийся кривой распределения давления при обтекании сферы равномерным гиперзвуковым потоком совершенного газа (пунктир).

Давление торможения в критической точке сферы при обтекании ее двухфазной струей мало отличается в рассмотренном диапазоне исходных параметров от давления торможения при обтекании сферы чисто газовой струей. Зависимость  $P(0)/P_{0a}$  от  $h_1$  представлена на фиг. 5 (кривая 1;  $P_{0a}$  — давление адиабатически заторможенного газа на срезе сопла). Максимальное отличие ( $\sim 10\%$ ) имеет место для струи с исходными параметрами на срезе сопла  $r_s = 3$  мм и  $\rho_{ca}/\rho_a = 0.3$  при  $h_1 = 6$ . При больших значениях  $h_1$  указанное отличие составляет не более  $1-3\%$ .

Для определения давления на поверхности преграды от второй фазы использовалась формула Ньютона

$$P_s = \rho_s V_s^2 \sin^2 \alpha$$

При этом расчеты проводились для двух случаев: по местным параметрам в невозмущенной струе и по параметрам, полученным на поверхности преграды с уче-

том ударного слоя, причем величина  $\rho_s$  определялась путем интегрирования уравнения неразрывности для второй фазы в ударном слое.

Расчеты показали, что при  $h_1 \geq 20$ , когда на движении частиц перестает сказываться влияние ударного слоя, результаты для одной и той же точки поверхности преграды в обоих случаях практически совпадают. При меньших значениях  $h_1$  величина давления, полученного по параметрам невозмущенной струи, выше, причем различие увеличивается с приближением преграды к срезу сопла. Например, для  $h_1=10$  отношение указанных давлений в критической точке сферы составляет  $\sim 2$ .

Влияние исходных параметров на давление от второй фазы показано на фиг. 5, где приведена зависимость  $P_s(0)/P_{0a}$  от  $h_1$ , полученная с учетом влияния ударного слоя (кривые 2-6 соответственно для исходных параметров:  $r_s=5$  мм,  $\rho_{sa}/\rho_a=0.1$ ;  $r_s=5$  мм,  $\rho_{sa}/\rho_a=0.2$ ;  $r_s=5$  мм,  $\rho_{sa}/\rho_a=0.3$ ;  $r_s=3$  мм,  $\rho_{sa}/\rho_a=0.3$ ;  $r_s=10$  мм,  $\rho_{sa}/\rho_a=0.3$ ).

Необходимо отметить, что если величина давления от второй фазы при  $h_1 \leq 10$  значительно ниже величины давления от газовой фазы, то при  $h_1 \geq 20$  величины указанных давлений соизмеримы.

В заключение сделаем оценку величины  $\rho_s/\rho$  в ударном слое для различных значений  $h_1$  в рассмотренном диапазоне исходных параметров.

При удалении от среза сопла значение отношения  $\rho_s/\rho$  на оси невозмущенной струи возрастает и стремится к некоторой постоянной величине, своей для каждого значения исходных параметров и превышающей в 2-3 раза значение  $\rho_{sa}/\rho_a$  на срезе сопла. При этом в поперечных сечениях струи при удалении от оси симметрии величина отношения  $\rho_s/\rho$  интенсивно уменьшается.

В ударном слое среднemasовое значение плотности при  $h_1 \leq 10$  увеличивается в 2-3 раза, а при  $h_1 > 10$  величина  $\rho_s$  изменяется незначительно, в то же время плотность газа  $\rho$  в диапазоне  $h_1=6-30$  увеличивается в 4-7 раз.

Таким образом, для значений  $h_1 > 10$  величина отношения в ударном слое в 2-3 раза меньше исходной величины на срезе сопла, а при  $h_1 \leq 10$ , по крайней мере, не больше исходной.

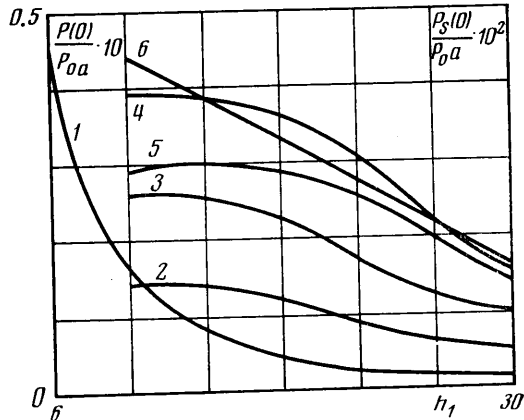
Как уже отмечалось выше, основное допущение, используемое в работе, — отсутствие влияния частиц на движение газа в ударном слое — выполняется при малом значении среднemasовой плотности частиц. Указанное допущение широко используется, однако эмпирического обоснования границы малости для рассматриваемого случая не имеется. Поэтому приведенные в работе результаты необходимо рассматривать в какой-то мере как качественные.

Авторы благодарны А. Н. Никулину за предоставление программы расчета обтекания затупленного тела равномерным сверхзвуковым потоком.

Поступила 23 XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 2.
2. Рахматуллин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. Дьяконов Ю. Н., Усков В. И. Расчет сверхзвуковых струй идеального газа методом сеток. Тр. НИИ механ. МГУ, 1970, вып. 5.
5. Probst R. F., Fassio F. Dusty hypersonic flows. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 4. (Рус. перев.: Гиперзвуковые течения газа при наличии инородных частиц. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, вып. 4.)
6. Waldman G. D., Reinecke W. G. Particle trajectories heating and breakup in hypersonic shock layers. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 6. (Рус. перев.: Траектории,



Фиг. 5

- нагрев и разрушение частиц в гиперзвуковом ударном слое. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, вып. 6.)
7. Храмов Н. Е. Окрестность критической точки тупого тела в двухфазной гиперзвуковой струе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
  8. Васильков А. П. Окрестность критической точки затупленного тела в гиперзвуковом двухфазном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
  9. Рычков А. Д. Течение смеси газа и твердых частиц в сверхзвуковых недорасширенных струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
  10. Лунев В. В., Храмов Н. Е. Течение в окрестности критической точки тупого тела в расходящемся гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.

УДК 532.546

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

С. И. ЯКУБА

(Москва)

Предлагается численный метод расчета неизотермической фильтрации, позволяющий учитывать капиллярные, гравитационные силы, а также потери тепла в окружающую породу. Исследуется процесс языкообразования при неизотермической фильтрации.

1. Неизотермическая фильтрация двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей описывается системой трех уравнений относительно давления  $p$ , насыщенности вытесняющей фазы  $\sigma$  и температуры  $T$

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$$

$$(1.2) \quad S m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0$$

$$(1.3) \quad \operatorname{div} (S \lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} [(\rho_1 c_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 c_2 \mathbf{w}_2) T] = \frac{\partial}{\partial t} (S M T)$$

$$(1.4) \quad \mathbf{w} = -SK \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right) (\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{g})$$

$$(1.5) \quad \mathbf{w}_1 = \varphi \mathbf{w} + SK \frac{f_2}{\mu_2} \varphi [\Delta \rho \mathbf{g} + \operatorname{grad} p_c]$$

$$\varphi = \frac{f_1}{f_2 + \mu_0 f_1}, \quad \rho = \varphi \rho_1 + (1 - \varphi) \rho_2, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$$

$$M = m [\rho_1 c_1 \sigma + \rho_2 c_2 (1 - \sigma)] + (1 - m) \rho_3 c_3$$

Здесь  $\mathbf{w}$  — вектор скорости фильтрации,  $S(x, y)$  — толщина пласта,  $K$  — тензор абсолютной проницаемости,  $f(\sigma, T)$  — относительная фазовая проницаемость,  $m$  — пористость,  $\mu(T)$  — вязкость,  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — удельная теплоемкость,  $p_c(\sigma, T)$  — капиллярное давление,  $t$  — время. Индекс 1 относится к вытесняющей фазе, индекс 2 — к вытесняемой, индекс 3 — к окружающей породе.

Уравнения (1.1)–(1.3) рассматриваются в области  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $0 \leq y \leq L_2$ ,  $0 \leq t \leq \bar{t}$ . Пласт предполагается неоднородным и анизотропным. Капиллярное давление используется только для вычисления фазовых скоростей фильтрации, но не входит в уравнение для давления [1]. Заметим, что уравнения (1.1)–(1.3) могут описывать различные случаи двумерной фильтрации: плоское течение в наклонном пласте переменной мощности, двумерное течение в вертикальной плоскости, двумерное осесимметричное течение и т. д.