

**О СПОСОБЕ ПРОВЕРКИ
САМОСОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
ДЛЯ СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

А. А. ПРАСКОВСКИЙ, В. А. САБЕЛЬНИКОВ

(Москва)

Предлагается прямой способ проверки качества методики измерений характеристик свободных автомодельных турбулентных течений (продольной средней скорости и компонентов тензора турбулентных напряжений), состоящий в непосредственной подстановке полученных в эксперименте распределений продольной средней скорости и турбулентных напряжений в уравнения Рейнольдса. С помощью предложенного метода обнаружена несогласованность экспериментальных данных для автомодельных участков плоской [1] и осесимметричной [2] струй в затопленном пространстве.

На основе полученных из уравнений Рейнольдса соотношений может быть также сделана оценка вклада членов, отбрасываемых в приближении пограничного слоя (в частности, диагональных компонентов тензора турбулентных напряжений), на формирование профилей продольной средней скорости и статического давления. В данной работе такая оценка получена для автомодельных участков плоской и осесимметричной свободных турбулентных струй.

1. В настоящее время имеется ряд экспериментальных работ по исследованию закономерностей распространения свободных турбулентных течений (струя, след, слой смешения) в несжимаемой жидкости, в которых наряду с профилями продольной средней скорости получены данные о распределении всех компонентов тензора напряжений Рейнольдса (см., например, [1-4]). Особенно подробно исследованы характеристики турбулентности на автомодельных участках свободных турбулентных течений. Вместе с тем вопрос о корректности экспериментальных данных, по-видимому, не получил полного разрешения. Очень часто, например, проверка качества использованной методики эксперимента заключается в сравнении полученных результатов с данными других авторов. Имеется, однако, прямой способ проверки согласованности экспериментальных данных, основывающийся на непосредственной подстановке полученных в эксперименте распределений скорости и турбулентных напряжений в систему уравнений Рейнольдса. При корректно проведенных измерениях указанная подстановка обращает уравнения Рейнольдса в тождество. Возникающие при этом затруднения, связанные с необходимостью дифференцирования опытных данных, в случае свободных автомодельных течений можно обойти путем осуществления тождественных преобразований уравнений Рейнольдса (исключение составляет слой смешения, где эта процедура неосуществима; возможно, использование сплайнов для аппроксимации результатов эксперимента позволит обойти эту трудность).

Проиллюстрируем возможности предлагаемого способа проверки согласованности экспериментальных данных на примере анализа двух автомодельных течений — распространения плоской и осесимметричной свободных турбулентных струй в затопленном пространстве.

Уравнения Рейнольдса и неразрывности в декартовой системе координат xu имеют вид (использованы общепринятые в теории турбулентных течений с поперечным сдвигом обозначения, см., например, [5])

$$(1.1) \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} - \frac{1}{y^i} \frac{\partial \langle y^i \langle uv \rangle \rangle}{\partial y}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial x} - \frac{1}{y^i} \frac{\partial \langle y^i \langle v^2 \rangle \rangle}{\partial y} + i \frac{\langle w^2 \rangle}{y^i}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y^i} \frac{\partial \langle y^i V \rangle}{\partial y} = 0$$

Здесь $i=0, 1$ – плоское и осесимметричное течения. Членами с молекулярной вязкостью пренебрегается, так как рассматриваются большие числа Рейнольдса.

На автомодельных участках плоской и осесимметричной струй имеем соответственно

$$(1.2) \quad U = \left(\frac{M_1}{x}\right)^{1/2} W_1(\eta), \quad V = \left(\frac{M_1}{x}\right)^{1/2} \left(\eta F_1' - \frac{1}{2} F\right), \quad P = P_0 + \frac{M_1}{x} \pi_1(\eta)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{M_1}{x} g_{11}(\eta), \quad \langle uv \rangle = \frac{M_1}{x} g_{12}(\eta), \quad \langle v^2 \rangle = \frac{M_1}{x} g_{22}(\eta)$$

$$W_1 = F_1(\rho), \quad M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy$$

$$(1.3) \quad U = \frac{M_2^{1/2}}{x} W_2(\eta), \quad V = \frac{M_2^{1/2}}{x} \left(F_2' - \frac{F_2}{\eta}\right), \quad P = P_0 + \frac{M_2}{x^2} \pi_2(\eta)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{M_2}{x^2} g_{11}(\eta), \quad \langle uv \rangle = \frac{M_2}{x^2} g_{12}(\eta), \quad \langle v^2 \rangle = \frac{M_2}{x^2} g_{22}(\eta)$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{M_2}{x^2} g_{33}(\eta), \quad W_2 = \frac{F_2'(\eta)}{\eta}, \quad M_2 = 2\pi \int_0^{\infty} U^2 y dy$$

В обоих случаях $\eta=y/x$, штрих обозначает дифференцирование по η . Подстановка соотношений (1.2) и (1.3) в уравнения Рейнольдса дает

$$(1.4) \quad -\Phi_1' = (\eta\pi_1)' + (\eta g_{11})' - g_{12}', \quad -\eta\Phi_1' = -\pi_1' + (\eta g_{12})' - g_{22}', \quad \Phi_1 = 1/2 F_1 F_1'$$

$$(1.5) \quad -\left(\frac{\Phi_2'}{\eta}\right)' = (\eta^2 \pi_2)' + (\eta^2 g_{11})' - (\eta g_{12})'$$

$$-\left(\frac{\Phi_2}{\eta}\right)'' = -\pi_2' + \frac{(\eta^2 g_{12})'}{\eta} - \frac{(\eta g_{22})'}{\eta} + \frac{g_{33}}{\eta}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} F_2^2$$

Считая в системах обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4) и (1.5) неизвестными функциями Φ_i и π_i , после интегрирования с учетом естественных граничных условий – Φ_i и $\pi_i \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$ и $\Phi_i = 0$ при $\eta = 0$, получим следующие связи между функциями Φ_i , π_i и g_{ij} ($i, j=1, 2$), в которые уже не входит операция дифференцирования

$$(1.6) \quad \Phi_1(\eta) = \frac{g_{12} + \eta(g_{22} - g_{11} - \eta g_{12})}{1 + \eta^2} - \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\xi(g_{22} - g_{11} - \xi g_{12}) + g_{12}}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

$$\pi_1(\eta) = -\frac{g_{22} - 2\eta g_{12} + \eta^2 g_{11}}{1 + \eta^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\xi(g_{22} - g_{11} - \xi g_{12}) + g_{12}}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

$$\Phi_2(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2(1 - \xi^2)g_{12} + \xi^3(g_{22} - g_{11} + f)}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

(1.7)

$$\pi_2(\eta) = -\frac{\Phi_2}{\eta^2(1+\eta^2)} - \frac{\eta^2 g_{11} - 2\eta g_{12} + g_{22} + f}{1+\eta^2}, \quad f(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{\xi g_{12} - g_{22} + g_{33}}{\xi} d\xi$$

Связь между профилем продольной средней скорости, т. е. функцией F_1' и функциями g_{ij} , находится с использованием соотношений (1.4) и (1.5) для плоской и осесимметричной струй соответственно

$$(1.8) \quad W_1(\eta) = F_1' = \Phi_1 \left[\int_0^{\eta} \Phi_1(\xi) d\xi \right]^{-1/2}$$

$$(1.9) \quad W_2(\eta) = \frac{F_2'}{\eta} = \frac{1}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{\Phi_2}{2}} \left[1 + \frac{\eta(1-\eta^2)g_{12} + \eta^2(g_{22} - g_{11} + f)}{\Phi_2} \right]$$

Соотношения (1.6) – (1.9) и представляют собой искомый результат. С их помощью был проведен анализ согласованности экспериментальных данных на авторемодельном участке для плоской струи [1] и осесимметричной струи [2]. Процедура проверки заключалась в подстановке экспериментально полученных распределений турбулентных напряжений, т. е. функций g_{ij} , в соотношения (1.6), (1.8) и (1.7), (1.9) для плоской и осесимметричной струй соответственно. Верхний предел интегрирования в выражении (1.6) равнялся $\eta=0.35$, а в выражении (1.7) – $\eta=0.28$. Полученные при такой подстановке профили продольной средней скорости изображены линиями *a* на фиг. 1 для плоской и осесимметричной струй соответственно. На этих же фигурах линиями *b* изображены усредненные результаты измерений профилей продольной скорости, полученные авторами цитированных работ. Сравнение кривых, приведенных на фигурах, позволяет сделать вывод о несогласованности экспериментальных данных, полученных в работах [1, 2], и о методических погрешностях в проведенных экспериментах.

2. С помощью соотношений (1.6) – (1.9) можно также в случае корректности экспериментальных данных оценить влияние членов, отбрасываемых в уравнениях Рейнольдса при использовании приближения пограничного слоя, на формирование профилей средней скорости и среднего статического давления в плоской и осесимметричной струях. Приближение пограничного слоя является основой для описания многих случаев распространения свободных турбулентных течений с поперечным сдвигом. Оно позволяет существенно упростить систему уравнений Рейнольдса и, соответственно, постановку краевой задачи. Вместе с тем следует иметь в виду, что ошибка в описании турбулентного течения при переходе от уравнений Рейнольдса к уравнениям пограничного слоя является конечной и не зависит от величины числа Рейнольдса (напомним, что рассматривается случай больших чисел Рейнольдса) в отличие от случая ламинарного течения, когда указанная ошибка стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса, т. е. решение уравнений пограничного слоя асимптотически стремится к решению уравнений Навье – Стокса.

Имея в виду отмеченное обстоятельство, было бы желательно получить оценку обсуждаемой ошибки. Такая попытка содержится в [8], где для этой цели привлекается полуэмпирическая модель для турбулентных напряжений и анализируется течение в слое смешения. В настоящей работе оценка ошибки проводится исходя из соотношений (1.6) – (1.9) на основе экспериментальных данных.

В приближении пограничного слоя соотношения (1.6) – (1.9) для плоской и осесимметричной струй переходят в следующие:

$$(2.1) \quad \Phi_{1\pi}(\eta) = g_{12}(\eta), \quad \pi_{1\pi}(\eta) = -g_{22}(\eta)$$

$$W_{1\pi}(\eta) = F_{1\pi}'(\eta) = g_{12}(\eta) \left[\int_0^{\eta} g_{12}(\xi) d\xi \right]^{-1/2}$$

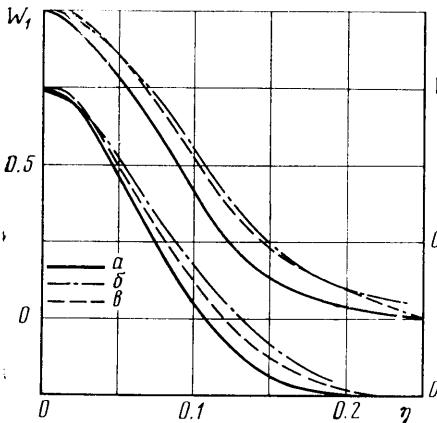
$$\Phi_{2\pi}(\eta) = \eta^2 g_{12}(\eta), \quad \pi_{2\pi}(\eta) = -g_{22}(\eta) + \int_{\eta}^{\infty} \frac{g_{22}(\xi) - g_{33}(\xi)}{\xi} d\xi$$

(2.2)

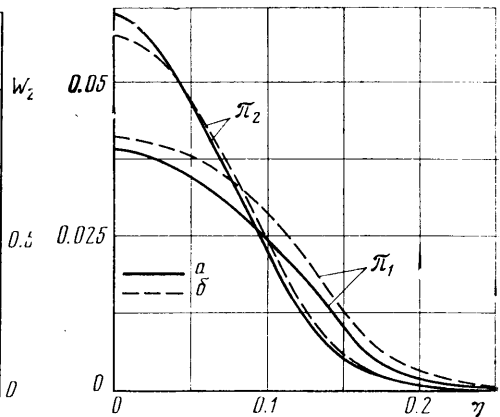
$$W_{2\pi}(\eta) = \frac{F_{2\pi}'(\eta)}{\eta} = \eta g_{12}(\eta) \left[2 \int_0^{\eta} \zeta^2 g_{12}(\zeta) d\zeta \right]^{-1/2}$$

На фиг. 1 линиями *в* приведены профили средней скорости, полученные из соотношений (2.1) и (2.2) при подстановке в их правые части экспериментальных распределений турбулентных напряжений из работ [1, 2].

Если теперь не принимать во внимание выясненную в п. 1 несогласованность использованных экспериментальных данных (другими словами, рассматривать задачу о восстановлении профиля скорости по измеренным значениям турбулентных напряжений), то сравнение соответствующих кривых на фиг. 1 показывает существенную разницу в профилях средней скорости, полученных из уравнений Рейнольдса и уравнений пограничного слоя. Например, при $\eta=0.1$ отличие в значениях функций W_i и $W_{i\pi}$ ($i=1, 2$) достигает 20% и растет с увеличением η (следует, однако, иметь



Фиг. 1



Фиг. 2

в виду меньшую точность экспериментальных данных по функциям g_{ij} на периферии струй).

На фиг. 2 приведены профили статического давления для плоской и осесимметричной струй соответственно, рассчитанные с использованием измеренных значений турбулентных напряжений. Результаты расчетов по полной системе уравнений Рейнольдса — по соотношениям (1.6) и (1.7) — нанесены линиями *а*, а в приближении пограничного слоя по соотношениям (2.1) и (2.2) — линиями *б*. На основании данных, приведенных на фиг. 2, можно сделать вывод, что при переходе от полной системы уравнений Рейнольдса к приближению пограничного слоя распределение статического давления изменяется меньше, чем распределение средней продольной скорости.

Авторы благодарят В. Л. Зимонта за полезное обсуждение результатов работы и ряд советов, которые были использованы при подготовке статьи к печати.

Поступила 17 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Gutmark E., Wygnanski I. The planar turbulent jet. J. Fluid Mech., 1976, vol. 73 pt 3.
2. Wygnanski I., Fiedler H. Some measurements in the self-preserving jet. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3.
3. Wygnanski I., Fiedler H. The two-dimensional mixing region. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 2.
4. Bradbury L. J. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
5. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. Расщупкин В. И., Секундов А. Н. О применимости приближения пограничного слоя для расчета плоского турбулентного слоя смешения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.